E 1956

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

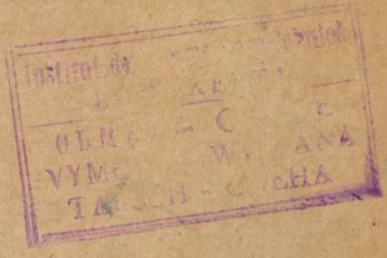
73

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

1837.S.

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET



Anul VII — Ianuarie 1956

1

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VII. Nr. 1 — ianuarie 1956

SUMARUL:

		Pag.
1.	*La începutul unui nou an*	1
2.	*Grupurile de rotaţie ale poliedrelor regulate* de Tiberiu Roman	3
3.	*Electretul şi aplicaţiile lui tehnice* de Angela Negulescu	13
4.	*Note matematice* de Ion Cristea şi Mihail Popescu, studenţi	19
5.	*Energia de legătură a nucleului şi defectul de masă* de Virgil Atanasiu	22
6.	*Caleidoscop fizic*	25
7.	*Chestiuni de examen (1946—1964)*	28
8.	*Probleme rezolvate (1502, 1508, 1509, 1510, 1511, 1518, 1532, 1540, 1544, 1546, 1547, 1558, 1559, 1561, 1566, 1569, 1575, 1580, 1585, 1587, 1594, 1647, E : 561, E : 575, E : 592, E : 618)*	30
9.	*Probleme propuse (1965—1991)*	44
10.	*Exerciţii şi probleme pentru şcoala de şapte ani (E : 747 — E : 760)*	48
11.	*Din viaţa cercurilor de elevi (conţine problemele 1992—2004)*	49
12.	*Poşta redacţiei*	51
13.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	52

ANUL VII 1 IANUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor adjunct; **Boiangiu A.**, asistentă univ., **Ionescu-Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor adjunct; **Maurer I.**, lector, redactor adjunct pentru ediţia maghiară; **Mihăileanu N. N.**, prof. univ.; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ. redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.4653 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VII * Nr. 1 ianuarie 1956

LA ÎNCEPUT DE AN NOU

ÎNCEPEM un an nou, primul an al celui de-al doilea cincinal.

Succesele obţinute de poporul nostru în toate domeniile de activitate stau la baza înfloririi fără precedent a culturii, constituind totodată chezăşia dezvoltării ei mai departe.

Din raportul de activitate al C. C. al P. M. R., citit la Congresul al doilea, s-a putut vedea că numai în anul 1955 statul a cheltuit pentru ridicarea nivelului material şi cultural al oamenilor muncii de cîteva ori mai mult decît în 1938. În perioada 1948—1955 s-au cheltuit 32,6 miliarde lei pentru învăţămînt şi burse, pentru înflorirea artei şi literaturii.

Începînd cu anul 1948, învăţămîntul nostru a luat o formă nouă, un conţinut cu adevărat ştiinţific. S-a schimbat caracterul învăţămîntului, el fiind astăzi legat de nevoile poporului. În Republica Populară Romînă au fost şi sînt asigurate condiţiile materiale şi politice necesare dezvoltării învăţămîntului minorităţilor naţionale.

Pe baza rezultatelor obţinute, directivele Congresului al doilea prevăd dezvoltarea continuă a tuturor ramurilor economiei naţionale. Producţia globală industrială va creşte în 1960 faţă de 1955, cu 60—65 %, sectorul socialist în agricultură se va dezvolta astfel încît la sfîrşitul celui de-al doilea cincinal să asigure 60—70 % din producţia totală agricolă-marfă, iar pentru lucrările capitale se vor aloca 105—110 miliarde lei. Stabilirea acestor directive ne îndreptăţeşte să privim cu încredere progresul uriaş al culturii ca o consecinţă a întăririi bazei materiale şi ne impune sarcinile noastre de viitor.

Pentru ridicarea continuă a nivelului material şi cultural al oamenilor muncii vor fi alocate importante sume, pentru tehnică şi ştiinţă, pentru introducerea tehnicii noi în industrie, agricultură, transporturi, pentru cercetări în domeniul aplicării energiei nucleare în scopuri paşnice. Cu ajutorul Uniunii Sovietice s-a început construirea centrului de cercetări nucleare. Chiar în cursul acestui an se va pune în funcţiune un reactor de 2000 W şi un ciclotron de 12 500 000 electron-volţi; aceste instalaţii vor permite producerea izotopilor radioactivi necesari pentru diferite cercetări şi aplicaţii în chimie, metalurgie, medicină, biologie, etc.

În ce priveşte învăţămîntul, partidul şi guvernul vor acorda o grijă deosebită pentru dezvoltarea bazei materiale. Astfel se vor construi şi da în folosinţă peste 1200 săli de clase pentru învăţămîntul elementar şi de 7 ani, 3 institute de învăţămînt superior şi cca 6000 locuri în căminele studenţeşti.

Directivele Congrsului al doilea prevăd ridicarea continuă a nivelului cultural al poporului prin lărgirea învăţămîntului de 7 ani, astfel ca în 1960, cca 90 %

din absolvenții școlilor elementare să fie cuprinși în această formă de învățămînt, iar cu trecerea în cincinalul următor și în decursul lui, învățămîntul de 7 ani să devină general și obligatoriu.

Cu toate succesele înregistrate în domeniul învățămîntului, dezbaterile Congresului arată că mai sînt încă lipsuri importante. Nivelul de cunoștiințe pe care îl au mulți tineri ce ies din școli este scăzut, recunoscîndu-se în deosebi slaba pregătire la matematici, fizică, chimie și științe naturale — materii de deosebită importanță în construirea socialismului.

Pentru lichidarea acestor lipsuri, directivele Congresului trasează ca sarcină, necesitatea de a se intensifica munca pentru ridicarea nivelului științific al învățămîntului, subliniind atenția deosebită ce trebuie să se acorde studiului științelor fizico-matematice precum și legării acestora cu practica, cu viața.

În acest scop Gazeta Matematică și Fizică (seria B) se va strădui să-și îmbunătățească munca pentru a trezi în mase tot mai mari de elevi interesul pentru studiul matematicii și fizicii, oferind tineretului din școli un sprijin mai puternic în pregatirea sa. Astfel, în acest an, noi rubrici vor apare în « Gazetă ». Rubrica: « Pentru cunoașterea energiei atomice » va prezenta materiale care să contribuie la lărgirea cunoștiințelor legate de această mare descoperire; rubrica: « Noutăți din știință și tehnică » va ține în curent pe cititori cu descoperirile realizate în fizică și cu diferite invenții sau metode tehnice, care să ilustreze legarea teoriei cu practica.. Rubrica: « Chestiuni de examen » va pune la dispoziția elevilor cît mai multe probleme și exerciții date la examenele de admitere. De asemenea se va mări numărul problemelor de fizică, iar la rubrica « Pentru cercuri » vor apare note scurte de matematică și de fizică, pentru a trezi interesul elevilor la studiul mai aprofundat al acestor discipline.

« Gazeta » va căuta să țină în acest an un contact mai strîns cu cititorii, prin consfătuiri mai numeroase ale redacției, în diferite puncte ale țării. În felul acesta, sugestiile și propunerile făcute de colaboratori și cititori vor contribui în mod permanent la îmbunătățirea muncii redacționale.

Dar, pentru ca anul 1956 să însemne un nou progres pentru ridicarea nivelului de cunoștiințe la matematică și fizică este necesar ca și cercurile de elevi să-și intensifice activitatea; ca organizațiile U. T. M. să-și întărească rolul mobilizator în rîndurile tineretului din școli, iar utemiștii să fie exemplu în muncă și disciplină. Trebuie să considerăm drept o datorie patriotică contribuția elevilor și profesorilor la efortul general al oamenilor muncii pentru traducerea în viață a sarcinilor trasate de Partid.

Să ne luăm angajamentul de a folosi la maximum condițiile favorabile existente în țara noastră, pentru ca rodul muncii noastre să constituie un aport real la opera de construire a socialismului.

GRUPURILE DE ROTAŢII ALE POLIEDRELOR REGULATE

TIBERIU ROMAN

ÎN două articole publicate în Gazeta Matematică şi Fizică, seria B, numerele 3 şi 4/1955, s-au prezentat cîteva noţiuni de teoria grupurilor, folosind exemple din matematica elementară.

Articolul de faţă îşi propune să analizeze trei grupuri concrete, finite, alcătuite din rotaţiile admise de poliedrele regulate, rotaţii care transformă fiecare din aceste poliedre în el însuşi.

1. Noţiuni fundamentale

În acest paragraf amintim unele noţiuni prezentate în articolele citate mai sus şi care vor fi necesare pentru studiul ce ni-l propunem.

Grup este o mulţime de elemente A, B, C,. . . între care s-a definit o operaţie (pe care o vom denumi produs) *care asociază la două elemente* (într-o ordine anumită) *un element al aceleiaşi mulţimi, aşa ca operaţia să satisfacă condiţiile de*:

a) *asociativitate*: pentru oricare trei elemente A, B, C ale grupului este valabilă relaţia $(AB)C = A(BC)$;

b) *existenţa elementului identic*: printre elementele grupului există unul (notat cu E) aşa încît $AE = EA = A$, pentru orice element A al grupului;

c) *existenţa elementului invers*: pentru orice element A există un element al mulţimii A^{-1} aşa ca $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Ordinul unui grup finit este numărul elementelor sale.

Puterile unui element A sînt elementele obţinute prin produsul repetat al acestui element cu el însuşi.

Grup ciclic este un grup format din toate puterile unui element.

Grup comutativ este un grup în care, pentru oricare două elemente A şi B ale sale, este satisfăcută relaţia $AB = BA$.

Tabela de grup indică sub forma unui tablou patratic cu linii şi coloane elementul produs al fiecărei perechi de elemente ale grupului.

Corespondenţa biunivocă între elementele a două mulţimi este o relaţie între aceste elemente care face ca, la un element al primei mulţimi să corespundă un element al celei de-a doua şi reciproc.

Izomorfismul a două grupuri constă în faptul că între elementele A_i (ale primului grup) şi B_i (ale celui de-al doilea) s-a stabilit o corespondenţă biunivocă ($A_i \longleftrightarrow B_i$) aşa ca produsului $A_r A_s = A_u$ să-i corespundă produsul $B_r B_s = B_u$.

Două grupuri izomorfe sînt identice din punctul de vedere al teoriei grupurilor, cu toate că ele pot conţine elemente de natură diferită iar operaţia poate fi definită în diferite moduri.

Grupul diedric D_{2n} este izomorf cu grupul rotaţiilor şi răsturnărilor admise de o bipiramidă dreaptă, cu baza un poligon regulat cu n laturi. Grupul diedric are ordinul $2n$ şi este necomutativ. Grupul $D_{2\cdot 3}$ este izomorf cu grupul rotaţiilor şi simetriilor admise de un triunghi echilateral (studiat la pag. 107-108 — G.M.F.—B, 1955). Grupul $D_{2\cdot 4}$ este izomorf cu grupul rotaţiilor şi simetriilor admise de un patrat şi îl vom studia mai jos.

O substituție de n elemente este operația prin care se trece de la o poziție a acestor elemente la o altă poziție (permutare). Esențială este corespondența care se stabilește între fiecare element al primei permutări și cel în care se trece în a doua permutare. Substituția

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b & c & a \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

arată că a este înlocuit cu c, b cu a, c cu b iar d rămîne neschimbat. Aceiași substituție se poate nota și

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Grupul simetric $\mathfrak{S}_n$ este alcătuit din toate substituțiile care se pot forma cu n elemente. Ordinul său este $n! = 1.2.3. \ldots . n$.

O inversiune într-o substituție (în prima linie indicii avînd ordinea naturală) este existența în linia a doua a unei perechi de numere din care primul este mai mare decît al doilea. Astfel substituția $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ are două inversiuni: 2 înainte de 1 și 3 înainte de 1.

O substituție este *pară* dacă conține un număr par de inversiuni și *impară* în caz contrar.

Grupul altern $\mathfrak{A}_n$ este alcătuit din toate substituțiile pare de n elemente. Ordinul său este $\frac{n!}{2} = 3.4.5. \ldots . n$.

Subgrup al unui grup este o mulțime de elemente ale sale care formează grup față de operația definită în G. Condiția suficientă ca o mulțime H de elemente ale unui grup finit să formeze un subgrup este ca produsul a două elemente oarecare din H să aparțină lui H. Grupul diedric D_{2n} are ca subgrup grupul ciclic al rotațiilor bipiramidei. Grupul simetric $\mathfrak{S}_n$ are ca subgrup grupul altern $\mathfrak{A}_n$. Toate puterile unui element al unui grup ciclic formează un subgrup ciclic. Subgrupuri proprii ale unui grup G sînt subgrupurile diferite de G și de elementul identic E.

Două *elemente* A și B ale unui grup G se numesc *conjugate* dacă există în G un element U așa ca $B = U^{-1}AU$.

O clasă de elemente conjugate este formată din toate elementele unui grup, conjugate între ele.

Transformatul unui subgrup H printr-un element A aparținînd aceluiaș grup G este un subgrup K format din conjugatele lui A cu fiecare element din H. Subgrupurile H și K se numesc *subgrupuri conjugate*.

Transformările admise de un corp geometric sînt acele transformări în urma cărora corpul respectiv coincide cu el însuși, considerat în poziția sa inițială.

Transformarea identică corespunde unei rotații de unghi nul sau unei translații de amplitudine nulă.

Rotația binară este o rotație de 180° în jurul unui ax; rotația ternară este o rotație de 120° în jurul unui ax, rotația cuaternară de 90°, iar rotația senară de 60°.

2. Grupul rotațiilor tetraedrului regulat

Tetraedrul regulat are patru fețe triunghiuri echilaterale $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_2$, $A_2A_3A_4$ (fig. 1).

Care sînt transformările admise de acest tetraedru?

Transformările care lasă invariant vîrful A_1 sînt rotațiile în jurul axei A_1B_1 cu unghiurile 0, $\frac{2\pi}{3}$ și $\frac{4\pi}{3}$ în sens direct și pe care le notăm cu $R_0 = E$, R_1, R_2.

Să considerăm apoi, transformările admise de tetraedru și care fac ca vîrful A_1 să fie înlocuit pe rînd cu celelalte trei vîrfuri. Să notăm aceste transformări cu S_1, S_2, S_3. Putem forma astfel în total, 12 transformări admise de tetraedru: $R_0 = E$, R_1, R_2; $S_1R_0 = S_1$, S_1R_1, S_1R_2; $S_2R_0 = S_2$, S_2R_1, S_2R_2; $S_3R_0 = S_3$, S_3R_1, S_3R_2. Aceste 12 transformări sînt toate distincte. Într-adevăr, din $S_iR_j = S_kR_l$ (unde i, $k = 0, 1, 2, 3$ iar j, $l = 0, 1, 2,$) rezultă că $i = k$ (deoarece transformările R lasă pe loc un anumit A). Înmulțind la stînga egalitatea de mai sus su $S_i^{-1} = S_k^{-1}$, rezultă $R_j = R_l$ adică $j = l$. Prin urmare, între cele 12 transformări S_iR_j nu există două care să coincidă, deoarece ele au cel puțin cîte un indice diferit.

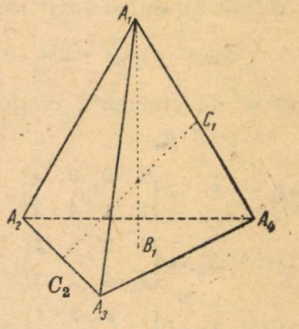


Fig. 1

Să arătăm că acestea sînt toate transformările admise de tetraedru.

Fie T una din aceste transformări, care face ca un vîrf A_i să se transforme în A_j, de exemplu. Fie S_i acea transformare S care de asemenea transformă vîrful A_i în A_j. Prin transformarea $S_i^{-1}T$ tetraedrul se transformă în el însuși; vîrful A_i rămîne pe loc, ceea ce arată că transformarea noastră este o rotație în jurul axei ce trece prin A_i, adică este o transformare R_j. Din egalitatea $S_i^{-1}T = R_j$ rezultă $T = S_iR_j$. Cu alte cuvinte, fiecare transformare a tetraedrului în el însuși se găsește printre cele 12 de mai sus.

Pentru a obține efectiv cele 12 transformări de mai sus, se observă că în fiecare vîrf există cîte două rotații admise de unghi 120° respectiv 240°, față de axele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 (care unesc un vîrf cu centrul de greutate al feței opuse); deci în total 8 rotații ternare (fiecare din ele este un element de ordinul trei). De asemeni, rotațiile de cîte 180° în jurul dreptelor C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6 (care unesc mijloacele a două muchii opuse) formează trei dintre transformările căutate. În fine, transformarea identică E este a douăsprezecea.

În vederea studierii grupului rotațiilor tetraedrului să-l punem în corespondență biunivocă cu un grup de substituții. Pentru aceasta să exprimăm permutările vîrfurilor tetraedrului, permutări care se produc în urma rotațiilor de mai sus.

Evident că transformarea identică este dată de substituția $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$.

Rotațiilor în jurul axei A_1B_1 le corespund biunivoc substituțiile

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},$$

adică elementul 1 rămîne invariant.

Rotațiilor în jurul axelor A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 le corespund biunivoc respectiv, subtituțiile

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}.$$

Rotațiilor în jurul axelor C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6 le corespund biunivoc substituțiile

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

Aceste 12 substituții formează tocmai grupul altern $\mathcal{A}_4$.

Acest grup este compus din $\frac{4!}{2} = 12$ substituții care se grupează în 4 clase de elemente conjugate și anume:

I : E;

II : $R = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$;

III: $X_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$; $X_4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$;

IV: $Y_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$; $Y_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$; $Y_3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$; $Y_4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$.

Cititorul poate verifica ușor că aceste substituții sînt toate pare și că substituțiile fiecărei clase sînt conjugate între ele.

Subgrupurile proprii ale acestui grup sînt:
F_1 alcătuit din E și R; F_2 din E și S; F_3 din E și T;
G_1 din E, X_1 și Y_1; G_2 din E, X_2 și Y_2; G_3 din E, X_3 și Y_3; G_4 din E, X_4, Y_4; H din E, R, S și T.

Se verifică îndată că cele 12 rotații de mai sus formează un grup izomorf cu $\mathcal{A}_4$.

Folosind acest izomorfism putem găsi ușor structura geometrică a subgrupurilor rotațiilor tetraedrului.

Subgrupurile de ordin doi sînt alcătuite, în afară de transformarea identică, din cîte o rotație binară respectiv în jurul axelor C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6.

Subgrupurile de ordin trei sînt alcătuite, în afară de transformarea identică, din cîte două rotații ternare respectiv în jurul axelor A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.

Subgrupul de ordin patru este alcătuit din rotația identică și din cele trei rotații binare, ale căror axe sînt două cîte două perpendiculare. Notînd cu R, S, T aceste rotații binare tabela de grup a acestui subgrup (numit grupul tridreptunghic) este

	E	R	S	T
E	E	R	S	T
R	R	E	T	S
S	S	T	E	R
T	T	S	R	E

ceeace arată că el este un grup comutativ, fără a fi ciclic.

3. Grupul rotațiilor cubului

Descrierea cubului nu mai este, credem, necesară.

Pentru a studia grupul rotațiilor *cubului* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (fig. 2) procedăm ca la tetraedru.

Rotațiile care lasă invariant vîrful A_1 în transformările cubului în el însuși sînt rotațiile în jurul diagonalei A_1A_7 cu unghiurile 0°, 120° și 240° și pe care le notăm cu $R_0 = E$, R_1, R_2.

Există șapte transformări S_i care aduc vîrful A_i $(i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ în A_1. Putem astfel forma 24 de transformări:

$$E,\ R_1,\ R_2,\ S_1,\ S_1R_1,\ S_1R_2,\ S_2,\ S_2R_1,\ S_2R_2,\ S_3,\ S_3R_1,\ S_3R_2,\ S_4,\ S_4R_1,\ S_4R_2,$$

$$S_5,\ S_5R_1,\ S_5R_2,\ S_6,\ S_6R_1,\ S_6R_2,\ S_7,\ S_7R_1,\ S_7R_2.$$

La fel ca la paragraful precedent, se poate arăta că aceste 24 transformări sînt distincte și totodată singurele transformări admise de cub.

Putem găsi efectiv cele 24 transformări admise, enumerate mai sus, Avem întîi transformarea identică. Observăm că în jurul fiecăreia din cele 4 diagonale A_1A_7, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6 există cîte două rotații neidentice admise (deci în total 8 rotații ternare). Diagonalele sînt axe de rotație ternară.

În jurul fiecăreia din cele trei axe de rotație cuaternară (B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6) care unesc centrele fețelor opuse există cîte trei rotații neidentice admise. Prin urmare, 6 rotații cuaternare (de unghiuri 90° și 270°) și 3 rotații binare (de cîte 180°).

În jurul fiecăreia din cele șase axe de rotație binară (C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6, C_7C_8, C_9C_{10}, $C_{11}C_{12}$) care unesc mijloacele a două muchii opuse există cîte o singură rotație de 180°; prin urmare, 6 rotații binare.

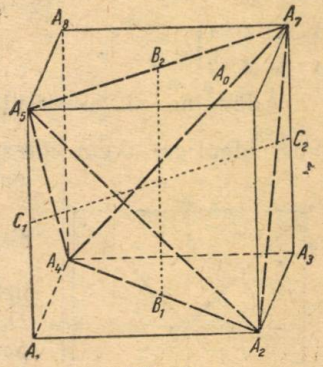


Fig. 2

Deci, grupul rotațiilor cubului este format din $E + 8$ rotații ternare $+ 6$ rotații cuaternare $+ (3 + 6)$ rotații binare $= 24$ rotații.

Grupul rotațiilor cubului se poate pune în corespondență biunivocă cu grupul substituțiilor de patru elemente, $\mathfrak{S}_4$, în felul următor:

Fiecărei rotații a cubului îi corespunde o anumită permutare a celor patru diagonale ale sale. Vom nota fiecare diagonală prin indicele vîrfului bazei inferioare (de referință) prin care trece: diagonala A_1A_7 prin 1, A_2A_8 prin 2, etc.

Rotațiilor de 120° și 240° în jurul diagonalei A_1A_7 le corespund biunivoc substituțiile $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$, adică elementul 1 (diagonala A_1A_7) rămîne invariant.

Rotațiilor în jurul diagonalelor A_2A_3, A_3A_5, A_4A_6, le corespund biunivoc respectiv substituțiile

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}.$$

Rotaţiilor în jurul axei B_1B_2 le corespund biunivoc substituţiile

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix};$$

diagonalele se permută circular între ele prin rotaţia de 90° în jurul acestei axe.

Rotaţiilor în jurul axei B_3B_4 şi B_5B_6 le corespund biunivoc respectiv substituţiile

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}.$$

Rotaţiei în jurul axei C_1C_2 îi corespunde biunivoc substituţia $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$, adică diagonalele A_2A_8 şi A_4A_6 rămîn invariante în această rotaţie. Celorlalte rotaţii în jurul axelor analoage (C_3C_4, C_5C_6, C_7C_8, C_9C_{10}, $C_{11}C_{12}$) le corespund biunivoc substituţiile $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$.

Adăugînd şi substituţia identică $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, corespunzătoare transformării identice, avem corespondenţa deplină între grupul celor 24 rotaţii ale cubului şi grupul simetric de 4 elemente, $\mathfrak{S}_4$.

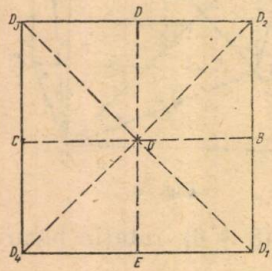


Fig. 3

Acest grup admite un subgrup de ordinul 12: $\mathfrak{A}_4$, studiat la paragraful precedent.

Pentru a studia subgrupurile de ordin 8 să analizăm grupul reprezentat de simetriile unui patrat $D_1D_2D_3D_4$ (fig. 3). Notăm cu R rotaţia de 90° a patratului, în jurul centrului O, în sens trigonometric direct. Patratul se transformă în el însuşi prin rotaţiile $R^0 = E, R, R^2, R^3$ (R^2 fiind rotaţia de 180, R^3 cea de 270°).

Notăm cu S simetria patratului faţă de axa CB, cu T — faţa de axa DE, cu U — faţă de diagonala D_1D_3, cu V — faţă de D_2D_4.

Ţinînd seama de faptul că rotaţiile formează un subgrup ciclic de ordinul patru, că S, T, U, V sînt elemente de ordinul doi şi că $RS = SR^3$ se poate scrie tabela:

	E	R	R^2	R^3	S	T	U	V
E	E	R	R^2	R^3	S	T	U	V
R	R	R^2	R^3	E	U	V	T	S
R^2	R^2	R^3	E	R	T	S	V	U
R^3	R^3	E	R	R^2	V	U	S	T
S	S	V	T	U	E	R^2	R^3	R
T	T	U	S	V	R^2	E	R	R^3
U	U	S	V	T	R	R^3	E	R^2
V	V	T	U	S	R^3	R	R^2	E

ceea ce dovedește că simetriile patratului formează un grup G_8 necomutativ.

Cititorul poate să-și construiască această tabelă efectuînd compunerile de simetrii, efectiv sau folosind relațiile de mai sus. Deasemenea poate verifica izomorfismul acestui grup cu grupul rotațiilor și răsturnărilor unei bipiramide drepte cu baza un patrat (grupul diedric $D_{2.4}$).

Între acest grup și un grup de substituții de 4 elemente poate fi construit un izomorfism, cu ajutorul permutărilor pe care le putem da vîrfurilor patratului. Prin R patratul ajunge în poziția din fig. 4, prin R^2 în cea din fig. 5,

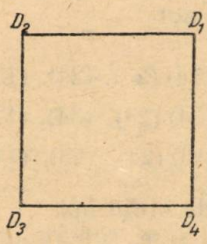


Fig 4

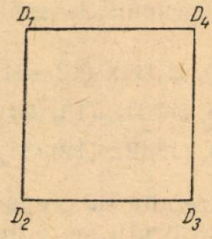


Fig. 5

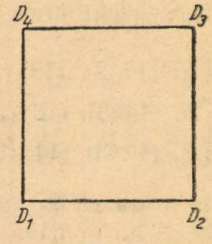


Fig. 6

prin R^3 în cea din fig. 6. Această înseamnă că lui R îi corespunde substituția $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} = (1432)$, deoarece vîrfului D_1 din fig. 3 îi corespunde D_4 din fig. 4, vîrfului $D_2 - D_1$, lui $D_3 - D_2$, lui $D_4 - D_3$.

Lui R^2 îi corespunde substituția $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = (1\ 3)\ (2\ 4)$; lui R^3 substituția $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)$, iar lui E substituția identică $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$.

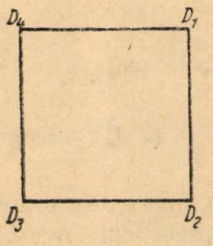


Fig. 7

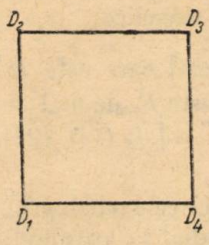


Fig. 8

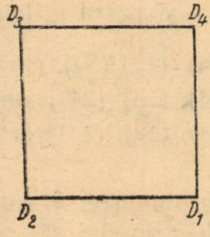


Fig. 9

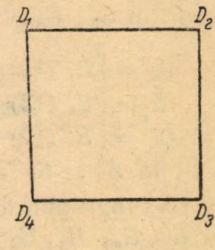


Fig. 10

Prin S patratul ajunge în poziția din fig. 7, prin T în aceia din fig. 8, prin U în aceia din fig. 9, prin V în aceia din fig. 10. Acestor simetrii le vor corespunde deci, substituțiile:

$$S\ldots \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} = (1\ 2)\ (3\ 4); \quad T\ldots \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = (1\ 4)\ (2\ 3);$$

$$U\ldots \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} = (24) \quad ; \quad V\ldots \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix} = (1\ 3).$$

Tabela de compunere de mai sus coincide cu rezultatele înmulțirii substituțiilor corespunzătoare, luate în ordine inversă. Izomorfismul este pe deplin stabilit.

Subgrupurile de ordinul patru ale lui G_8 sînt $F_1 = (E, R, R^2, R^3)$ ciclic; $F_2 = (E, R^2, S, T)$ și $F_3 = (E, R^2, U, V)$ neciclice. Aceste grupuri neciclice de ordinul patru sînt izomorfe cu grupul tridreptunghic din paragraful precedent.

Subgrupurile de ordin 2 ale lui G_8 sînt: $K_1 = (E, R^2)$; $K_2 = (E, S)$; $K_3 = (E, T)$; $K_4 = (E, U)$; $K_5 = (E, V)$.

Revenind la grupul rotațiilor cubului și pentru a determina toate subgrupurile sale de ordin opt căutăm subgrupurile conjugate cu grupul $G_8 = D_{2.4}$ de mai sus (care este subgrup în $\mathfrak{S}_4$, cuprinzînd doar substituții de 4 elemente). Se obțin astfel, următoarele subgrupuri de ordinul opt:

$$G_8' = [E, (1432), (13)(24), (1234), (12)(34), (14)(23), (24), (13)],$$
$$G_8'' = [E, (1423), (12)(34), (1324), (13)(24), (14)(23), (34), (12)],$$
$$G_8''' = [E, (1243), (14)(23), (1342), (12)(34), (13)(24), (23), (14)].$$

Se poate arăta că $\mathfrak{S}_4$ nu are alte subgrupuri de ordin opt.

Deoarece S nu conține substituții de ordinul șase, subgrupurile sale de ordin șase nu pot fi ciclice. Deci, $\mathfrak{S}_4$ nu poate avea decît subgrupuri de ordinul 6, izomorfe cu grupul diedric $D_{2.3}$. Există patru astfel de subgrupuri:

$$G_6 = [E, (123), (132), (12), (13), (23)],$$
$$G_6' = [E, (124), (142), (12), (14), (24)],$$
$$G_6'' = [E, (134), (143), (13), (14), (34)],$$
$$G_6''' = [E, (234), (243), (23), (24), (34)],$$

Ca subgrupuri de ordinul patru, $\mathfrak{S}_4$ conține trei grupuri ciclice generate de substituțiile (1234), (1324), (1243), adică tocmai subgrupurile ciclice de ordin patru din G_8, G_8', G_8'' — și patru grupuri neciclice:

$G_4 = [E, (13)(24), (12)(34), (14)(23)]$ care este H de la pag. 6,

$G_4' = [E, (13)(24), (13), (24)]$ care este F_3 de mai sus,

$G_4'' = [E, (12)(34), (12), (34)]$ și $G_4''' = [E, (14), (23), (14), (23)]$ analoage lui F_3 în G_8' și G_8''.

Ca subgrupuri de ordinul trei, $\mathfrak{S}_4$ conține cele patru grupuri ciclice de ordinul trei G_1, G_2, G_3, G_4 ale grupului $\mathfrak{A}_4$ studiat la paragraful precedent. Aceste grupuri sînt generate respectiv de substituțiile: (123), (124), (134), (234).

$\mathfrak{S}_4$ conține nouă subgrupuri de ordinul doi, generate de elemenele (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23).

Cititorul poate verifica simplu cele de mai sus, efectuînd rotațiile indicate și studiind permutarea corespunzătoare a diagonalelor pe orice cub.

Subgrupul de ordin 12 al grupului rotațiilor cubului transformă în el însuși fiecare din cele 2 tetraedre înscrise în cub ($A_1A_3A_6A_8$ și $A_2A_4A_5A_7$, fig. 2). Cititorul poate verifica această afirmație fie pe cub, fie alegînd substituțiile de mai sus, care aparțin și grupului altern de patru elemente din paragraful precedent.

Fiecare subgrup de ordin 8 (izomorf cu $D_{2.4}$) lasă invariantă cîte o axă a cubului și anume, B_1B_2, B_3B_4 respectiv B_5B_6. În felul acesta octaedrul $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ — o bipiramidă cu baza patrat, avînd ca axă de simetrie fiecare din cele trei axe — se transformă în el însuși.

Subgrupul de ordin șase G_6 este compus, în afară de transformarea identică, din rotațiile în jurul diagonalei A_4A_6, în jurul axei C_1C_2 și a încă două axe analoage (care trec prin mijlocul lui A_1A_2, respectiv A_2A_3). În mod asemănător cititorul poate alcătui subrupurile G_6', G_6'', G_6'''.

Subgrupurile ciclice de ordin patru sînt generate de rotația în jurul axei B_1B_2, B_3B_4 respectiv B_5B_6.

Subgrupul neciclic de ordin patru G_4 este format în afară de transformarea identică, de rotațiile binare în jurul axelor B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6, care sînt două cîte două perpendiculare. G_4 este deci un grup tridreptunghic. G_4 conține toate elementele comune grupurilor G_8, G_8', G_8'', formînd ceeace se numește *intersecția* acestor grupuri,

Celelalte subgrupuri neciclice de ordin patru: G_4', G_4'', G_4''' sînt deasemenea tridreptunghice. Cititorul le poate determina axele imediat.

Cele patru subgrupuri de ordinul trei sînt ciclice și generate de rotațiile în jurul diagonalelor A_1A_7, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6.

Subgrupurile de ordinul doi sînt generate de cele șase rotații în jurul axelor $C_1C_2, \ldots, C_{11}C_{12}$ și de cele trei rotații de cîte 180° în jurul axelor B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6.

4. Grupul rotațiilor octaedrului

Octaedrul (fig. 11) este o bipiramidă cu baza un patrat cu muchiile laterale egale cu laturile bazei.

Dacă circumscriem octaedrului un cub (așa ca fiecare vîrf al octaedrului să se afle în centrul unei fețe a cubului) sau dacă înscriem în octaedru un cub (așa ca vîrfurile acestuia să se afle în centrul fiecărei fețe a octaedrului) se verifică îndată că rotațiile care transformă cubul în el însuși au aceiași proprietate față de octaedru. Prin urmare grupul rotațiilor octaedrului regulat este izomorf cu grupul rotațiilor cubului.

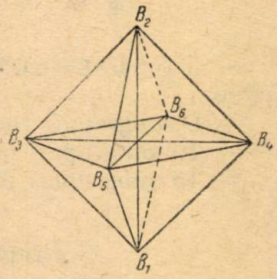


Fig. 11

5. Grupul rotațiilor icosaedrului

Icosaedrul este format din 20 triunghiuri echilaterale eare determină 30 de muchii (fig. 12). În fiecare din cele 12 vîrfuri ale icosaedrului se întîlnesc cîte 5 triunghiuri echilaterale.

Pentru a studia grupul rotațiilor icosaedrului procedăm asemănător cazurilor tetraedrului și cubului.

Rotațiile care lasă invariant vîrful A, în transformările icosaedrului în el însuși, sînt rotațiile R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 de unghiuri 0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ în jurul unei axe ce unește vîrful A cu vîrful opus L.

Există 11 transformări S_i, care aduc celelalte vîrfuri în vîrful A. Se pot forma astfel 60 de transformări.

La fel ca la grupul rotațiilor tetraedrului se poate arăta că aceste transformări sînt distincte și totodată singurele transformări admise de icosaedru.

Să găsim efectiv aceste transformări, în afara celei identice. Observăm că, în jurul fiecărei drepte care unește un vîrf cu cel opus, există cîte 4 rotații ne-

identice de ordinul cinci (deci, 24 în total). În jurul fiecărei axe care unește centrele a două fețe opuse există cîte 2 rotații neidentice de 120° și 240° (deci 20 rotații ternare în total). În jurul fiecărei axe care unește mijloacele a două muchii opuse există cîte o rotație neidentică de 180° (deci 15 rotații binare în total).

Grupul rotațiilor icosaedrului este izomorf cu grupul altern de 5 elemente $\mathcal{A}_5$, format din permutările celor cinci octaedre care sînt înscrise în icosaedru. Unul din aceste octaedre este determinat astfel: o axă unește mijloacele laturilor CG și EJ; a doua ale laturilor AD și KL, a treia ale laturilor BF și HI.

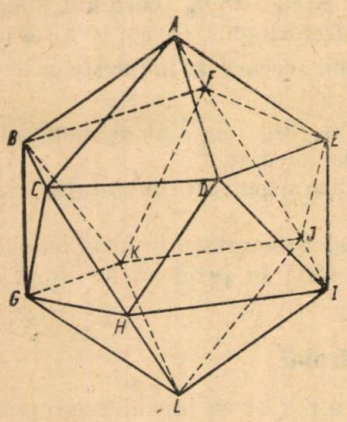


Fig. 12

La fel ca la cub, se poate stabili o corespondență între rotațiile admise de icosaedru și toate substituțiile pare de 5 elemente.

Se poate arăta că grupul rotațiilor icosaedrului are următoarea structură:

— 5 subgrupuri $\mathcal{A}_4$ (grupuri de ordinul 12, izomorfe cu grupul rotațiilor tetraedrului),

— 6 subgrupuri diedrice $D_{2\cdot 5}$ (grupuri de ordinul 10, izomorfe cu grupul rotațiilor și răsturnărilor bipiramidei regulate pentagonale),

— 10 grupuri diedrice $D_{2\cdot 3}$ (grupuri de ordinul 6 izomorfe cu grupul rotațiilor și simetriilor unui triunghi echilateral),

— 5 subgrupuri neciclice de ordin patru (izomorfe cu grupul tridreptunghic),

— 6 subgrupuri ciclice de ordin cinci,

— 10 subgrupuri ciclice de ordin trei,

— 15 subgrupuri ciclice de ordin doi.

6. Grupul rotațiilor dodecaedrului pentagonal

Dodecaedrul pentagonal (fig. 13) este al cincilea și ultimul poliedru regulat. El este format din 12 pentagoane regulate care determină 30 de muchii. În fiecare dintre cele 20 de vîrfuri ale dodecaedrului se întîlnesc cîte 3 pentagoane.

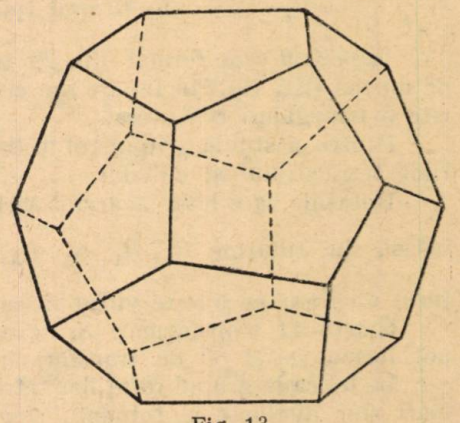


Fig. 13

Dacă circumscriem dodecaedrului un icosaedru (așa ca fiecare vîrf al dodecaedrului să se afle în centrul unei fețe a icosaedrului) sau dacă înscriem în dodecaedrul un icosaedru (așa ca vîrfurile acestuia să se afle în centrele fețelor dodecaedrului, se verifică ușor că rotațiile care transformă icosaedrul în el însuși, au aceiași proprietate și pentru dodecaedru. Prin urmare grupul rotațiilor dodecaedrului pentagonal este izomorf cu grupul rotațiilor icosaedrului.

Grupurile acestea ale rotațiilor poliedrelor regulate sînt importante pentru că dau exemple de grupuri de diferite ordine și ilustrează structura lor. De asemenea, aceste grupuri sînt importante pentru teoria ecuațiilor de grad superior. Avem totodată aci, reprezentarea unor grupuri abstracte într-un chip intuitiv, ceea ce permite studiul mai lesnicios al grupurilor $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$. $\mathcal{A}_5$.

ELECTRETUL ȘI APLICAȚIILE LUI TEHNICE

ANGELA NEGULESCU

PORNIND de la faptul că există magneți permanenți, cercetătorii și-au pus problema dacă nu există și corpuri care prezintă o electrizare permanentă, întocmai după cum magneții au magnetizare permanentă. Această problemă a determinat efectuarea unor cercetări pentru obținerea electreților, corpuri asemănătoare magneților. Fizicienii japonezi Sato și Eguci au realizat pentru prima oară electreții și au găsit totodată importante aplicații ale acestora în tehnică. Pentru a înțelege procesele care stau la baza producerii electreților, trebuie să reamintim proprietățile electrice ale dielectricilor.

1. POLARIZAREA DIELECTRICILOR

Din punct de vedere electric corpurile pot fi împărțite în trei categorii: conductori, dielectrici și semiconductori.

Se știe că metalele au structură cristalină; rețeaua lor spațială este formată din ioni, iar printre ioni se mișcă dezordonat electroni liberi. Electronii

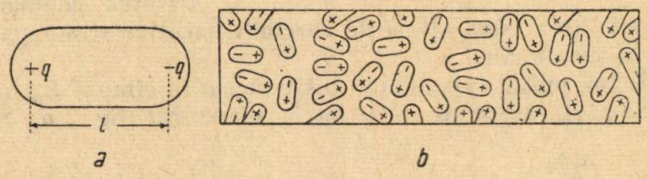


Fig. 1

sînt uniform repartizați în tot conductorul și sarcinile lor negative se echilibrează cu sarcinile pozitive ale ionilor, astfel încît conductorul se manifestă în exterior, ca un corp neutru.

Dielectricii amorfi sau cristalizați sînt de două feluri: apolari și polari. Cum se explică structura apolară? Fiecare atom sau moleculă posedă sarcini pozitive (nucleul) și sarcini negative (electronii). Cînd electronii sînt repartizați simetric în jurul nucleului, molecula este simetrică și centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. În acest caz molecula nu posedă poli electrici și se numește *apolară*. Așa se prezintă molecula de H_2, N_2, CH_4, CCl_4 etc. Asemenea substanțe nu manifestă acțiuni electrice în exterior; ele sînt neutre.

Există însă dielectrici ale căror molecule au o structura asimetrică, și anume, centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Molecula posedă așadar, doi poli electrici (fig. 1 *a*) și o numim *polară* sau mai simplu, *dipol* electric; ea posedă un moment *dipolar*, care se măsoară prin produsul dintre sarcina q a unui pol și distanța l dintre poli. Deci $m = q.l.$

Deoarece sarcina unui pol este de ordinul de mărime al sarcinii electronului $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ C.G.S.e.s., iar lungimea dipolului de ordinul de mărime al atomului $l = 10^{-8}$ cm, momentul dipolar este de ordinul de mărme $m = 10^{-18}$ C.G.S.e.s.

Pentru apă măsurătorile au arătat că $m = 1{,}85 \cdot 10^{-18}$ C.G.S.e.s., pentru acid cianhidric $m = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ C.G.S.e.s. etc.

În afară de apă şi acid cianhidric mai există şi alte corpuri cu molecula polară: aşa este acidul clorhidric, nitrobenzenul ş.a.

Atomii şi moleculele polare se află întotdeuna în mişcare termică şi de aceea au o orientare dezordonată în spaţiu (fig. 1 *b*). Corpul, avînd sarcinile echilibrate, este neutru, întocmai ca şi dielectricii apolari sau conductorii.

Să vedem ce se întîmplă cînd introducem dielectricii într-un cîmp electrostatic exterior? Dacă introducem între două plăci A şi B care generează un cîmp electrostatic exterior omogen E_0 (fig. 2*a*), un conductor, se produce fenomenul de inducţie electrostatică (influenţă electrică), datorită faptului că electronii liberi sînt atraşi către faţa pozitivă a plăcilor (fig. 2 *b*). În interiorul conductorului care se electrizează, liniile de forţă dispar, deoarece peste fiecare linie a cîmpului E_0 se suprapune o altă linie, dirijată dinspre sarcina pozitivă indusă pe faţa conductorului, către sarcina negativă indusă.

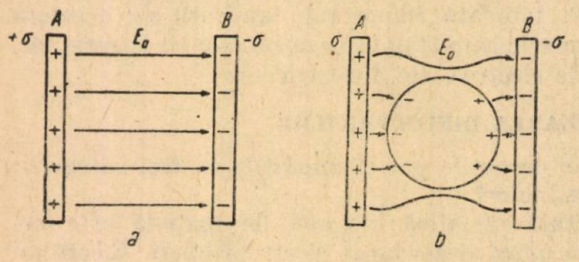


Fig. 2

Dacă suprimăm cîmpul exterior E_0 încetează şi electrizarea conductorului, deoarece electronii liberi sînt atraşi de sarcinile pozitive şi se repartizează din nou uniform în conductor.

Să modificăm puţin experienţa. Introducem în cîmpul E_0 un conductor format din două părţi, alăturate prin feţele plane NI (fig. 3 *a*). Separăm cele

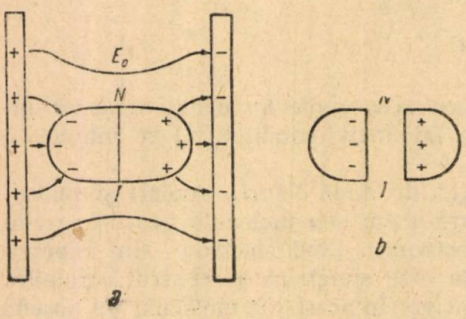


Fig. 3

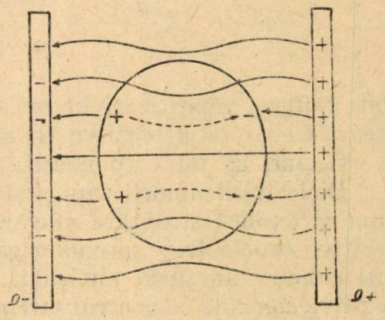


Fig. 4

două părţi şi le scoatem din cîmpul E_0: ele rămîn încărcate cu electricitate de semn contrar, deoarece electronii nu mai pot reveni în locurile din care au fost atraşi.

O parte din conductor rămîne cu exces de electroni, deci încărcată negativ, cealaltă cu deficit de electroni, deci încărcată pozitiv (fig. 3 *b*).

Să repetăm aceste două experienţe cu un dielectric, de exemplu cu sticlă. **În cîmpul electrostatic exterior E_0 (fig. 2 *a*) introducem o bucată de sticlă.** Feţele sticlei se electrizează, ca şi în cazul conductorului (fig. 4), însă sarcinile induse sînt mai mici decît cele de pe plăcile conductoare electrizate. Prin dielectric (sticlă) trec mai puţine linii de forţă decît prin vid, deoarece o parte din ele sînt anulate de liniile dintre sarcinile induse pe feţele dielectricului. Spre deosebire de conductori, cîmpul electric în dielectric este mai mic de ε ori decît în vid; numărul ε se numeşte permitivitate dielectrică.

Introducem în cîmpul E_0 dielectricul format din două părţi alăturate prin feţele plane NI (fig. 5 *a*). Separăm apoi cele două părţi şi le scoatem din cîmpul E_0; vom constata că ele sînt neutre (fig. 5 *b*), pe cînd conductorii erau electrizaţi cu electricitate de semn contrar (fig. 3 *b*). Cum se explică fenomenul? Sarcinile nu se pot deplasa liber prin dielectric, ci numai puţin în interiorul moleculei.

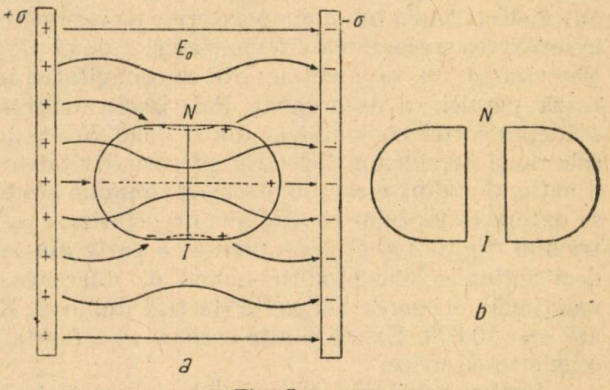


Fig. 5

Prin urmare, electrizarea dielectricului (fig. 4) nu se produce prin deplasarea unor electroni liberi, ca în cazul conductorilor, ci prin alt fenomem, numit polarizarea dielectricului. În ce constă acest fenomen? Dielectricul apolar are moleculele neutre; cînd îl introducem în cîmpul E_0 (fig. 6 *a*) sarcinile pozitive sînt atrase de placa de densitate electrică $-\sigma$, cele negative de placa de densitate electrică $+\sigma$ astfel încît centrul sarcinilor pozitive nu mai coincide cu centrul sarcinilor negative, între ele se crează o distanţă l mai mică decît diametrul atomului sau moleculei. Prin deplasarea sarcinilor în interiorul său atomul sau molecula devine dipol electric. Deoarece moleculele astfel polarizate sînt apropiate, sarcinile pozitive ale uneia neutralizează efectele sarcinilor negative ale moleculei vecine, aşa încît rămîn cu efect exterior numai sarcinile de pe feţele exterioare, dinspre capătul de intrare şi acela de ieşire al cîmpului exterior E_0. Lucrurile se petrec ca şi cum dielectricul s-ar fi electrizat prin influenţă, iar sarcinile produse prin polarizare pe feţele dielectricului σ_p şi $-\sigma_p$ sînt respectiv mai mici decît σ şi $-\sigma$, deoarece o parte din liniile cîmpului E_0 nu sînt compensate şi trec prin dielectric.

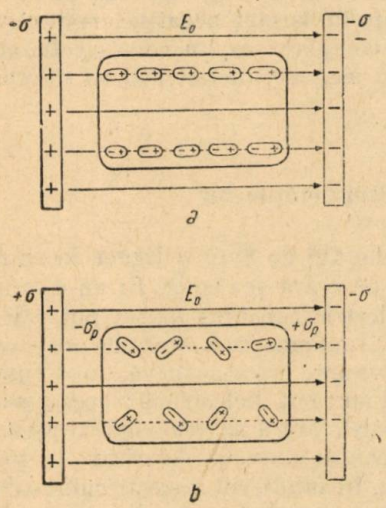


Fig. 6

Să analizăm acum cazul dielectricului polar, ale cărui molecule sînt dipoli orientaţi dezordonat (fig. 1 b), din care cauză nu se pot manifesta sarcinile

pozitive sau negative într-o parte sau alta a lui. Sub acțiunea cîmpului exterior E_0, în care am introdus dielectricul (fig. 6 *b*), dipolii săi moleculari se orientează în sensul liniilor cîmpului exterior.

Această orientare a sarcinilor de dipol sub acțiunea cîmpului electric exterior se numește polarizare dielectrică. Sarcinile de polarizare σ_p și $-\sigma_p$ apărute pe fețele opuse ale dielectricului sînt cu atît mai mari cu cît este mai mare E_0. Dipolii nu sînt orientați absolut paralel cu liniile cîmpului exterior, deoarece agitația termică dezordonată se opune orientării dipolilor. Trebuie remarcat faptul că la suprimarea cîmpului exterior E_0, dispare polarizarea dielectricului, adică electrizarea lui în cîmp exterior nu este permanentă. Înțelegem acum dece la separarea și scoaterea din cîmp a celor două părți ale dielectricului (fig. 5 *a* și *b*) electrizarea nu se menține: din cauza agitației termice dipolii nu se mai orientează paralel, ci dezordonat. Polarizarea dielectrică este cauza care determină scăderea forței coulombiene dintre două sarcini de ε ori, cînd introducem între cele două sarcini un dielectric cu permitivitatea ε. Această micșorare de ε ori a acțiunilor dintre sarcini, deci și a cîmpului electric din interiorul dielectricului, se datorește faptului că sarcinile de polarizare σ_p introduse pe suprafața dielectricului (fig. 6 *a* și *b*) neutralizează o parte din sarcinile generatoare de cîmp σ, deci acțiunile sînt produse numai de diferența de sarcină $\sigma - \sigma_p$. Trebuie să menționăm că sarea Seignette (tartrat dublu de K și Na) între $-20°C$ și $+25°C$ are $\varepsilon = 10\,000$. Există și alte corpuri cu ε foarte mari; ele se numesc substanțe seignetto-electrice.

Pentru problema care ne interesează trebuie să reținem faptul că substanțele lichide au ε mai mare decît cele solide, deoarece orientarea dipolilor în cîmp electric exterior este mai ușoară la lichide decît la solide. Urmează să găsim metoda de « înghețare » a dipolilor orientați în cîmp exterior, pentru ca polarizarea dielectricului să se mențină și după scoaterea lui din cîmpul exterior.

În felul acesta capetele dielectricului prin care au intrat, respectiv au ieșit liniile de forță ale cîmpului exterior vor manifesta sarcini negative, respectiv pozitive permanente, deci dielectriculul se va comporta ca un corp electrizat permanent, posedînd doi poli electrici, ca și un magnet: dielectricul va deveni un *electret*.

2. Cum se obțin electreții? Proprietățile lor

Metoda de obținere a electreților a fost elaborată de Sato și Eguci, în anul 1922. Dielectricul folosit de ei era un amestec de ceară și rășină. Ei au așezat acest amestec, în stare topită, într-un cîmp electric constant foarte puternic. Moleculele dipolare ale dielectricului astfel așezat s-au polarizat, sarcinile pozitive orientîndu-se spre placa negativă, iar cele negative spre placa pozitivă, după cum se vede în fig. 6 *b*. Menținînd cîmpul electric, ei au răcit dielectricul; acesta s-a solidificat, moleculele lui rămînînd orientate paralel, fără a se mai putea așeza dezordonat. Cu alte cuvinte, dielectricul a rămas în stare de polarizare în tot volumul său. După cum am arătat mai înainte, în interiorul dielectricului sarcinile pozitive se neutralizează cu cele negative alăturate; cu efect exterior rămîn numai sarcinile de la capetele dielectricului, care se comportă deci ca un electret avînd la capete doi poli încărcați cu electricitate de semn contrar, asemenea unui magnet permanent.

Analogia dintre electret și magnetul permanent merge și mai departe. Se știe că în procesul de magnetizare și demagnetizare a unei substanțe fero-

magnetice, inducţia magnetică B variază în funcţie de intensitatea cîmpului magnetic exterior H, după o curbă închisă numită *histerezis* (fig. 7). Cînd cîmpul exterior H creşte de la O la H_1, apoi scade la O şi creşte în sens opus pînă la H_2 etc., inducţia magnetică a susbstanţei supuse magnetizării creşte de la O pînă la B_1, apoi scade la valoarea OC (nu se anulează), îşi schimbă sensul magnetizării şi creşte pînă la valoarea B_2 etc. Se observă că pentru a anula complet magnetizarea ($B=OC$), trebuie să aplicăm un cîmp magnetic exterior OD opus. Mărimea acestui cîmp opus măsoară magnetismul permanent al substanţei. Aria descrisă de curba histerezis măsoară energia consumată pentru magnetizare. Fizicianul sovietic I. V. Curciatov a demonstrat experimental (1933) că şi la polarizarea dielectricilor se constată o curbă histerezis. Curciatov a lucrat cu cristale de sare Seignette.

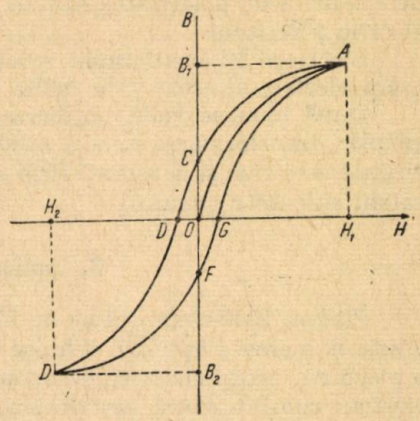


Fig. 7

Cercetătorii menţionaţi au folosit amestecul de ceară şi răşină, deoarece dielectricii formaţi se topesc uşor. În ultimii ani se folosesc alţi dielectrici: sulful topit, anumite varietăţi de sticlă şi de ceramică cu permitivitate dielectrică mare. Foarte mult folosit este metatitanatul de bariu care devine electret într-un cîmp electric cu intensitate cuprinsă între 12 kV/cm şi 20 kV/cm. Electreţi puternici se obţin numai dacă masa dielectricului este în întregime lichidă în momentul polarizării, adică în momentul cînd este aşezată în cîmpul electric; putem obţine electreţi şi la temperatură normală, cînd nu toată masa materialului este topită; electreţii obţinuţi astfel sînt însă foarte slabi şi nestabili.

Calitatea electreţilor depinde şi de natura electrozilor folosiţi la producerea cîmpului. Cei mai buni electrozi sînt foiţele de cositor, care au însuşirea de a se desprinde uşor de pe suprafaţa dielectricului răcit.

Intensitatea cîmpului electric în care se produce polarizarea are mare importanţă în obţinerea unui electret de calitate superioară. Mărimea sarcinii obţinute la polii electreţilor este proporţională cu intensitatea cîmpului polarizant. Nu trebuie însă depăşită o anumită limită, deoarece dacă intensitatea cîmpului creşte peste această limită, se produce ionizarea moleculelor aerului şi începe descărcarea polilor electretului realizat. De aceea şi densitatea electrică la polii electretului are o valoare limită: ea nu trebuie să depăşească 3. 10^{-5} C/m^2 la presiune normală, în condiţii obişnuite de temperatură.

Sarcina electreţilor creşte la presiuni mai mari.

Au fost găsite şi alte analogii cu magneţii permanenţi. Astfel, dacă se taie un electret pe linia neutră, se obţin doi electreţi, fiecare cu cîte doi poli electrici. Dacă răzuim un strat de pe toată faţa electretului, proprietăţile lui nu se schimbă, ceea ce dovedeşte că nu avem a face cu o electrizare superficială, ci cu polarizarea lui în volum.

Sarcina electrică a polilor electretului se păstrează constantă, dacă polii lui se menţin scurtcircuitaţi printr-un conductor.

S-a constatat că electrizarea cît şi dezelectrizarea unui electret nu este un proces continuu, ci se produce prin salturi, corespunzătoare orientării, res-

pectiv dezorientării, dipolilor moleculari. La topire proprietățile electretului dispar, deoarece agitația termică strică orientarea în același sens a cristalelor, determinată de polarizarea inițială a dielectricului cînd a fost așezat în cîmpul electric polarizant.

Electreții își pierd rapid sarcina electrică, cînd sînt supuși acțiunii unui cîmp electric alternativ de înaltă frecvență sau a unui cîmp ultrasonor.

După cum se vede, obținerea unui electret este, în principiu, o operație simplă: transformarea în fază solidă a unui dielectric topit, așezat într-un cîmp electric puternic și constant. Prin solidificare moleculele dielectricului polarizat rămîn orientate paralel.

3. Aplicațiile electreților

Pînă în 1940 electreții nu au fost folosiți în practică. De atunci însă au fost găsite numeroase aplicații tehnice ale lor. Dacă ne gîndim că un electret este o placă cu sarcini electrice permanente, care poate deci crea tensiuni și cîmpuri electrice constante fără necesitatea de a fi întreținute, ne dăm seama de importanța lui în aplicațiile care implică tensiunile eletrice constante.

În primul rînd electreții au fost utilizați în tehnica măsurătorilor electrice. S-au construit voltmetre cu coardă, electrometre de curent alternativ, precum și alte aparate electrice de măsurat. În aceste aparate se suspendă un electret în formă de placă între doi electrozi metalici, puși la potențialul de măsurat. Un astfel de aparat seamănă cu un galvanometru cu oglindă, electretul înlocuind bobina mobilă. Voltmetrul cu coardă are un fir metalic, pus la potențialul de măsurat și suspendat între două plăci electret, așezate paralel și cu sarcinile opuse, una în fața celeilalte.

În 1948 s-a aflat că în Japonia au fost folosite în timpul celui de al doilea război mondial microfoane cu condensator electretic, fără surse de tensiune. Membrana unui astfel de microfon oscila sub acțiunea sunetelor, deasupra unui electret plan, așezat paralel cu membrana. Pentru o vorbire de intensitate obișnuită microfonul cu condensator de electret, fără sursă de alimentare, dă un curent microfonic de două ori mai puternic decît acela produs de microfonul modern, cu cărbune și sursă de alimentare. Prin urmare, în afară de domeniul măsurătorilor electrice, electreții sînt utilizați în domeniul telecomunicațiilor, deoarece microfonul electretic este un transformator reversibil, deci poate servi drept telefon. În viitor el va fi folosit la aparatele telefonice fără surse de alimentare, precum și la aparatele de radio, acolo unde poblema tensiunilor necesare se rezolvă cu dificultăți, de exemplu acolo, unde nu există rețea electrică.

Electronica va fi un alt domeniu de utilizare a electreților. Aceștia vor putea fi întrebuințați în tuburile electronice și la reglarea fasciculelor de electroni, datorită cîmpurilor electrice pe care le produc.

Este greu să prevedem de pe acum toate domeniile de utilizare ale electreților, dar este sigur că ei vor găsi aplicații și în electrotehnică după ce vor fi mai bine studiați și se vor putea construi electreți din materiale cu mare stabilitate termică și electrică.

NOTE MATEMATICE

1. Asupra problemei 1301

În nota din G.M.F. (B) nr. 2, anul VI, pag. 74—75, s-a generalizat problema 1301 în cazul cînd punctul O este situat pe mediana AD. Problema se poate generaliza mai departe cînd AD este o dreaptă oarecare între AB și AC.

1. *Dacă D este un punct pe latura BC a unui trunghi ABC, iar M, O, N sînt intersecțiile unei drepte oarecare cu AB, AD, AC (fig. 1), atunci are loc relația:*

$$BD \cdot \frac{CA}{NA} + DC \cdot \frac{BA}{MA} = BC \cdot \frac{DA}{OA}.$$

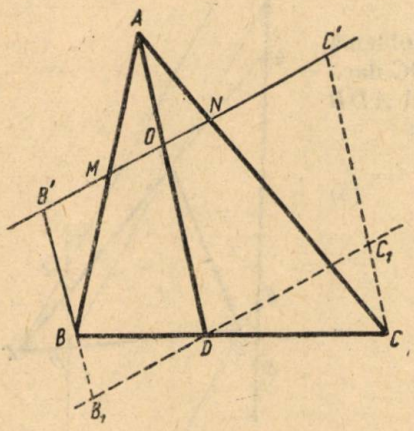


Fig. 1

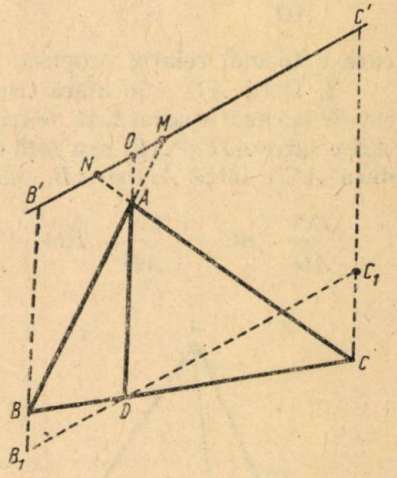


Fig. 2

Soluția. — În adevăr, dacă B' și C' sînt intersecțiile paralelelor din B și C la AD cu dreapta MON, iar B_1 și C_1 intersecțiile acelorași paralele cu paralela în D la MON, atunci din asemănarea triunghiurilor BDB_1, CDC_1 rezultă, ținînd seamă că $BB_1 = B_1B' - BB' = DO - BB'$ și $CC_1 = CC' - C_1C' = CC' - DO$,

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BD}{DC} \text{ sau } \frac{DO - BB'}{CC' - DO} = \frac{BD}{DC},$$

de unde:

$$DO \cdot DC - BB' \cdot DC = CC' \cdot BD - DO \cdot BD,$$

$$DO\,(BD + DC) = CC' \cdot BD + BB' \cdot DC$$

și cum $BD + DC = BC$, rezultă

$$DO \cdot BC = CC' \cdot BD + BB' \cdot DC$$

sau împărțind cu AO avem:

$$\frac{DO}{AO} \cdot BC = \frac{CC'}{AO} \cdot BD + \frac{BB'}{AO} \cdot DC$$

şi cum:

$$\frac{CC'}{AO} = \frac{CN}{AN}\ ;\ \frac{BB'}{AO} = \frac{BM}{AM},$$

rezultă:

$$\frac{DO}{AO} \cdot BC = \frac{CN}{AN} \cdot BD + \frac{BM}{AM} \cdot DC. \qquad (1)$$

Adunînd ultima relaţie cu relaţia:

$$BC = BD + DC,$$

rezultă:

$$\frac{DA}{AO} \cdot BC = \frac{CA}{AN} \cdot BD + \frac{BA}{AM} \cdot DC, \qquad (2)$$

care e tocmai relaţia propusă.

2. Dacă AD e în afară triunghiului problema revine la cazul studiat faţă de triunghiul ADC dacă AB e între AD şi AC, sau faţă de triunghiul ADB dacă AC e între AD şi AB, relaţia devine:

$$\frac{DA}{AO} \cdot BC = \left| \frac{CA}{AN} \cdot BD - \frac{BA}{AM} \cdot DC \right|. \qquad (3)$$

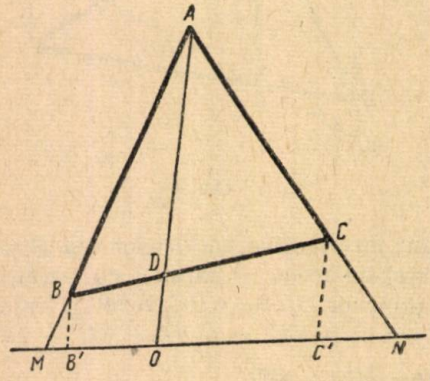


Fig. 3

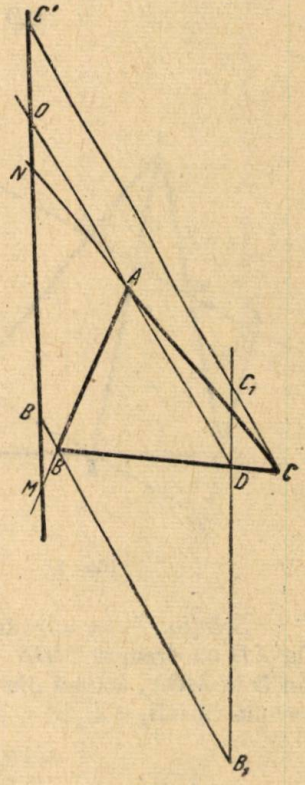


Fig. 4

3. Reluînd cazul cînd D este între B şi C, punctele M, O, N pot fi pe prelungirile segmentelor AB, AD, AC în spre A sau în spre BC (fig. 2, 3,). În aceste cazuri se verifică uşor relaţia (1), deci şi relaţia (2) este adevărată. Relaţia rămîne deasemenea adevărată, dacă unul din punctele M şi N e pe prelungirile laturilor AB, AC unul de partea lui A şi celălalt pe partea lui BC, ca în cazul fig. 4.

4. Dacă D este situat între B şi C, iar M e pe prelungirea lui AB şi N pe AC problema corespunde relaţiei (3), căci $\frac{BD}{DC} = \frac{BB' + DO}{CC' - DO}$. Pe lîngă aceasta, relaţiei (3) îi corespund şi cazurile figurilor 5 şi 6.

5. Problema admite şi o reciprocă. Vom studia cazul figurii nr. 1, restul cazurilor fiind analoage sau se demonstrează analog.

Dacă există relaţia (2) punctele M, O, N sînt colineare. În adevăr, presupunînd că M, O, N nu sînt colineare, dreapta MN taie pe AD în O'. Punctele M, O', N dau însă:

$$\frac{DA}{AO'} \cdot BC = \frac{CA}{AN} \cdot BD + \frac{BA}{AM} \cdot DC$$

şi comparînd cu (2) obţinem:

$$AO = AO',$$

ceeace arată că O şi O' se confundă. Deci reciproca este adevărată: punctele M, O, N sînt colineare.

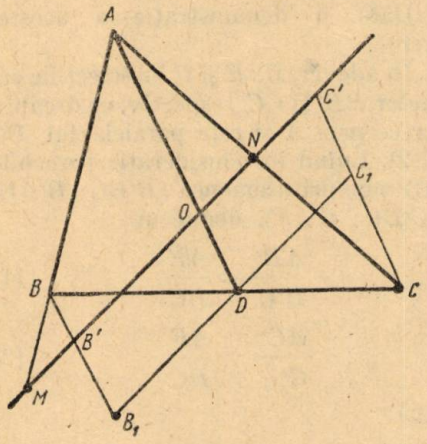


Fig. 5

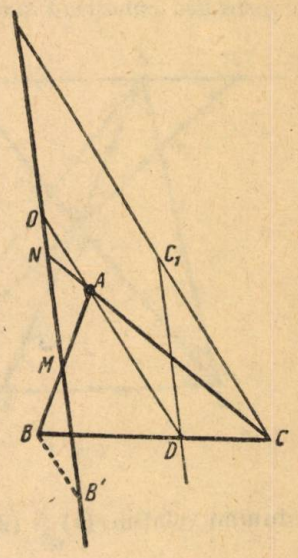


Fig. 6

6. *Cazuri particulare.* — *a*) Dacă triunghiul ABC ecte echilateral, avem $AB = BC = CA$, iar relaţia (2) devine:

$$\frac{BD}{NA} + \frac{DC}{MA} = \frac{AD}{OA}, \tag{4}$$

iar în cazul cînd O este şi centrul triunghiului echilateral, avem

$$BD = DC = \frac{BC}{2} \text{ şi } \frac{AD}{OA} = \frac{3}{2} \text{ încît în (4) avem:}$$

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{3}{BC}.$$

b) Dacă AD este mediană în triunghiul ABC obţinem generalizarea din nota din G.M.F. (B), nr. 2, anul VI, pag. 74—75:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 2 \cdot \frac{AD}{AO},$$

iar dacă $O = G$ este centrul de greutate, se obține chiar problema 1301.

căci:
$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3,$$
$$\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}.$$

Cristea I. Ion, student, București.

2. O demonstrație a unei teoreme

Fie ABC un triunghi, iar AA' BB', CC' trei ceviene concurente în O. Există proprietatea cunoscută sub numele de «relația lui Van Aubel»

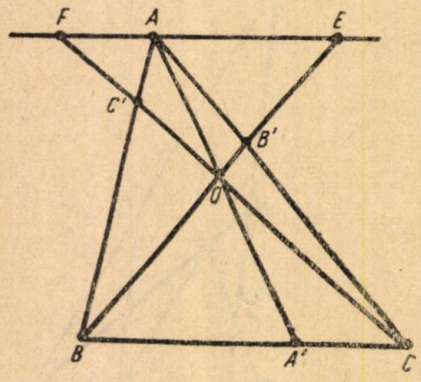


Fig. 1

$$\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{AO}{OA'}.$$

Dăm o demonstrație a acestei teoreme.

În adevăr, fie E și F intersecțiile cevienelor BB' și CC' respectiv, cu dreapta ce trece prin A și este paralelă lui BC (fig. 2). Luînd în considerație perechile de triunghiuri asemenea ($B'BC$; $B'AE$) și ($C'BC$; $C'AF$), deducem

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AE}{BC} \qquad (1)$$

și
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AF}{BC}. \qquad (2)$$

Adunînd relațiile (1) și (2) și ținînd seama că:
$$\frac{EF}{BC} = \frac{EO}{OB} = \frac{AO}{OA'},$$

avem succesiv
$$\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{AE + AF}{BC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AO}{OA'}.$$

Mihail I. Popescu, student, București.

PENTRU CUNOAȘTEREA ENERGIEI ATOMICE

ENERGIA DE LEGĂTURĂ A NUCLEULUI ȘI DEFECTUL DE MASĂ

VIRGIL ATANASIU

ÎNAINTE de a vorbi despre energia de legătură a nucleului, este bine, pentru o mai bună înțelegere, să facem o analogie:

Se știe din chimie că, la formarea apei din hidrogen și oxigen are loc o degajare de căldură. Această căldură care însoțește reacția chimică de combinare

între doi atomi de hidrogen şi un atom de oxigen pentru formarea unei molecule de apă, este numită şi energie de legătură a moleculei; energia de legătură a moleculei caracterizează forţa care uneşte atomii din moleculă. Reacţiile chimice însoţite de degajare de căldură se numesc reacţii exotermice.

La formarea unei molecule-gram de apă (18 g) se degajă 70 kcal. În reacţiile exotermice întîlnite în chimie, căldura degajată, sau cum i se mai spune, energia de legătură a moleculei, este de ordinul cîtorva zeci de kilocalorii; cu cît este mai mare energia de legătură a moleculei, adică cu cît se degajă mai multă căldură la formarea moleculei, cu atît atomii sînt legaţi mai puternic între ei, deci cu atît molecula este mai stabilă, mai greu de desfăcut în părţile ei componente.

Tot aşa, după cum la formarea moleculei avem de-a face cu o energie de legătură, şi la formarea nucleului atomic se poate vorbi despre o *energie de legătură* privind particulele elementare care intră în alcătuirea nucleului: protoni şi neutroni. Spre deosebire însă de energia de legătură a moleculei a cărei valoare, după cum s-a arătat, este de ordinul zecilor de kcal, energia de legătură a nucleului este de ordinul milioanelor de kcal. Aceasta înseamnă că nucleele atomice sînt edificii cu mult mai stabile decît moleculele, adică sînt cu mult mai greu de desfăcut în părţile componente. Marea lor stabilitate este confirmată şi de faptul că prin analiză spectrală s-au putut determina elementele care intră în alcătuirea atmosferelor stelare; se ştie însă, că în atmosferele stelare domnesc temperaturi de zeci de mii de grade, temperaturi la care atomii îşi păstrează totuşi individualitatea.

Ce este această energie de legătură a nucleului? Prin energia de legătură a unei particule din nucleu se înţelege lucrul mecanic necesar pentru a extrage acea particulă din nucleu, fără a-i comunica prin aceasta o energie cinetică, adică lucrul mecanic necesar numai pentru a anula legătura dintre particulă şi nucleu. Energia totală de legătură a nucleului este evident că va fi egală cu lucrul mecanic necesar pentru desfacerea nucleului în particulele sale componente, adică este energia care trebuie consumată pentru a elibera din nucleu toţi protonii şi neutronii conţinuţi în el.

Conform legii conservării energiei, la unirea protonilor şi neutronilor în scopul reconstituirii nucleului, se va pune în libertate, adică se va degaja aceeaşi cantitate de energie, care este necesară pentru desfacerea nucleului în protonii şi neutronii conţinuţi în el. De aci rezultă că, energia de legătură a nucleului poate fi exprimată şi prin cantitatea de energie degajată la formarea nucleului respectiv din particulele elementare care îl compun. De subliniat că pentru apropierea protonilor în scopul formării unui nucleu, urmează să fie învinsă respingerea dintre ei; din acest motiv este necesar un consum de energie destul de mare. De îndată însă ce protonii s-au apropiat suficient (distanţe de ordinul 10^{-13} cm), ei încep să se atragă unul spre celălalt, deoarece în aceste condiţii intră în acţiune forţele nucleare, care sînt cu mult mai puternice decît forţele electrice de respingere. Protonii continuînd să se apropie, are loc o degajare de energie cu mult mai mare decît energia care s-a consumat mai înainte. Astfel, pentru formarea unui gram de hidrogen greu s-ar putea obţine aceiaşi cantitate de căldură ca prin arderea a 2750 kg de cărbune de cea mai bună calitate, sau pentru formarea unui gram de heliu, o cantitate de căldură echivalentă arderii a 20 tone cărbune.

Prin ce se măsoară energia de legătură a nucleului?

Măsurători precise au arătat că masa nucleelor este totdeauna mai mică decît suma maselor particulelor din care s-a format. Astfel, nucleul de He

cu număr atomic $Z = 2$ și număr de masă $A = 4$, deci un nucleu cu doi protoni și doi neutroni, adică un nucleu cu patru nucleoni, ar trebui să aibă masa de patru ori mai mare decît a unui singur nucleon, adică ar trebui să aibă masa egală cu $4 \cdot 1{,}008123 = 4{,}03249$. Se constată însă, că masa nucleului de He este 4,00390, deci este mai mică cu 0,02859.

Nucleul de ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$, deci un nucleu alcătuit din patru protoni și cinci neutroni, adică din 9 nucleoni, ar trebui să aibă masa corespunzătoare numărului de nucleoni, adică 9,07713. Se constată însă, că masa este în realitate de 9,01503, deci este mai mică cu 0,06210. Constatări de acest fel avem și pentru celelalte nuclee. Fiecare nucleu este deci caracterizat printr-o lipsă de masă, un *defect de masă*, cum se spune. Astfel, dacă m este masa nucleului format din Z protoni de masă m_p și $A-Z$ neutroni de masă m_n, defectul de masă Δm este egal cu diferența dintre suma maselor particulelor și masa nucleului

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)\, m_n - m.$$

Conform teoriei relativității energia nu este independentă de masă. Între energie și masă există relația lui Einstein

$$W = mc^2,$$

Deci, conform acestei teorii, defectul de masă caracterizează energia eliberată la formarea unui nucleu din protoni și neutroni, adică energia de legătură a nucleului.

Care este variația de energie corespunzătoare unei variații de masă egală cu o unitate de masă atomică? Unei unități de masă atomică în scara fizică ${}^{16}\mathrm{O}$ (izotopul cel mai răspîndit al oxigenului), îi corespunde o masă egală cu $1{,}662 \cdot 10^{-24}$ g. Dacă masa variază cu o unitate de masă atomică, atunci variația de energie corespunzătoare, conform teoriei relativității este

$$\Delta W = \Delta mc^2 = 1{,}662 \cdot 10^{-24} \cdot 8{,}99 \cdot 10^{20} = 1{,}49 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{erg},$$

iar în electron-volți, ținînd seama de faptul că

$$1e\,\mathrm{V} = 1{,}602 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{erg},$$

avem

$$\Delta W = \frac{1{,}49 \cdot 10^{-3}}{1{,}602 \cdot 10^{-12}} = 931\,\mathrm{MeV},$$

deoarece $10^6\,\mathrm{eV} = 1\,\mathrm{MeV}$.

Pentru o particulă elementară din compoziția unui nucleu, defectul de masă reprezintă pentru majoritatea nucleelor aproximativ 0,009 din unitatea de masă atomică, adică aproximativ 8,5 MeV. Comparînd această valoare cu energiile degajate în reacțiile chimice care sînt de 2—3 eV pentru aceeași cantitate de masă, vedem că la formarea nucleelor din particulele elementare se degajă energii de milioane de ori mai mari decît în reacțiile chimice.

Cunoscîndu-se defectul de masă și folosind relația lui Einstein se poate determina deci, mărimea energiei corespunzătoare acestei mase. În felul acesta savanții au putut să măsoare energiile de legătură ale tuturor nucleelor cunoscute astăzi și bazați pe cunoașterea energiei de legătură a diferitelor nuclee, au putut afla care din ele se pretează mai ușor la obținerea energiei atomice.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Dilatarea apei.** Se ia un ou crud şi printr-o găurică practicată în coaja lui, se scoate întreg conţinutul (albuş şi gălbenuş). Se închide apoi găurica cu ceară fixînd totodată un fir de aţă de care se atîrnă o mică greutate. Se cufundă oul într-un borcan cu apă la temperatura camerii potrivind astfel greutatea, încît ea să se afle aproape de fundul borcanului (fig. 1), atingîndu-l puţin. Se duce borcanul afară, la ger, după cîtva timp, oul cu greutatea se ridică la suprafaţa apei. El nu va pluti însă mult timp la suprafaţă, ci va coborî în poziţia iniţială. Cînd se întîmplă acest lucru se duce borcanul înapoi în cameră: oul va repeta drumul. Întîi se va ridica la suprafaţă, apoi va coborî spre fund.

Fig. 1

Cum se explică acest lucru?

Mişcarea oului în borcan se explică datorită unei anumite proprietăţi a apei: la 4°C apa are cea mai mare densitate. Cînd se duce la ger borcanul, temperatura apei din el scade şi densitatea creşte pînă cînd temperatura ei ajunge la 4°C; datorită acestui fapt oul cu greutatea se ridică la suprafaţa apei. Apoi temperatura apei din borcan scade şi mai mult, densitatea ei se micşorează şi oul se lasă la fundul borcanului. Cînd se duce borcanul de afară în casă, temperatura apei din borcan începe să crească, densitatea creşte de asemenea şi oul se ridică la suprafaţa apei. Cînd temperatura apei a depăşit 4°C densitatea scade şi oul coboară din nou la fundul borcanului.

2. **Tensiunea superficială.** Se confecţionează din sîrmă o ramă cu mîner (fig. 2 *a*), iar dintr-un fir de aţă un mic laţ. Se prepară o soluţie de săpun cu puţină glicerină şi se cufundă în ea rama de sîrmă ţinînd-o de

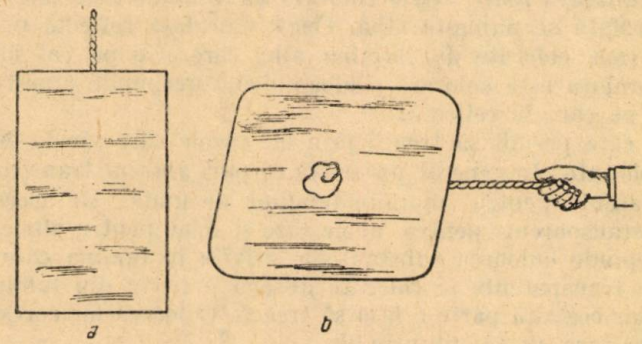


Fig. 2

mîner. După ce rama este scoasă din soluţie se observă că s-a format pe ea o membrană foarte subţire de soluţie. Se pune încet în mijlocul acesteia laţul din aţă înmuiat de asemenea în soluţie: el va lua o formă neregulată (fig. 2 b). Se străpunge membrana de săpun în mijlocul laţului cu ajutorul unei sîrme înfierbîntate. Imediat membrana de săpun din laţ va dispare, iar acesta va lua forma de cerc (fig. 3).

Orice element rectiliniu *ab* considerat pe această suprafață, este în echilibru sub acțiunea a două forțe F și F', egale și opuse (fig. 4) a căror intensitate este proporțională cu lungimea *ab*. Suprimînd membrana de lichid în interiorul lațului se suprimă forțele F și atunci forțele F' întind uniform lațul.

Forma circulară nu poate fi explicată decît admițînd că forța la care este supus un element de lungime este perpendiculară pe acest element. Raportul $T = \frac{F}{l}$ este constant pentru suprafața de separație a unui același lichid cu mediul ambiant, la temperatură constantă. El se numește tensiune superficială a lichidului. Experiența descrisă ne dovedește că membrana de săpun are o anumită tensiune superficială.

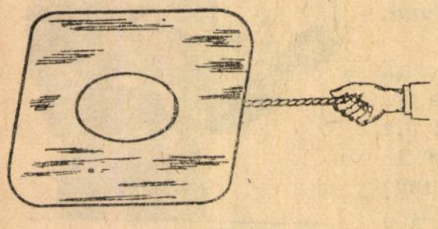


Fig. 3

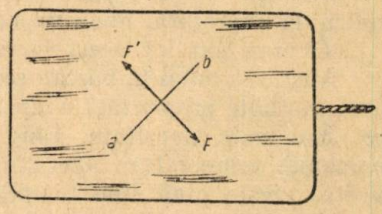


Fig. 4

3. **Transparența corpurilor.** Se scrie pe o foaie de hîrtie albă un cuvînt cu un creion albastru. Se șterge apoi cu un creion roșu cuvîntul scris, astfel încît să nu se mai vadă de loc. Privind locul șters printr-o bucată de geam roșu se constată că se poate vedea clar cuvîntul scris cu creion albastru. Cum se explică acest fenomen?

Razele de orice fel care cad pe suprafața corpurilor sînt reflectate în parte, iar restul pătrund în interiorul corpurilor. Dacă suprafața prezintă asperități și difuzează toate razele colorate ale luminii albe care cad pe ea, o asemenea suprafață se numește albă. Dacă suprafața reflectă numai o parte din diferitele raze colorate din lumina albă care cad pe ea, iar restul sînt absorbite, suprafața este colorată. Culoarea ei corespunde amestecului acelor raze colorate pe care le reflectă.

Corpurile care permit să treacă prin ele razele care vin la ele se numesc corpuri transparente. In general nu există corpuri absolut transparente; există numai transparență pentru anumite lungimi de undă. De aceea un același corp poate fi transparent pentru unele raze și opac pentru altele. De această proprietate depinde culoarea substanțelor privite în lumina care le străbate. Deci corpurile transparente și colorate absorb o parte din lumina albă care cade pe ele, iar cealaltă parte o lasă să treacă. Culoarea lor corespunde amestecului de raze care au trecut prin ele.

De la hîrtia pe care s-a scris se reflectă raze de culoare roșie și albastră. Razele roșii trec ușor prin geamul roșu și de aceea ștersătura cu creionul roșu pe fondul alb al hîrtiei dispare. Razele albastre sînt reținute de geamul roșu și cuvîntul scris se va vedea clar.

4. **Difuziunea.** Se ia o sticlă goală, se așează pe masă și pe gura ei se pune un chibrit frînt la mijloc, iar deasupra acestuia, o monedă mică (fig. 5). Se poate face ca moneda să cadă pe fundul sticlei fără a atinge sticla și chibritul?

Pentru aceasta se ia o pipetă cu apă şi se lasă să cadă 2—3 picături pe locul în care a fost frînt chibritul. Capetele chibritului vor începe curînd să se depărteze şi moneda va cădea pe fundul sticlei.

Ce proprietate a apei stă la baza acestei experienţe?

Lemnul chibritului este foarte uscat. Aceasta înseamnă că celulele sale au pierdut prin evaporare, o mare cantitate de apă, sucul celular devenind foarte concentrat. In contact cu apa, prin peretele celular are loc fenomenul de difuzie, datorită cărui fapt celulele îşi măresc volumul. Acest fenomen se întîmplă la locul de frîngere al chibritului cu celulele rămase întregi. In consecinţă se produce o umflare a lemnului, ceea ce determină desdoirea băţului de chibrit, adică îndreptarea lui şi astfel moneda neavînd pe ce să se sprijine, cade.

Fig. 5

5. **Vîrtejurile.** Se aşează pe o masă o sticlă, iar în spatele ei la distanţa de 12—15 cm, o lumînare aprinsă. Dacă se suflă de la distanţa de 20—25 cm asupra sticlei (fig. 6) se constată că lumînarea se va stinge imediat. Deducem din această experienţă că sticla nu constitue un obstacol pentru curentul de aer?

Cînd un corp înaintează într-un fluid sau, ceea ce este tot una, cînd un curent al unui fluid loveşte corpul, fluidul în mişcare nu-şi mai menţine o curgere laminară, adică o deplasare paralelă a straturilor, ci se produce o scurgere a acestuia în jurul corpului, dînd astfel naştere la aşa numita curgere turbulentă, caracterizată prin apariţia unor vîrtejuri în interiorul fluidului.

În cazul experienţei arătate, fluidul este aerul. În spatele sticlei se formează o regiune de vîrtejuri care produc stingerea flăcării.

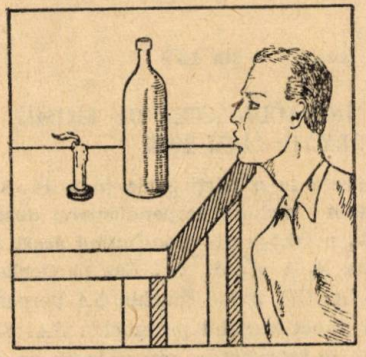


Fig. 6

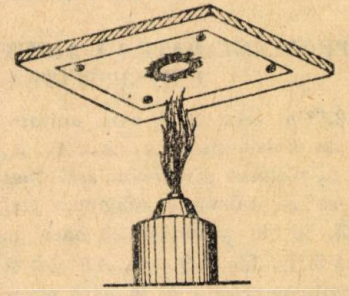


Fig. 7

6. **Conductibilitatea metalelor.** Se pune pe o scîndurică o monedă şi se acoperă aceasta cu o foaie de hîrtie. Se întinde hîrtia astfel încît să preseze bine moneda de scîndură. Se întoarce scîndura cu hîrtia întinsă pe ea şi se ţine cîteva minute deasupra flacării unei lămpi cu spirt sau de aragaz (fig. 7). Se constată că în jurul monedei hîrtia s-a înegrit, s-a carbonizat, iar deasupra monedei a rămas aproape albă.

Cum ne explicăm acest fenomen?

Metalul este mult mai bun conducător de căldură decît lemnul. De aceea ţinîndu-se scîndurica deasupra flacării, în locul unde hîrtia acoperă moneda, căldura va fi absorbită repede de metal şi în felul acesta hîrtia primind căldură puţină nu va avea timp să se carbonizeze. În locurile unde hîrtia acoperă lemnul ea va începe să se carbonizeze, deoarece lemnul absoarbe puţină căldură.

CHESTIUNI DE EXAMEN

DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DE LA UNIVERSITATEA „I. BOLYAI" DIN CLUJ 1955

Grupa I-a

1946. Se dau două cercuri tangente exterior cu razele r şi R şi o tangentă comună exterioară a lor. Să se calculeze razele celor două cercuri tangente cercurilor date şi tangentei comune dată.

1947. Se dă sistemul de ecuaţii

$$x + my = 1 \qquad mx + 4y = 3$$

Pentru ce valori ale lui m avem $x > 0$, $y > 0$.

1948. Să se verifice relaţia

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin (x + y) \sin (x - y)$$

Grupa II-a

1949. Fie AB un diametru fix al unui cerc dat şi M un punct variabil pe cerc. Tangenta dusă în punctul M taie tangentele duse în A şi B în punctele P şi Q. Să se arate că produsul $AP \cdot BQ$ este constant (nu depinde de poziţia punctului M).

1950. Se dau patru numere în progresie geometrică. Dacă adunăm la aceste numere 3, 3, 6 şi 15 obţinem o progresie aritmetică. Care sînt numerele date?

1951. Să se verifice relaţia

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{3} (\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$$

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE CHIMIE UNIVERSITATEA „I. BOLYAI" CLUJ 1955

1952. Un cerc O cu raza unitate se împarte în n părţi egale ($n > 4$). Să notăm punctele de diviziune au $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ Fie A' piciorul perpendicularei dusă din A_1 pe OA_2, A_1'' piciorul perpendicularei dusă din A_1' pe OA_3, etc. Continuînd acest procedeu indefinit să se calculeze lungimea liniei frînte $A_1 A' A_1'' A_1''' \ldots$ Caz particular $n = 6$.

1953. Se dă piramida cu baza patrată $SABCD$, avînd muchia SA perpendiculară pe baza $ABCD$. Fie $AB = a$, $AS = h$ şi M un punct variabil pe muchia SA. Să notăm cu x distanţa punctului M la baza piramidei. Să se intersecteze piramida cu un plan trecînd prin M şi paralel cu baza şi să se înscrie în piramidă o prizmă dreaptă cu înălţimea x.

a) Să se exprime suprafaţa laterală L a prizmei în funcţie de x.

b) Care este poziţia punctului M pentru care L este maxim, dacă $a = 1$, $h = 2$.

1954. Se dă ecuaţia:

$$x^2 + 4(m + 1)x + 4(2m + 1) = 0$$

unde m este un număr real oarecare.

a) Să se arate că această ecuaţie are numai rădăcini reale.

b) Pentru ce valori ale lui m avem $x_1 = 2x_2$, dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE GEOLOGIE ŞI GEOGRAFIE DIN BUCUREŞTI, 1954

1955. Să se simplifice fracţia:

$$\frac{x^5 - ax^4 - a^4 x + a^5}{x^4 - ax^3 - a^2x^2 + a^3x}$$

1956. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1 + \sin^2 x}{2 + \operatorname{ctg}^2 x} + \frac{1 + \cos^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$$

1957. Se dă un cerc de rază R şi o tangentă fixă în punctul A de pe cerc.

Să se arate că două tangente paralele determină pe tangenta fixă două segmente AM, AN al căror produs este egal cu R^2.

PROBLEME DATE LA DIFERITE EXAMENE DE ADMITERE ÎN INSTITUTUL DE TRANSPORTURI ŞI CĂI FERATE, BUCUREŞTI, AUGUST 1955

1958. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, atunci avem relaţia:

$$\cos^2 A - \cos^2 B - \sin^2 C + 2 \sin A \sin C \cos B = 0$$

1959. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC. Pe cateta AB se ia un punct M astfel că $AC^2 = AM.AB$ şi se notează cu P proiecţia punctului M pe ipotenuza BC. Se cere: să se găsească locul geometric al punctului P cînd vîrful B al unghiului se mişcă pe dreapta AB. Să se arate că dreapta MP trece printr-un punct fix.

1960. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2z^2 &= 8 \\ x + y + 2z &= 20 \\ z^2 - xy &= 4 \end{aligned}$$

1961. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$$

1962. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, laturile fiind a, b, c. Se duce bisectoarea unghiului drept AA'. Se cere:

a) Să se determine segmentele $A'C$ şi $A'B$ determinate de bisectoare pe ipotenuză;

b) Să se afle ariile triunghiurilor ABA' şi ACA'.

1963. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\dfrac{x(x-a)}{x^2+a^2} - 1}{\dfrac{x}{x-a} - 1} + \frac{\dfrac{x}{x^2+a^2} - \dfrac{x}{x^2-a^2}}{\dfrac{a^2}{x^2-a^2} + 1} + \frac{2a^2(a+x)}{x^2(x^2+a^2)} = 0$$

1964. Se dau două cercuri exterioare cu centrele respectiv în O şi O' şi de raze R şi R', iar $OO' = d$. Fie M punctul de intersecţie al tangentelor exterioare comune celor două cercuri.

Să se calculeze distanţele OM şi $O'M$, lungimile coardelor ce unesc punctele de contact ale celor două tangente, precum şi distanţa la care se află fiecare coardă de centrul cercului respectiv.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1502

In ce caz expresia $3^{2p} + 3^p + 1$ *se divide cu* 13?

* * *

Soluție. — Avem succesiv:

$$3^{2p} + 3^p + 1 = \frac{3^{3p} - 1}{3^p - 1} = \frac{(3^3)^p - 1}{3^p - 1} = \frac{27^p - 1}{3^p - 1} = \frac{(M\,13 + 1)^p - 1}{3^p - 1} = \frac{M\,13}{3^p - 1}$$

Pentru $p = 3K$, avem $3^p - 1 = 3^{3K} - 1 = M\,13$.

Deducem că expresia se divide cu 13, cînd $p \neq 3K$, adică $p = 3K \pm 1$.

Problema 1508

Dacă $a + b + c$ *este un multiplu de* 6 *atunci și* $a^3 + b^3 + c^3$ *este un multiplu de* 6.

* * *

Soluție. — Avem:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (a + b + c) =$$

$$= (a - 1)\,a\,(a + 1) + (b - 1)\,b\,(b + 1) + (c - 1)\,c\,(c + 1) + (a + b + c)$$

Dar cum produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 6, rezultă că produsele

$$(a - 1)\,a\,(a + 1);\quad (b - 1)\,b\,(b + 1);\quad (c - 1)\,c\,(c + 1)$$

sînt multipli de 6, iar suma lor este de asemenea un multiplu de 6. Deci,

$$a^3 + b^3 + c^3 = M6 + (a + b + c) = M6 + M6 = M6$$

căci $(a + b + c)$ este multiplu de 6.

Punînd în general $p = 2n + 1$, avem:

$$a^p + b^p + c^p + \ldots + h^p + l^p = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1} + \ldots + h^{2n+1} + l^{2n+1} =$$

$$= \sum (a^{2n+1} - a) + \sum a = \sum a\,(a^{2n} - 1) + M6.$$

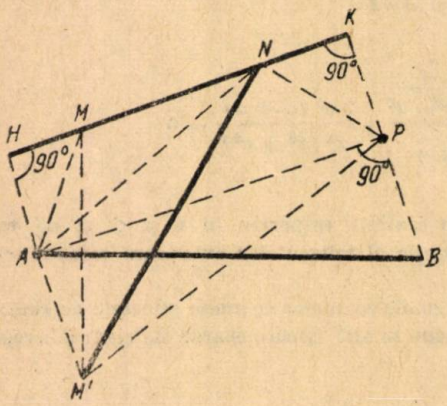
Avem: $a\,(a^{2n} - 1) = a\,(a^2 - 1)\,(a^{2n-2} + a^{2n-4} + \ldots + a^4 + a^2 + 1) = M6$ deoarece $a\,(a^2 - 1) = (a - 1)\,a\,(a + 1)$ este un multiplu de 6.

Problema 1509

Fiind dat un cerc de diametru AB, *fie* H *și* K *proiecțiile punctelor* A *și* B *pe o coardă* MN. *Dacă* M' *este simetricul lui* M *față de* AB, *să se arate că* $M'N = HK$.

* * *

Soluție. — Dreapta BK taie cercul $ABNM$ în P astfel că $\sphericalangle APB = 90°$ și înseamnă că $AP \parallel = HK$ (din dreptunghiul $APKH$).



Deoarece $MN \parallel AP$ rezultă că

$$\text{arc } AM = \text{arc } NP, \qquad (1)$$

dar cum M și M' sînt simetrice față de AB, avem:

$$\text{arc } AM = \text{arc } AM' \qquad (2)$$

și comparînd (1) cu (2):

$$\text{arc } NP = \text{arc } AM'$$

și rezultă că în cercul dat, coardele AN și $M'F$ sînt paralele, iar trapezul $ANPM'$ este isoscel. Deci, $AP = M'N$; cum însă $A'P = HK$ rezultă că $M'N = HK$.

Problema 1510

Să se descompună în factori de gradul I polinomul $2x^2+\alpha xy-2y^2-x+7y-3$. *Caz particular pentru* $\alpha=-3$.

* * *

I. *Soluție.* — Pentru $\alpha=-3$ polinomul devine

$$P=2x^2-3xy-2y^2-x+7y-3.$$

Ecuația $2x^2-3xy-2y^2-x+7y-3=0$ se mai poate scrie

$$2x^2-x(3y+1)-2y^2+7y-3=0, \text{ de unde}$$

$$x=\frac{3y+1\pm\sqrt{(3y+1)^2+8(2y^2-7y+3)}}{4}=\frac{3y+1\pm(5y-5)}{4}$$

Deci, $x_1=2y-1$ și $x_2=\frac{-y+3}{2}$.

Polinomul se mai poate scrie

$$P\equiv 2(x-2y+1)\left(x-\frac{-y+3}{2}\right)\equiv(x-2y+1)(2x+y-3).$$

Fie $2x^2+\alpha xy-2y^2-x+7y-3=0$. Pentruca acest polinom să se descompună, trebuie ca discriminantul Δ al ecuației în x să fie un patrat perfect

$$\Delta=(\alpha^2+16)y^2-2y(\alpha+28)+25$$

iar discriminantul δ al acestei ecuații să fie zero

$$\delta\equiv(\alpha+28)^2-25(\alpha^2+16)=0 \text{ de unde}$$

$\alpha=-3$, cazul particular al problemei, descompunerea mai fiind posibilă și pentru $\alpha=\frac{16}{3}$.

II. *Soluție* dată de **Țurlea Corneliu**, elev, Craiova. — Polinomul $P(x, y)$ se mai poate scrie:

$$2x^2+(ay-1)x-2y+7y-3=0$$

$$x=\frac{-ay+1\pm\sqrt{a^2y^2-2ay+1+16y^2-56y+24}}{4}=$$

$$=\frac{-ay+1\pm\sqrt{(a^2+16)y^2-(2a+56)y+25}}{4}.$$

Pentruca polinomul să se descompună trebuie ca realizantul să fie un patrat perfect și anume, de forma:

$(a^2+16)y^2-2(a+28)y+25=(Ay+B)^2$ adică:

$(a^2+16)y-2(a+28)y+25=A^2y^2+2ABy+B^2$ de unde:

$$A^2=a^2+16$$

$$AB=-(a+28)$$

$$B^2=25.$$

Avem $B=\pm 5$, valoare pe care introducînd-o în relația a doua obținem:

$$A=\pm\frac{a+28}{5}. \qquad (1)$$

Însă cum $A^2=a^2+16$, trebuie ca: $\left(\frac{a+28}{5}\right)^2=a^2+16$, deci: $24a^2-56a+784=25a^2+400$, de unde: $24a^2-56a-384=0$ sau: $3a^2-7a-48=0$;

$$a=\frac{7\pm\sqrt{47+576}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{625}}{6}=\frac{7\pm25}{6}.$$

Deci:

$$a_1 = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \quad \text{și} \quad a = -3.$$

Introducînd valorile găsite pentru a în relația (1) obținem pe A și cum $B = \pm 5$, se determină realizantul $(Ay + B)^2$; apoi se găsește x și se face descompunerea în factori corespunzătoare.

Caz particular pentru $a = -3$. Avem:

$$A = \mp \frac{a + 28}{5} = \mp \frac{25}{5} = \mp 5$$

Deci:

$$x = \frac{3y + 1 \pm (\pm 5y \pm 5)}{4}.$$

Vom avea:

$$x_1 = \frac{3y + 1 - 5y + 5}{4} = \frac{6 - 2y}{4} = \frac{3 - y}{2}$$

$$x_2 = \frac{3y + 1 + 5y - 5}{4} = \frac{8y - 4}{4} = 2y - 1$$

$$x_2' = \frac{3y + 1 + 5y - 5}{4} = \frac{8y - 4}{4} = 2y - 1$$

$$x'_2 = \frac{3y + 1 - 5y + 5}{4} = \frac{6 - 2y}{4} = \frac{3 - y}{2}.$$

Însă: $x_1 = x_2'$ și $x_2 = x'_1$. Deci polinomul se descompune astfel:

$$P = 2\left(x - \frac{3 - y}{2}\right)(x - 2y + 1) = (2x + y - 3)(x - 2y + 1).$$

Problema 1511

Să se arate că expresia:

$$E = \cos^4 x + \cos^4 (x + 120°) + \cos^4 (x + 240)$$

este independentă de x și să se afle valoarea ei.

* * *

Soluția I. Avem: $\cos (x + 120°) = -\frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{3} \sin x)$; $\cos (x + 240°) = -\frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3} \sin x)$; $\cos^4 (x + 120°) + \cos^4 (x + 240°) = \frac{1}{16}[2 (\cos^4 x + 9 \sin^4 x) + 12 \cdot \cos^2 x \cdot 3 \sin x] = \frac{\cos^4 x + 9 \sin^4 x + 18 \sin^2 x \cos^2 x}{8}$

deci,

$$E = \cos^4 x + \frac{\cos^4 x + 9 \sin^4 x + 18 \sin^2 x \cos^2 x}{8}$$

$$E = \frac{9 (\sin^4 x + \cos^4 x) + 18 \sin^2 x \cos^2 x}{8}$$

unde $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$$E = \frac{9 - 18 \sin^2 x \cos^2 x + 18 \sin^2 x \cos^2 x}{8}, \text{ deci } E = \frac{9}{8}.$$

Soluția II. Avem: $\cos(240° + x) = \cos(120° - x)$, deci

$$E = \cos^4(120° - x) + \cos^4 x + \cos^4(120° - x).$$

Deasemeni $\cos^4(120° - x) = \cos^4(60° + x)$; $\cos^4(120° + x) = \cos^4(60° + x)$

$$E = \cos^4(60° - x) + \cos^4 x + \cos^4(60° + x).$$

Avem:

$$\cos(60° - x) + \cos(60° + x) = \cos x.$$

Deci $\cos^2(60° - x) + \cos^2(60° + x) = \cos^2 x - 2\cos(60° - x)\cos(60° + x) = \cos^2 x - \cos 2x - \cos 120° = \frac{3}{2} - \cos^2 x.$

De asemeni:

$$\cos^4(60° - x) + \cos^4(60° + x) = \left(\frac{3}{2} - \cos^2 x\right)^2 - 2\cos^2(60° - x)\cos^2(60° + x)$$

dar

$$2\cos^2(60° - x)\cos^2(60° + x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 120°)^2 = \frac{1}{2}\left(2\cos^2 x - \frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + \frac{9}{8}.$$

Vom avea deci:

$$\cos^4(60° - x) + \cos^4(60° + x) = \frac{9}{4} - 3\cos^2 x + \cos^4 x - 2\cos^4 x + 3\cos^2 x - \frac{9}{8} =$$

$$= \frac{9}{8} - \cos^4 x, \text{ de unde rezultă } E = \frac{9}{8}.$$

Problema 1518

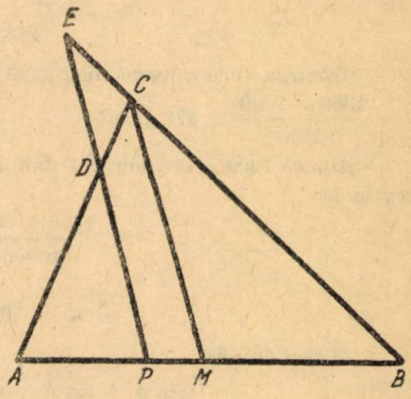
Pe baza AB a unui triunghi ABC se ia un punct oarecare P din care se duce o paralelă la mediana CM a triunghiului. Această paralelă taie celelalte două laturi (sau prelungirile lor) în punctele D și E. Să se arate că $PD + PE$ = constant.

* * *

Soluție. — Din asemănarea triunghiurilor (CAM și DAP) și (BCM și EBP) rezultă:

$$\frac{PD}{CM} = \frac{AP}{AM} = \frac{2AP}{AB};$$

$$\frac{PE}{CM} = \frac{PB}{MB} = \frac{2BP}{AB}$$



de unde:

$$\frac{PD + PE}{CM} = \frac{2(AP + PB)}{AB} =$$

$$= \frac{2AB}{AB} = 2 \quad \text{căci} \quad AP + PB = AB$$

și deci,

$$PD + PE = 2\,CM = \text{constant}$$

Problema 1532

Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} + \frac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin a - \cos a}$$

* * *

Soluție. — Pentru $\sin a + \cos a \neq 0$,

$$\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = \sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a = 1 - \sin a \cos a$$ iar pentru $\sin a - \cos a \neq 0$,

$$\frac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin a - \cos a} = \sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a = 1 + \sin a \cos a.$$

Deci, pentru ($a \neq 45$, $a \neq 135$); $a \neq 360° k + 90° \pm 45°$, unde k este un număr întreg, avem:

$$E = (1 - \sin a \cos a) + (1 + \sin a \cos a) = 2.$$

Problema 1540

Într-o instalație specială de laborator se încălzesc 10 kg *gheață de la temperatura de* $-50°C$ *până se transformă în apă, la temperatura de* $+ 25°C$.

Să se afle cantitatea de combustibil ars necesar pentru această încălzire, respectiv de benzină, turbă, ulei mineral.

Tiberiu Colibaba, elev, Galați

Soluție. — *a)* Cantitatea de căldură necesară încălzirii gheții până la punctul de topire este

$$Q_1 = c_g \cdot m (t_0 - 0) = 0{,}5 \cdot 10 [(0 - (50)] = 250 \text{ kcal}$$

b) Cantitatea de căldură necesară în timpul topirii:

$$Q_2 = m\lambda = 10.\ 80 = 800 \text{ kcal}$$

c) Cantitatea de căldură necesară încălzirii apei de la zero la 25°:

$$Q_3 = c_l \cdot m (t - t_0) = 1 \cdot 10 (25 - 0) = 250 \text{ kcal}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 250 + 800 + 250 = 1300 \text{ kcal}$$

Apoi, calculăm cantitatea de combustibil ars, ținînd seama de capacitate calorică.

Dacă 100 g benzină dau 11.230 kcal, pentru obținerea a 1300 kcal este nevoie de

$$x = \frac{1300 \times 1000}{11230} \cong 115 \text{ g benzină.}$$

Deoarece 1000 g turbă dau 3500 kcal, pentru obținerea a 1300 kcal este nevoie de

$$x = \frac{1300 \times 1000}{3500} \cong 371 \text{ g turbă.}$$

Știm că 1000 g ulei mineral dau 10.900 kcal, deci pentru a obține 1300 kcal avem nevoie de:

$$x = \frac{1300 \times 1000}{10900} = 119 \text{ g ulei mineral.}$$

Problema 1544

Să se arate că:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^3 \geqslant 6\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare.

Gh. I. Bercea

Soluția I-a, dată de **I. I. Cristea,** Constanța. — Pornind de la inegalitatea:

$$(x + y + z)^3 \geqslant 27\, xyz$$

unde x, y, z sînt cantități pozitive întrucît pentru un triunghi oarecare $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ sînt pozitivi, avem și inegalitatea:

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^3 \geqslant 27 \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

dar cum într-un triunghi

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

rezultă

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^3 \geqslant 27 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

sau împărțind ultima inegalitate cu cantitatea pozitivă:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}, \text{ avem } \left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^2 \geqslant 27$$

sau

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3} \tag{1}$$

sau încă

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

și cum $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ este pozitivă, avem:

$$\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2 \geqslant 6\sqrt{3}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

și cum:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B+\sin C$$

iar: $2\sin x\cos x=\sin 2x$.
rezultă:

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2 \geqslant 6\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

Soluția II-a. — Se știe că într-un triunghi:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

așa că produsul

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

în care suma factorilor săi este constantă este maximă cînd factorii devin egali. Deci:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{sau} \quad \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} > 3\sqrt{3}$$

obținîndu-se inegalitatea (1); iar restul urmează ca la soluția anterioară.

Problema 1546

Cîte acumulatoare cu forțe electromotoare de 2V și rezistența interioară de 0,2 ohmi trebuie conectate în serie pentru a obține în circuitul exterior curentul $I = 5A$ la o diferență de potențial la bornele bateriei $V = 110$ volți ?

* * *

Soluție. Dacă se conectează în serie n acumulatoare forța electromotoare a bateriei va fi $\varepsilon = n\varepsilon_1$ și rezistența interioară $r = nr_1$. Dacă intensitatea curentului este I, pierderea de tensiune în rezistența interioară a bateriei va fi egală cu $V' = Ir$.

Conform legii lui Ohm, pentru întregul circuit trebuie să fie

$$\varepsilon - V = V'$$

sau

$$n\varepsilon_1 - V < Inr_1$$

De aici

$$n = \frac{V}{\varepsilon_1 - Ir_1} = 110.$$

Problema 1547

La sfîrșitul articolului său « Degajarea căldurii în conductori » academicianul Lenz a pus următoarea problemă: Pentru încălzirea pînă la incandescență a unei sîrme de un anumit diametru și lungime l este necesar un circuit din n elemente; cîte asemenea elemente sînt necesare pentru încălzirea pînă la incandescență a unei sîrme de același diametru însă de lungime pl ?

Conectarea elementelor în ambele cazuri se face în serie. Rezolvați problema lui Lenz.

* * *

Soluție. Considerăm că rezistența interioară a unui element este egală cu r, forța lui electromotoare este ε_0, rezistența unității de lungime a sîrmei R_1.

La conectarea unei sîrme cu lungimea l în circuit va trece un curent cu intensitatea

$$I_1 = \frac{n\,\varepsilon_0}{nr + lR_1}$$

În sîrmă se va degaja în fiecare secundă o cantitate de căldură :

$$Q = I_1^2 l R_1 = \frac{n^2\varepsilon_0^2}{(nr + lR_1)^2} \cdot R_1 l;$$

iar la fiecare unitate de lungime a sîrmei se va degaja o cantitate de căldură

$$q_1 = \frac{Q}{l} = \frac{n^2\,\varepsilon_0^2}{(nr + l\,R_1)^2} \cdot R_1$$

La conectarea unei sîrme de lungime pl și x elemente cantitatea de căldură care se va degaja la fiecare unitate de lungime a sîrmei va fi

$$q_2 = \frac{x^2\,\varepsilon_2^0}{(nr + plR_1)^2} \cdot R_1$$

La o egală încălzire a ambelor sîrme în unitatea de lungime a fiecăreia din ele trebuie să se dezvolte o egală cantitate de căldură, adică

$$\frac{n^2\,\varepsilon_0^2}{(nr + lR_1)^2} = \frac{x^2\varepsilon_0^2}{(xr + plR_1)^2}$$

De aici $x = pn$

Problema 1558

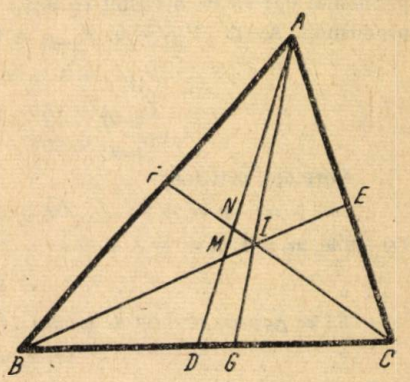
In triunghiul oarecare ABC bisectoarele BE şi CF taie mediana AD în punctele M şi N. Să se arate că:

$$\frac{AM}{MD} + \frac{ND}{AN} > 2$$

Radu Stroe, elev, Ploeşti

Soluţie. Proprietatea bisectoarei unui unghi al unui triunghi, de a determina pe latura opusă segmente proporţionale cu celelalte două laturi, ne permite a scrie în triunghiurile ABD şi ACD pentru bisectoarele BM şi CN

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AB}{BD}, \quad \text{şi} \quad \frac{AN}{ND} = \frac{AC}{DC}$$



de unde

$$\frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} = \frac{AB}{BD} + \frac{AC}{DC} = 2 \cdot \frac{b+c}{a} > 2,$$

sau

$$\frac{b+c}{a} > 1 \quad ; \quad b + c > a,$$

ceea ce este evident.

Problema 1559

Ştiindu-se că nucleul izotopului ${}_{84}P_0^{213}$ emite o particulă α iar nucleul ce se formează emite o particulă e^- (electron), se cere să se formeze schemele de dezintegrare şi să se calculeze energiile particulei α şi e^-.

Claudiu Orşivski

Soluţie. Schemele de dezintegrare sînt

$${}_{84}P_0^{213} \rightarrow {}_{82}P_b^{209} + {}_2H_e^4$$

$${}_{82}P_b^{209} \rightarrow {}_{83}B_i^{209} + {}_1e^0$$

Se calculează exact masele izotopilor

${}_{84}P_0^{213}$; ${}_{82}P_b^{209}$ şi ${}_{83}B_i^{209}$ după formula

$$M = 0{,}99389\ A - 0{,}00081\ Z + 0{,}014\ A^{\frac{2}{3}} + 0{,}083\ \frac{\left(\frac{A}{2} - z\right)}{A} + 0{,}000627\ \frac{z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta$$

corecţia δ pentru fiecare izotop fiind nulă.

Se obţin valorilor respective astfel,

$${}_{84}P_0^{213} \rightarrow 213{,}06792 \text{ U.A.M.}$$

$${}_{82}P_b^{209} \rightarrow 209{,}06108 \text{ U.A.M.}$$

$${}_{83}B_i^{209} \rightarrow 209{,}06129 \text{ U.A.M.}$$

La prima dezintegrare diferenţa de mase dă valoarea $\Delta M_1 = 0{,}0029$ U.A.M. $\Delta W_1 = 2{,}737$ MeV energia particulei α şi $\Delta M_2 = 0{,}000758$ U.A.M. $\Delta W_2 = 0{,}695$ MeV, energia electronului. (P_0 = poloniu; B_i = bismut; P_b = plumb).

Problema 1561

Să se determine m, n, p astfel ca polinomul:

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 8$$

să fie divizibil cu $(x - 1)(x^2 + 6x + 8)$.

* * *

Soluția. Trinomul $x^2 + 6x + 8$ se descompune în produsul $(x + 2)(x + 4)$. Deci polinomul dat $P(x)$ trebuie să fie divizibil cu produsul $(x - 1)(x + 2)(x + 4)$. Pentru ca polinomul dat să fie divizibil cu acest produs trebuie să fie divizibil cu fiecare din factorii produsului. Avem: $P_{(1)} = 0$, $P_{(-2)} = 0$ și $P_{(-4)} = 0$ sau:

$$P_{(1)} = 1 + m + n + p + 8 = 0$$
$$P_{(-2)} = 16 - 8m + 4n - 2p + 8 = 0$$
$$P_{(-4)} = 256 - 64m + 16n - 4p + 8 = 0$$

Formăm sistemul:

$$m + n + p = -9; \quad -4m + 2n - p = -12; \quad -16m + 4n - p = -66.$$

De unde $m = 4$, $n = -3$ și $p = -10$.

Problema 1566

Să se formeze ecuația de gradul II ale cărei rădăcini x_1 *și* x_2 *satisfac relațiile următoare:*

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1 + a}$$

a fiind cunoscut.

* * *

Soluție. Relațiile se mai pot scrie:

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) = -4$$

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2) = -\frac{a}{1 + a}.$$

Rezultă $x_1 + x_2 = \frac{4}{1 + a}$ și $x_1x_2 = \frac{4 - a}{1 + a}$. Astfel, ecuația cerută este:

$$(1 + a)x^2 - 4x + 4 - a = 0.$$

Problema 1569

Să se formeze ecuația de gradul II ale cărei rădăcini x_1 *și* x_2 *verifică relațiile:*

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0$$
$$a(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 3a + 4$$

a fiind un parametru.

* * *

Soluție. Din prima relație scoatem: $x_1 + x_2 = -2x_1x_2$ și introducînd în relația II-a, obținem:

$$-2ax_1x_2 - x_1x_2 = 3a + 4;$$
$$-x_1x_2(2a + 1) = 3a + 4$$

de unde:

$$x_1x_2 = -\frac{3a + 4}{2a + 1}.$$

Rezultă:

$$x_1 + x_2 = \frac{6a + 8}{2a + 1}.$$

Ecuația căutată este:

$$(2a + 1)x^2 - (6a + 8)x - 3a - 4 = 0.$$

Problema 1575

Să se rezolve ecuația:

$$\sin(x + 10°) - \sin(x - 50°) + \sin(x + 70°) = 1.$$

* * *

Soluție. Transformînd în produs ultimii doi termeni avem:

$\sin(x + 10°) + 2\cos(x + 10°)\sin 60° = 1$, adică $\sin(x + 10°) + \sqrt{3}\cos(x + 10°) = 1$.

Împărțind cu $\sqrt{3}$ obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x + 10°) + \cos(x + 10°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ adică:}$$

$$\operatorname{tg} 30° \sin(x + 10°) + \cos(x + 10°) = \operatorname{tg} 30° \text{ sau:}$$

$$\sin 30° \sin(x + 10°) + \cos 30° \cos(x + 10°) = \sin 30°$$

de unde:

$$\cos(20° - x) = \sin 30°, \text{ adică:}$$

$$\cos(20° - x) = \cos 60°.$$

Deci: $20° - x = 360° K \pm 60°$ de unde:

$$x = 360° K - 20° \pm 60°$$

unde $K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Problema 1580

Se consideră șirul de molecule $CH_4 \ldots$, $C_2H_6 \ldots$, $C_3H_8 \ldots$, $C_4H_{10} \ldots$, *Cîte molecule trebuie să luăm din acest șir ca să avem în total* 270 *atomi de hidrogen?*

* * *

Soluție. Numărul atomilor de hidrogen din molecule formează o progresie aritmetică:

$$4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots, 2(n + 1)$$

deci trebuie să avem:

$$S_n = 270 = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{4 + 2(n + 1)}{2}$$

sau $n^2 + 3n - 270 = 0$. Soluția acceptabilă este $n_1 = 15$, întrucît numărul de molecule nu poate fi $n_2 = -18$, negativ.

Problema 1585

Dacă ecuația $x^2 + px + q = 0$ *are rădăcini reale, să se arate că ecuația*

$$x^2 - (p^2 - 2q + 2)x + p^2 + q^2 - 2q + 1 = 0$$

are rădăcini reale și pozitive.

Simon St. Petre

Soluție. Dacă ecuația $x^2 + px + q = 0$ are rădăcini reale înseamnă că realizantul: $p^2 - 4q \geqslant 0$; pentru a arăta că și ecuația a II-a are rădăcini reale trebuie să arătăm că realizantul ei: $R \geqslant 0$.

$$R = (p^2 - 2q + 2)^2 - 4(p^2 + q^2 - 2q + 1) =$$

$$= p^4 + 4q^2 + 4 - 4p^2q + 4p^2 - 8q - 4p^2 - 4q^2 + 8q - 4 =$$

$$= p^4 - 4p^2q = p^2(p^2 - 4q) \geqslant 0.$$

Pentru a avea rădăcinile pozitive trebuie ca: $P > 0$ și $S > 0$, adică:

$$P = p^2 + q^2 - 2q + 1 = p^2 + (q - 1)^2 > 0$$

și

$$S = p^2 - 2q + 2 = x_1^2 + x_2^2 + 2 > 0$$

în care x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației: $x^2 + px + q = 0$.

Problema 1587

Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$$

cînd numărul termenilor este infinit.

N. C. Ciomu

Soluție. Suma S este suma sumelor:

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{8}$$

. . . . . .

Deci:

$$S = 1 + 1 + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \ldots$$

sau:

$$S = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

însă:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Deci: $S = 2 + 1 = 3$.

Problema 1594

Într-un triunghi oarecare ABC se notează cu l_a și l'_a respectiv bisectoarea interioară și exterioară unghiului A. Să se arate că:

$$l_a = l'_a \operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$$

M. Zigulescu, R. Vîlcea

Soluția I. Fie AD și AD' respectiv bisectoarea interioară și bisectoarea exterioară unghiului BAC în triunghiul ABC. Triunghiul DAD' fiind dreptunghic în A iar:

$$\sphericalangle AD'D = \sphericalangle ABC - \sphericalangle D'AB = B - \left(90° - \frac{A}{2}\right) = \frac{2B - 180 + A}{2} = \frac{B - C}{2}$$

căci

$$A + B + C = 180°;$$

avem:

$$AD = AD' \operatorname{tg}(AD'D) = AD' \operatorname{tg}\frac{B - C}{2}$$

de unde:

$$l_a = l'_a \operatorname{tg}\frac{B - C}{2}.$$

Soluția II. Se știe că:

$$l_a = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp\ (p - a)} \quad ; \quad l'_a = \frac{2}{b - c}\sqrt{b\,c\,(p - b)\,(p - c)}$$

încît:

$$\frac{l_a}{l'_a} = \frac{b - c}{b + c}\sqrt{\frac{p\,(p - a)}{(p - b)\,(p - c)}} = \frac{b - c}{b + c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B - C}{2}.$$

Problema 1647

Să se rezolve ecuația:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right).$$

* * *

Soluție dată de **C. Țurlea,** elev, Craiova. Grupăm termenii astfel:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \cos 2x =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \sin 2x$$

sau:

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos 2x + \cos 2x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin 2x + \sin 2x$$

$$\cos 2x\left[2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 1\right] = \sin 2x\left[2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 1\right]$$

sau:

$$\left[2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 1\right](\cos 2x - \sin 2x) = 0.$$

De unde:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2}\ ; \quad \frac{\pi}{4} + x = 2K - \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}\ ;$$

sau:

$$x = 2K\pi - \frac{3\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3}\ ; \quad \cos 2x = \sin 2x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1 \quad \text{deci:} \quad 2x = K\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{sau} \quad x = \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

Problema E: 561

Într-un bazin sînt două robinete. La început s-a deschis primul robinet; după trei ore bazinul s-a umplut pînă la jumătate cînd s-a deschis și al doilea robinet. După două ore s-a umplut întreg bazinul. Care este capacitatea bazinului știind că prin al doilea robinet curg 21 litri de apă pe oră.

Olimpiada Matematică, Moscova, 1954

Soluție dată de **R. Coșereanu** și **C. Mihăileanu,** Timișoara. Primul robinet curgînd singur ar umple bazinul în 6 ore; deci pe oră $\frac{1}{6}$ din capacitatea bazinului $\frac{6}{6}$.

Curgînd în total 5 ore a umplut $5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ din capacitatea bazinului.

Restul de $\frac{1}{6}$ îl umple în 2 ore al II-lea robinet care curgînd cu 21 litri pe oră, în două ore lasă 42 litri de apă. Deci $\frac{1}{6}$ conține 42 l.

Atunci $\frac{6}{6}$ (capacitatea bazinului) va fi de $42 \cdot 6 = 252$ litri.

Problema E: 575

Din Iași pleacă un om pe jos spre Băcești, cu viteza de 5 km pe oră și totodată, din Băcești pleacă altul cu căruța spre Iași, cu viteza de 9 km pe oră; ei se întîlnesc la 20 km de mijlocul distanței Iași — Băcești. Care este lungimea drumului?

P. Grăjdeanu, Iași

Soluție dată de elevii pionieri **Radu Coșereanu** (Timișoara) și **I. Gervescu** (Roznov). Notăm cu x lungimea drumului, și avem:

$\frac{\frac{x}{2} + 20}{9}$ = timpul în care căruțașul a mers pînă s-a întîlnit cu pietonul;

$\frac{\frac{x}{2} - 20}{5}$ = timpul în care pietonul a întîlnit căruțașul.

Egalînd avem:

$$\frac{\frac{x}{2} + 20}{9} = \frac{\frac{x}{2} - 20}{5} \quad \text{sau} \quad \frac{x + 40}{9} = \frac{x - 40}{5}; \quad 5(x + 40) = 9(x - 40);$$

$5x + 200 = 9x - 360$; $4x = 560$; $x = 140$ km.

Problema E: 592

Să se arate că:

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

Soluția I. Dacă notăm $a - b = C$; $b - c = A$; $c - a = B$ și adunăm, obținem

$$0 = A + B + C$$

și atunci egalitatea noastră devine:

$$C^3 + A^3 + B^3 = 3ABC \text{ cu condiția ca } A + B + C = 0.$$

Această egalitate mai poate fi scrisă astfel:

$$C^3 + A^3 + B^3 = (C^3 + A^3) + B^3 = [(C + A)(C^2 - CA + A^2)] + B^3.$$

Dar $C + A = -B$, iar $C^2 + A^2 = (C + A)^2 - 2AC = (-B)^2 - 2AC$.

Astfel că egalitatea devine:

$$C^3 + A^3 + B^3 = (-B)[(-B^2) - 2AC - AC] + B^3 =$$
$$= (-B)[B^2 - 3AC] + B^3 = -B^3 + 3ABC + B^3 = 3ABC.$$

Adică ceea ce trebuia demonstrat.

Soluția II-a. Partea I-a a egalității o putem scrie astfel:

$$[(a-b)^3 + (b-c)^3] + (c-a)^3 = [(a-b+b-c)][(a-b)^2 - (a-b)(b-c) +$$
$$+ (b-c)^2] + (c-a)^3 =$$
$$= (a-c)[(a-b)^2 - (a-b)(b-c) + (b-c)^2] + (c-a)^3 =$$
$$= (c-a)\{(c-a)^2 - [(a-b)^2 - (a-b)(b-c) + (b-c)^2]\} =$$
$$= (c-a)[c^2 - 2ac + a^2 - (a^2 - 2ab + b^2 - ab + b^2 + ac - bc +$$
$$+ b^2 - 2bc + c^2)] =$$
$$= (c-a)(c^2 - 2ac + a^2 + 3ab - a^2 - 3b^2 - ac + 3bc - c^2) =$$
$$= (c-a)(-3ac + 3ab - 3b^2 + 3bc) =$$
$$= 3(c-a)(-ac + ab - b^2 + bc) =$$
$$= 3(c-a)[b(a-b) - c(a-b)] =$$
$$= 3(c-a)(a-b)(b-c).$$

Problema E: 613

Eu am azi vîrsta pe care o avea fratele meu cînd eu aveam vîrsta lui plus vîrsta pe care o avea sora mea cînd eu aveam vîrsta ei. Cînd fratele meu va avea vîrsta pe care o am eu azi, atunci eu voi avea vîrsta pe care o va avea el cînd sora mea va avea vîrsta lui. Iar cînd ea a avut vîrsta pe care o avea fratele meu cînd eu aveam vîrsta surorii mele, ei împreună aveau vîrsta pe care aşi fi avut-o eu peste patru ani. Care e vîrsta fiecăruia dintre noi?

I. I. Cristea, elev, Constanța

Soluție. Fie x vîrsta pe care o am eu azi, y vîrsta pe care o are fratele meu, iar z vîrsta surorii mele.

Cînd eu aveam vîrsta fratelui meu: y ani, el avea $y - (x - y)$ ani. căci el e mai mic decît mine cu $(x - y)$ ani. Iar cînd eu aveam vîrsta surorii mele: z ani, ea avea $z - (x - z)$ ani, căci ea e mai mică decît mine cu $(x - z)$ ani. Înseamnă că avem ecuația

$$x = [y - (x - y)] + [z - (x - z)]$$

adică:

$$3x = 2y + 2z \qquad (1)$$

Cînd fratele meu va avea vîrsta mea: x ani, eu voi avea $x + (x - y)$ ani, iar cînd soră-mea va avea vîrsta fratelui meu: y ani, fratele meu va avea $y + (y - z)$ ani, căci el este mai mare ca soră-mea cu $(y - z)$ ani. Atunci conform problemei

$$x + (x - y) = y + (y - z)$$

adică:

$$2x = 3y - z \qquad (2)$$

Cînd eu aveam vîrsta surorii mele, z ani, fratele meu avea $z - (x - y)$ ani, iar cînd soră-mea avea vîrsta pe care o avea fratele meu cînd eu aveam vîrsta ei, adică $z - (x - y)$ ani el avea $z - (x - y) + (y - z)$ ani, căci fratele meu e mai mare cu $(y - z)$ ani decît sora mea.

Deci,

$$[z-(x-y)]+\{[z-(x-y)]+(y-z)\}=x+4$$

sau:

$$3y-3x+z=4 \tag{3}$$

Cu ecuațiile (1), (2), (3) putem forma sistemul

$$3x=2y+2z$$
$$2x=3y-z$$
$$3y-3x+z=4$$

Din a doua ecuație avem:

$$z=3y-2x$$

care înlocuită în celelalte ecuații dă:

$$3x=2y+2(3y-2x);$$
$$3y-3x+(3y-2x)=4$$

sau

$$7x=8y;$$
$$6y-5x=4$$

De unde din prima ecuație a ultimului sistem avem:

$$y=\frac{7}{8}x$$

A doua ecuație devine

$$6\left(\frac{7}{8}x\right)-5x=4\ ;\frac{21}{4}x-5n=4,\ \text{deci}\ x=16$$

iar apoi,

$$y=\frac{7}{8}\times 16=14;\quad z=3y-2x=10$$

Deci, eu am 16 ani, fratele meu are 14, ani iar sora mea are 10 ani.

PROBLEME PROPUSE

1965. — Fie AB un diametru fix al unui cerc O și AC o coardă variabilă. Se prelungește AC cu $CD = n.\ AC$.

a) Să se afle locurile geometrice ale punctelor M și G, unde M este mijlocul lui BD, iar G centrul de greutate al triunghiului ABD.

b) În cazul cînd $n = 1$ să se afle locul geometric G_1 al centrului de greutate al triunghiului ABH, unde H este ortocentrul triunghiului ABD.

Corneliu Georgescu, Craiova

1966. — Intr-un con circular drept unghiul de la vîrf este 2α. Prin vîrful conului ducem un plan care face cu axa conului un unghi φ și care taie conul după două generatoare.

a. Să se determine unghiul 2ψ format de aceste generatoare.

b. În ce caz aceste două generatoare sînt perpendiculare.

c. Să se demonstreze că dacă $\alpha < 180°$ există inegalitatea:

$$\sqrt{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha-\varphi)} \leqslant \sin\alpha\cos\varphi.$$

A. Holinger

1967. — Polii unei baterii de forță electromotoare $E = 60$ volți și rezistență interioară $R_i = 7$ ohmi se leagă printr-un fir de nichelină de lungime $l = 2$ m și secțiunea $s = 0{,}03$ mm^2. Știind că rezistivitatea nichelului este $\rho = 0{,}000032$ ohmi. cm, să se afle:

a) Rezistența R a firului de nichelină;

b) Rezistența R_t a întregului circuit;

c) Intensitatea I a curentului care trece prin circuit;

d) Diferența de potențial U la capetele firului de nichelină;

e) Cantitatea de căldură dezvoltată în firul de nichelină în timp de o oră.

* * *

1968. — Se dă un triunghi oarecare ABC și un punct P pe latura BC. Să se determine punctele M și N respectiv pe laturile AB și AC astfel ca aria triunghiului MNP să fie maximă.

Gh. I. Mitrofan, Caransebeș

1969. — Se dă expresia:

$$E = \frac{a^7 (12\,a^3 - 40\,a^3 - 37\,a^2 + 30\,a - 101)}{3\,a^3 + 5\,a^2 + 3a - 5} +$$

$$+ \frac{a\,(40\,a^5 - 27\,a^4 + 42\,a^3 + 112\,a^2 - 128\,a + 80)}{3\,a^3 + 5\,a^2 - 3\,a - 5} + (a - 2)^2$$

Se cere:

a) Să se afle valoarea numerică a expresiei E pentru $a = 1$ și pentru $a = -\frac{5}{3}$.

b) Să se afle valoarea lui a pentru care expresia E se anulează.

c) Să se aducă expresia E la forma cea mai simplă.

d) Să se verifice rezultatele aflate.

C. Ionescu-Țiu

1970. — Pe un scripete fix sînt atîrnate în echilibru două greutăți egale avînd masa de 475 g fiecare. Ce accelerație va obține sistemul dacă deasupra uneia dintre cele două greutăți se așază o greutate suplimentară cu masa de 30 g ($k = 980$ cm/s^2).

* * *

1971. — Un tren străbate distanța de 18 km în 30 minute. Să se calculeze:

— viteza medie a trenului în km/oră și m/s;

— puterea dezvoltată de locomotivă la o forță de tracțiune măsurată de 2000 kgf.

* * *

1972. — O lentilă biconvexă are distanța focală de 18 cm. Un obiect luminos fiind la 8 cm depărtare de centrul optic, să se afle distanța corespunzătoare a imaginii. Să se construiască imaginea și să se calculeze grosimentul liniar al lentilei.

* * *

1973. — Distanța focală a unei oglinzi sferice concave este de 8 cm. Imaginea unui obiect luminos aflat pe axul principal fiind la 40 cm de vîrful oglinzii, să se afle distanța la care se află obiectul.

* * *

1974. Care va fi intensitatea curentului într-un conductor de 0,4 ohmi, tensiunea la capete fiind de 8 volți; dar puterea curentului și căldura dezvoltată de conductor în timp de 5 ore?

* * *

1975. O derivație este formată din trei conductori paraleli cu rezistențele respective: 6 ohmi, 3 ohmi, 4 ohmi. Să se calculeze rezistența întregii derivații și intensitatea curentului la fiecare ramificație, știind că intensitatea curentului neramificat este de 3 amperi.

* * *

1976. Un elev și-a planificat citirea unei cărți de 240 pagini într-un anumit număr de zile. Două zile a citit conform planului; însă a treia zi a citit doar 28 pagini și pentru ca să-și termine cititul cărții la termenul fixat a trebuit ca în zilele următoare să citească în plus cîte 10 pagini pe zi. In cîte zile a citit el cartea?

Dorel Abagiu, elev, R. Vîlcea

1977. Să se arate că

$$1 - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2^2}\sin^2 x - \frac{1}{2^3}\sin^3 x + \ldots = \frac{2}{2 + \sin x}$$

C. Ionescu-Țiu

1978. Să se arate că

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} + 2\frac{a^2-1}{a^2+1} + 2^2\frac{a^{2^2}-1}{a^{2^2}+1} + \ldots$$

$$+ 2^{2^n}\frac{a^{2^n}-1}{a^{2^n}+1} = 2^{2^{n+1}}\frac{a^{2^{n+1}}-1}{a^{2^{n+1}}+1}.$$

C. I. Ț.

1979. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri oarecare în același plan avînd laturile paralele între ele. Să se construiască numai cu rigla un triunghi $A''B''C''$ în același plan cu triunghiurile date astfel ca să avem: 7 aria ABC = 16 aria $A''B''C''$.

Radu Stroe, elev, Ploești

1980. Să se reprezinte grafic funcția

$$y = \frac{(x-1)(x-6)}{(x+2)(x-4)}$$

apoi să se rezolve inegalitățile

$$3 > \frac{(x-1)(x-6)}{(x+2)(x-4)} > \frac{1}{2}.$$

* * *

1981. Fie M un punct în planul triunghiului ABC și A', B', C' picioarele cevienelor lui. Dacă două dintre patrulaterele $BCB'C'$, $CAC'A'$, $ABA'B'$ sînt inscriptibile atunci și al treilea este inscriptibil, iar patrulaterele $AB'MC'$, $BC'MA'$, $CB'MA'$ sînt de asemenea inscriptibile. Să se arate că în acest caz M este ortocentrul triunghiului ABC.

N. Mihăileanu

1982. Dacă n este un număr întreg și pozitiv $3^{2n+3} + 40 \cdot n - 27$ este divizibil cu 64.

* * *

1983. Să se arate că n fiind întreg și pozitiv, avem:

$N_1 = 2^{8n+2} + 7^{4n+4}$ este divizibil cu 13;

$N_2 = 2^{8n+6} + 7^{8n+6}$ nu este divizibil cu 13;

$N_3 = 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ este divizibil cu 13.

* * *

1984. Se dă piramida patrată regulată $VABCD$ și se face o secțiune prin latura bazei AB și mijloacele M și N ale muchiilor VD și VC. Latura bazei acestei piramide este a, iar înălțimea este h. Să se determine volumul piramidei $VABMN$.

Radu Stroe, elev, Ploești

1985. Să se arate că suma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

nu poate fi număr întreg.

* * *

1986. Un fascicul de lumină omogenă pătrunde normal pe suprafața de intrare într-o prismă care are un unghi de refrigență de 30°; fasciculul emergent face un unghi de 30° cu fascicolul incident. Se cere:

1. Indicele de refracție al substanței prismei pentru lumina utilizată;
2. Deviația minimă pentru o a doua prismă de aceiași substanță cu un unghi de refringență de 60°.

Ion Paraschiv, student București

1987. Se leagă în serie 4 acumulatori cu f. e. m. egală cu 2 volți și rezistența interioară $\omega = 0{,}1$ ohmi. La bornele acestei baterii se leagă în derivație un voltmetru, care conține apă acidulată cu acid sulfuric, opunînd o rezistență de 6 ohmi și o rezistență făcută dintr-un fir metalic cu lungimea de 10 m și cu masa de 89 g. Să se calculeze:

1. Presiunea exercitată de gazele degajate timp de o oră prin electroliză, dacă sînt prinse într-un volum de 1 m^3 la 20° C.
2. Cît plumb cu temperatura de 17° se poate topi într-o oră dacă 50% din căldura degajată de rezistență prin efectul Joule-Lenz se pierde

$$\left(D = 8{,}9,\ \rho = 0{,}017\frac{\text{ohmi}\ mm^2}{m^2},\ C_{Pb} = 0{,}03\right).$$

D. Tănase, profesor București

1988. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^4 + y^4 = a$$

$$x\sqrt[6]{\frac{y}{x}} + y\sqrt[6]{\frac{x}{y}} = b$$

Șerb Gabriel Adrian

1989. Tangenta în B la cercul circumscris triunghiului ABC întîlnește în D simediana AS, iar cercul $D(DB)$ în încă aceiași simediană în M și N. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}.$$

Gh. Buiciu

1990. Să se demonstreze că egalitatea

$$\frac{x^4}{y^4}=\frac{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}{(a^2-y^2)(y^2-b^2)}$$

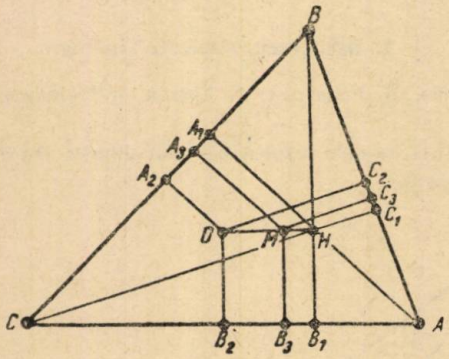
este tot una cu egalitatea

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Gh. Buiciu

Avem:

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}c\operatorname{tg}a}=\frac{(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1}$$



și ținînd seamă de relațiile dinre rădăcini și coeficienți:

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{-\dfrac{m}{m^2+1}+\dfrac{m+2\sqrt{3}}{m^2+1}}{1-\dfrac{m^2-1}{m^2+1}}=$$

$$=\frac{-m+m+2\sqrt{3}}{m^2+1-m^2+1}=\sqrt{3}.$$

Problema 1454

Intru-un triunghi oarecare în care unghiurile sînt în ordinea $A>B>C$ să se arate că:

$$\operatorname{tg}(h_a, x_a)+\operatorname{tg}(h_c, x_c)=\operatorname{tg}(h_b, x_b)$$

unde h_a, h_b, h_c sînt înălțimi, iar x_a, x_b, x_c trei ceviene ale căror picioare sînt proiecțiile unui punct situat pe dreapta lui Euler.

* * *

Soluție și generalizare dată de **Șerb Gabriel Adrian**, Pitești. — Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor, A_2, B_2, C_2 mijloacele laturilor, A_3, B_3, C_3 picioarele cevienelor și M un punct pe dreapta lui Euler.

Avem:

$$AC^2-AB^2=2BC\cdot A_1A_2,$$
$$-BC^2+AB^2=-2AC\cdot B_1B_2,$$
$$BC^2-AC^2=2AB\cdot C_1C_2.$$

Prin adunare obținem:

$$BC\cdot A_1A_2+AB\cdot C_1C_2=AC\cdot B_1B_2$$

sau

$$\frac{2S}{h_a}\cdot\frac{A_1A_2}{OH}+\frac{2S}{h_c}\cdot\frac{C_1C_2}{OH}=\frac{2S}{h_b}\cdot\frac{B_1B_2}{OH}; \qquad (1)$$

Cum

$$\frac{A_1A_2}{OH}=\frac{A_1A_3}{MH},\quad \frac{C_1C_2}{OH}=\frac{C_1C_3}{MH}\ \text{și}\ \frac{B_1B_2}{OH}=\frac{B_1B_2}{MH},$$

relația (1) devine după simplificări $\frac{A_1A_3}{h_a}+\frac{C_1C_3}{h_c}=\frac{B_1B_3}{h_b}$ sau

$$\operatorname{tg}A_1AA_3+\operatorname{tg}C_1CC_3=\operatorname{tg}B_1BB_3.$$

Observare. — Dacă M coincide cu O obținem problema 1454.

Problema 1509

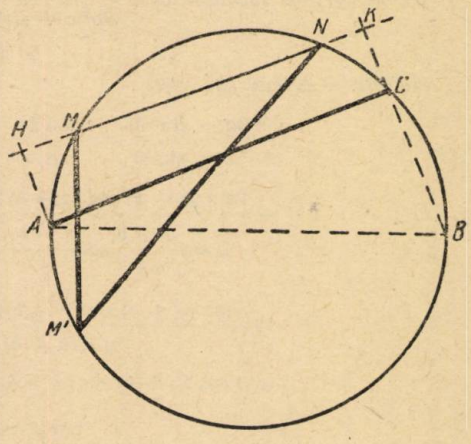
Fiind dat un cerc de diametru AB și fie H și K proiecțiile punctelor A și B pe o coardă MN. Dacă M' este simetricul lui M față de AB să se arate că $M'N=HK$.

Cerc de maremalici, București

Soluție. — Fie C intersecția perpendicularei BK cu cercul.

Triunghiul ABC este dreptunghic în C fiind că este înscris într-un semicerc. Deci cateta AC este paralelă și egală cu segmentul HK. Astfel, arcul AM este egal cu arcul NC.

Punctul M' simetric cu M în raport cu diametrul AB determină arcul AM' egal cu arcul AM. Deci arcul $NC = AM'$ și prin urmare $M'N = AC = HK$.



Problema 1513

Să se rezolve inecuația:

$$\frac{3x+2}{x-5} < \frac{6}{x+2} + \frac{39}{(x+2)(x-5)}.$$

Examen Inst. Mașini Electrice, Craiova

Soluție. — Inecuația se poate scrie:

$$\frac{6}{x+2} + \frac{39}{(x+2)(x-5)} - \frac{3x+2}{x-5} > 0,$$

sau

$$\frac{-3x^2-2x+5}{(x+2)(x-5)} > 0.$$

Avem:

a) $-3x^2-2x+5>0$ sau $3x^2+2x-5<0$; deci: $-\frac{5}{3}<x<1$; $(x+2)(x-5)>0$;

deci $x<-2$ și $x>5$ (nu corespunde);

b) $-3x^2-2x+5<0$ sau $3x^2+2x-5>0$,

deci $x<-\frac{5}{3}$; $x>1$; $(x+2)(x-5)<0$; deci $-2<x<5$.

Soluțiile corespunzătoare inecuației (1) sînt deci:

$$-2<x<-\frac{5}{3} \text{ și } 1<x<5.$$

Au mai dat alte soluții bune: **D. Donescu, I. Cristea, I. Torsan, R. Stroe, F. Torjescu, S. Guiașu, C. Țurlea, M. Filipoiu.**

Problema 1520

Să se rezolve sistemul:

$$\log\sqrt{x} - \log\sqrt{2} = \frac{1}{2},$$

$$2\log x + 2\log y = 2 + \log 2.$$

Inst. Mecanică, Orașul Stalin

Soluție. — Vom avea de rezolvat sistemul

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}\ ;\quad x^2y^2 = 200,$$

care ne dă: $x=20$ și $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluția $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nu convine, întrucît nu ar avea sens $\log\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Problema 1522

Să se verifice identitatea: $\dfrac{\sin^2 2a - \sin^2 2b}{\sin^2 a - \sin^2 b} = 4\cos(a+b)\cos(a-b)$.

(Examen Inst. Mecanică, Oraşul Stalin)

Soluţie. — Avem succesiv:

$$\frac{\sin 2a - \sin^2 2b}{\sin^2 a - \sin^2 b} = \frac{(\sin 2a + \sin 2b)(\sin 2a - \sin 2b)}{(\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b)} =$$

$$= \frac{2\sin(a+b)\cos(a-b)\,2\cos(a+b)\sin(a-b)}{2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}\cdot 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}} =$$

$$= \frac{4\sin(a+b)\sin(a-b)\cos(a+b)\cos(a-b)}{\sin(a+b)\sin(a-b)} =$$

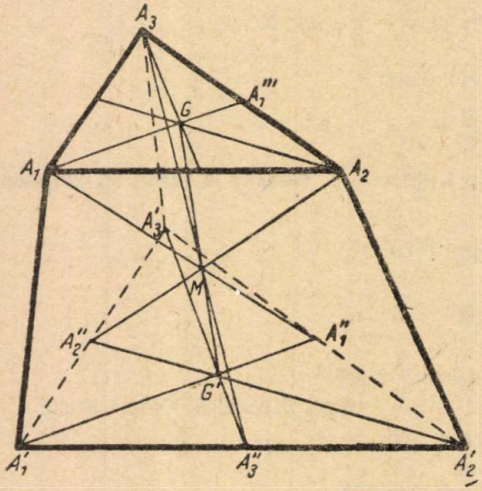
$$= 4\cos(a+b)\cos(a-b).$$

Problema 1551

Dacă într-un trunchi de piramidă $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$ *notăm cu* A_1'', A_2'', A_3'', *respectiv mijloacele laturilor* $A_2'A_3'$; $A_3'A_1'$; $A_1'A_3'$ *ale bazei* $A_1'A_2'A_3'$, *atunci dreptele* A_1A_1''; A_2A_2''; A_3A_3'' *sînt concurente.*

Şerb G. Adrian, elev Piteşti

Soluţie. Fie G şi G' centrele de greutate ale bazelor $A_1A_2A_3$ şi $A_1'A_2'A_3'$. Dreptele A_1G şi $A_1'G'$ fiind paralele, dreptele A_1A_1'' şi GG' sînt situate în planul lor. Fie M intersecţia dreptelor A_1A_1'' şi GG'. Din asemănarea triunghiurilor A_1GM şi $A_1''G'M$, căci $A_1F \parallel A_1''G'$,



rezultă:

$$\frac{GM}{G'M} = \frac{A_1G}{A_1''G'}$$

şi cum notînd cu A_1''' mijlocul lui A_2A_3:

$$A_1G = \frac{2}{3}A_1A_1''',$$

iar

$$A_1'''G' = \frac{1}{3}A_1'A_1'',$$

înseamnă că:

$$\frac{GM}{G'M} = 2\cdot\frac{A_1A_1'''}{A_1'A_1'''}.$$

Analog se arată că dreptele A_2A_1'', A_3A_3'' taie segmentul GG' în punctele M', M'' astfel că:

$$\frac{GM'}{G'M'} = 2\cdot\frac{A_2A_2'''}{A_1'A_2''} \quad ; \quad \frac{GM''}{G'M''} = 2\cdot\frac{A_3A_3'''}{A_3'A_3''}, \tag{2}$$

unde A_2''' şi A_3''' sînt punctele analoage lui A_1'''.

Dar cum triunghiurile $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ sînt asemenea, raportul medianelor lor este egal cu raportul de asemănare și deci:

$$\frac{A_1A_1'''}{A_1'A_1''} = \frac{A_2A_2'''}{A_2'A_2''} = \frac{A_3A_3'''}{A_3'A_3''}$$

iar din (1) și (2) obținem:

$$\frac{GM}{G'M} = \frac{GM'}{G'M'} = \frac{GM''}{G'M''}$$

și cum segmentul este împărțit într-un raport dat de un singur punct și numai unul singur, însemnă că punctele M' și M'' se confundă în M. Deci dreptele A_1A_1'', A_2A_2'', A_3A_3'' sînt concurente.

Observare. — Prin analogie și dreptele $A_1'A_1'''$, $A_2'A_2'''$, $A_3'A_3'''$ sînt concurente într-un punct N, simetricul lui M față de mijlocul lui GG'.

Soluția II-a, dată de *I.I.Cristea*, Constanța.— Triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $A_1'A_2'A_3'$ fiind omotetice (centrul de omotetie pe direcția GG' și prelungirea muchiilor A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $A_1''A_2'A_3''$ sînt omotetice, căci triunghiurile $A_1'A_2'A_3'$ și $A_1''A_2''A_3''$ sînt asemenea și admit același centru de greutate. Deci dreptele A_1A_1'', A_2A_2'' și A_3A_3'' care unesc vîrfurile omoloage ale triunghiurilor $A_1A_2A_3$ și $A_1''A_2''A_3''$ sînt concurente tot pe dreapta GG' într-un punct M, conjugatul armonic al centrului O de omotetie al triunghiurilor $A_1A_2A_3$ și $A_1'A_2'A_3'$, într-un punct N, simetricul lui M față de mijlocul lui GG'.

Problema 1552

Să se arate că într-un patrulater complet $ABCDMN$ există relația:

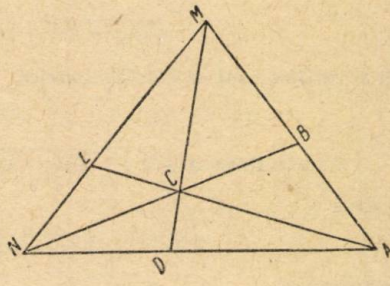
$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{MC}{MD} = \frac{NA}{NB}\cdot\frac{NC}{ND}.$$

Mihail I. Popescu, student, București

Soluție. — Dreptele AC și MN se taie în punctul L. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiurilor ABC, ADC și transversalei MLN, obținem respectiv

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{LC}{LA} = +1,$$

$$\frac{MC}{MD}\cdot\frac{ND}{NA}\cdot\frac{LA}{LC} = +1,$$



relații care înmulțite dau:

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{MC}{MD}\cdot\frac{ND}{NB} = +1,$$

de unde rezultă relația din enunț:

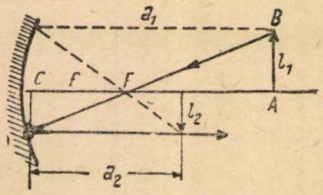
$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{MC}{MD} = \frac{NA}{NB}\cdot\frac{NC}{DN}.$$

Problema 1553

Să se demonstreze că raportul lungimii imaginii pe care o dă o oglindă concavă față de lungimea obiectului este egal cu raportul distanței lor pînă la oglindă.

* * *

Soluție. Din asemănarea triunghiurilor ABF și CDF urmează direct:



$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{f}{a_1 - f}.$$

Din formula oglinzii concave:

$$a_2 = \frac{a_1 f}{a_1 - f}.$$

De aici,

$$\frac{l_1}{l_1} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Problema 1579

Se consideră următoarea reacție chimică:

$$x \cdot NO_3H + y \cdot HCl = z \cdot H_2O + u \cdot NO + v \cdot Cl_2.$$

Să se determine algebric numerele întregi x, y, z, u și v.

* * *

Soluție. — După legea conservării energiei numărul de atomi din fiecare element care intră în reacție trebuie să fie egal cu numărul atomilor care ies din reacție. Astfel, pentru N, H, O și Cl avem respectiv: $x = u$; $x + y = 2z$; $3x = z + u$; $y = 2v$. Eliminînd pe x, y, z din aceste relații obținem: $2v = 3u$, deci avem: $v = 3t$ și $u = 2t$.

Deasemenea, $u = x = 2t$ și $y = 2v = 6t$, $z = 2u = 4t$. Pentru $t = 1$ avem $v = 3$, $u = 2$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 6$, $y = 6$, $z = 4$, iar reacția chimică se scrie:

$$2NO_3H + 6HCl = 4H_2O + 2NO + 3Cl_2$$

Problema 1607

Să se demonstreze că dacă $a \leqslant b$ și $c \geqslant d$, avem:

$$(\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(c-d)^2}) = (a - b - c + d)^2$$

și

$$(\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{(c-d)^2})^2 = (a - b + c - d)^2$$

Să se verifice apoi cu valori numerice.

C. I. Ț.

Soluție. Dacă $a \leqslant b$; $\sqrt{(a-b)^2} = b - a$

și dacă

$$c \geqslant d\ ;\quad \sqrt{(c-d)^2} = c - d,$$

prin urmare,

$$(\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(c-d)^2})^2 = (-a + b + c - d)^2 = (a - b - c + d)^2$$

și

$$(\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(c-d)^2})^2 = (-a + b - c + d)^2 = (a - b + c - d)^2.$$

Verificare: punînd spre exemplu, $a = 1$, $b = 2$, $c = 8$, $d = 5$, obținem:

$$(1 + 3)^2 = (-4)^2 \quad \text{și} \quad (1 - 3)^2 = (2)^2.$$

Problema E: 553

In care sistem de numere există relația

$$\left(\frac{2}{12}+\frac{1}{10}\right)\frac{120}{102}=1$$

(numărul abc în baza x se scrie ax^2+bx+c*).*

Kiss Elemer, profesor

Soluția dată de elevul **Ioan Gervescu**, cl. VII, Roznov. — Notăm baza necunoscută cu x. În cazul acesta relația se va transforma în următoarea ecuație:

$$\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}\right)\frac{x^2+2x}{x^2+2}=1.$$

Efectuăm și avem:

$$\frac{2x+x+2}{x^2+2x}\cdot\frac{x^2+2x}{x^2+2}=1;\quad \frac{3x+2}{x^2+2}=1,$$

$$3x+2=x^2+2;\quad 3x=x^2;\quad x=0 \text{ și } x=3.$$

Deci relația este scrisă în baza 3.

Problema E: 569

O barcă cu motor a coborît pe un riu distanța de 28 km *și apoi s-a înapoiat după 7 ore. Care este viteza bărcii pe o apă stătătoare știind că viteza rîului este de 3* km *pe oră.*

Soluție dată de elevii **I. Gervescu** și **M. Leaț** din cl. VII, Roznov (P. Neamț). — Notăm cu x viteza bărcii într-o apă stătătoare și avem:

$x+3$ viteza bărcii în josul apei,

$x-3$ viteza bărcii în susul apei.

Timpul total este

$$\frac{28}{x+3}+\frac{28}{x-3}=7 \text{ ore}$$

Adunăm fracțiile și simplificînd obținem: $x^2-8x=9$; $x^2-8x+16=9+16$; $(x-4)^2=25$; $c-4=5$; $x=9$ km pe oră; $x-4=-5$ sau $x=-1$ nu convine.

PROBLEME PROPUSE

2012. Toate cercurile ce trec printr-un punct A și au centrele pe un cerc O de rază R, sînt tăiate după cîte un diametru de un cerc cu centrul într-un punct B care este simetricul punctului A în raport cu centrul O și de rază R_1, rază care este dată de relația

$$2R_1^2=4R^2+AB^2.$$

D. C. Panu, Galați

2013. Se consideră într-un plan două cercuri de centre A și B și de rază r și R, astfel încît al doilea trece prin centrul primului. Un mobil M descrie cercul A cu o mișcare uniformă cu viteza a. Să se calculeze viteza și accelerația unui mobil P care descrie cercul B, astfel ca punctele P, A, N să fie în linie dreaptă. Să se arate un dispozitiv tehnic simplu pentru realizarea practică a mișcării mobilului P. Care va fi expresia vitezei și accelerației lui P cînd M are o mișcare oarecare pe cercul A?

Alexandru Stoenescu

2014. Se ia un punct M care împarte latura AB a patratului $ABCD$, apoi se ia un punct N pe DM și un punct P pe NC, astfel că:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{DM} = \frac{CP}{PN}.$$

Să se arate că este necesar ca dreptele PB și NM să fie paralele.

Em. Cocoș, student, București

2015. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2.$$

C. Ionescu-Țiu

2016. Să se construiască triunghiul ABC cînd se cunoaște mărimea bisectoarei AA', unghiul α dintre bisectoarea AA' și mediatoarea laturei BC, precum și distanța dintre A' și piciorul mediatoarei.

A. Orheianu

2017. Se dă un cerc (O) de diametru AB. Pe tangenta în B la cerc se ia punctul C, astfel încît $OC = AB$. Se construește tangenta CT la cerc și se unește punctul C cu punctul A. Se duce apoi, dreapta AT. Perpendiculara pe AB în punctul O întîlnește dreptele AC, CT și AT respectiv în punctele M, P și D. Să se arate că:

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{PD} = \frac{11}{OD} \tag{1}$$

și

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OD} = \frac{2}{OP}. \tag{2}$$

Lucian Mănescu, R. Vîlcea

2018. Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare avem relația:

$$(2r_b r_c - bc)\sin A \cos B = (2 r_c r_a - ca)\sin B \cos A$$

și încă două relații analoage. Notațiile sînt cele obișnuite.

Ilie N. Constantinescu

2019. Într-un cerc cu centrul O și de rază R se înscrie un triunghi ABC. Presupunem că baza BC este fixă, iar vîrful A este mobil pe cerc. Fie diametrul AN. Paralelea din N la BC întîlnește înălțimea din B în punctul D. Să se găsească locul geometric al punctului D.

Dragomir Șt. Donescu, Focșani

2020. Să se arate că:

$$2 \operatorname{arc\,tg}\, 10 + \arcsin\frac{20}{101} = \pi \text{ și}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

* * *

2021. Să se arate că:

$$\frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x} + \left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) = 0.$$

Schip Z. Harry, student, București

2022. Să se arate că polinomul:

$$x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$$

este divizibil prin $(x-y)(y-z)(z-x)$ şi să se afle cîtul.

* * *

2023. Pentru care valori ale lui x avem:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$$

şi pentru care valori ale lui x avem:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

C. Ionescu-Ţiu

2024. Să se simplifice fracţia:

$$\frac{x^4+x^3+2x^2+3x-3}{x^5+2x^3+x^2-3x+3}.$$

* * *

2025. Într-un tetraedru în care perechile de muchii opuse au direcţii perpendiculare, înălţimile şi perpendicularele comune celor trei perechi de muchii opuse trec prin acelaşi punct.

* * *

2026. Se dă o dreaptă xy şi două puncte M şi N situate în acelaş plan. Să se determine pe dreapta xy punctele A, B şi D astfel ca să avem:

$$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{CM}{CN},$$

unde C este intersecţia dreptelor MN şi xy.

Stelian Găină, student, Bucureşti

2027. Se consideră trei cercuri tangente exterioare. Fie A,B,C centrele acestor cercuri, α punctul de tangenţă al cercurilor cu centrele în B şi C, iar β şi γ punctele de tangenţă analoage. Să se demonstreze că punctele $A'(BC,\beta\gamma)$, $B'(AC,\alpha\gamma)$ şi $C'(AB,\alpha\beta)$ sînt colineare.

Gh. Dobrotescu, Predeal

2028. O rază de lumină cade razant pe faţa unei prisme; această rază iese prin cealaltă faţă a prismei sub un unghi de emergenţă α. Dacă unghiul prismei este φ şi indicele său de refracţie este n, să se demonstreze că

$$\sqrt{n^2-1}=\frac{\cos\varphi+\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

* * *

2029. Două oglinzi sferice, una concavă alta convexă, au aceiaşi axă principală şi razele de aceiaşi lungime $R=2$ m; ele sînt aşezate la 2,50 m una de alta. La 1,50 m de oglinda concavă se găseşte un obiect luminos AB perpendicular pe axă. Razele luminoase sosesc unele pe oglinda convexă după reflexia lor pe oglinda concavă, altele pe oglinda concavă după reflexia lor pe oglinda convexă. Se întreabă, unde se vor forma imaginile provenind de la fiecare din aceste duble reflexiuni. Să se construiască aceste imagini.

* * *

2030. Două sfere dintre care una are un volum de 4,190 cm^3, iar alta de 28,260 cm^3 sînt încărcate cu electricitate de același fel. Distanța între centrele lor fiind de 12 cm, forța de respingere este de 4 dyne. După ce au fost puse în contact se separă și se așează la aceiași distanță ca și prima dată. Respinderea care se exercită între ele este acum 6 dyne. Să se afle sarcinile inițiale.

Virgil Atanasiu

2031. Care este cantitatea de cupru depusă la catod în 10 minute dacă prin baia de sulfat de cupru trece un curent furnizat de o baterie alcătuită din 6 elemente Leclanché legate în serie: *a)* în cazul cînd electrozii sînt de fier; *b)* în cazul cînd electrozii sînt de cupru. Se ia rezistența băii și electrozilor 0,2 Ω, iar f.e.m. a unui element Leclanché 1,5 V; rezistența unui element 0,5 Ω, f.e.m. de polarizare 1 V; echivalentul chimic al cuprului 31,8.

Virgil Atanasiu

2032. Doi conductori de nichelină avînd fiecare o lungime de 10 m și secțiunile respectiv de 2 mm^2 și 5 mm^2, sînt legați în serie. Ce cantitate de căldură degajă fiecare conductor atunci cînd prin ei trece un curent electric, dacă împreună degajă 14 calorii?

Jaica I. Florea, elev, Slatina

2033. Două oglinzi sferice concave sînt așezate față în față astfel că axele lor coincid. Distanța dintre vîrfurile oglinzilor este l, iar razele oglinzilor sînt r_1 și r_2. În ce loc se poate așeza o lumînare perpendiculară pe axul principal comun astfel încît mărimea imaginilor formate să fie aceiași?

V. Paraschiv

2034. Pentru frînarea unei roți cu diametru de 2 m, sabotul de frînare apasă pe roată cu 1000 kgf. Se presupune că roata face 400 învîrtituri pînă se oprește. Coeficientul de frecare între sabot și roată fiind 0,2 să se calculeze căldura dezvoltată prin frînare și temperatura sabotului la sfîrșitul frînării, dacă aceasta cîntărește 30 kg și numai 50% din căldură rămîne în sabot. Temperatura inițială a sabotului este de 10° C, iar căldura specifică a materialului din care este confecționat este 0,11 $\frac{cal.}{kg.°C}$.

Ștefan Vasile, elev, Botoșani

PROBLEME PROPUSE LA CERCUL DE FIZICĂ DIN CAPITALĂ ÎN ȘEDINȚA DIN 15 IANUARIE 1956

2035. Un termometru pînă la 450° conține deasupra mercurului o cantitate de gaz a cărui presiune, cînd temperatura este de 0°, este de 1 atm. Capilarul mercurului are dincolo de diviziunea 450° un spațiu mort al cărui volum este egal cu 100 diviziuni. Care este presiunea gazului în capilar, dacă termometrul se află, inclusiv tija gradată, la temperatura 450°.

2036. Un balon sferic are diametrul de 8 m. El este plin cu aer cald, iar greutatea sa proprie este 30 kg. Care trebuie să fie temperatura aerului din interior pentru ca balonul să poată ridica o greutate de 70 kg? Temperatura exterioară = 10°C; presiunea atmosferică = 760 mm Hg.

2037. Un balon de sticlă B cu capacitatea de 200 cm^3 este legat de un tub cilindric $t\,t'$ lung de 50 cm și cu secțiunea de 1 cm^2, al cărui capăt t' este introdus într-o cuvă cu mercur, temperatura fiind 20°C și presiunea atmosferică 74 cm Hg. Se întreabă: pînă la ce înălțime se va urca mercurul în tub, dacă temperatura devine 0° și presiunea atmosferică 76 cm Hg? Se neglijează dilatarea sticlei și lungimea porțiunii de tub ce intră în cuvă.

2038. Două baloane de sticlă A și B de capacitate 2 și 4 litri respectiv, comunică printr-un tub de secțiune neglijabilă și conțin la începutul experienței aer la 0°C și 760 mm Hg. Se încălzește balonul A la 100° și balonul B la 200°.

a) Care va fi presiunea în sistem?

b) Care este cantitatea de aer ce trece dintr-un balon într-altul?

2039. Ce volum ocupă, la temperatura de 20° și la 750 mm Hg, gazele obținute prin electroliza unui kilogram de apă?.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE[1]) PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: 761. Moș Niculae cheltuiește în fiecare an pentru fiecare nepoțel o sumă de bani egală cu patratul vîrstei acestuia. Nepoțeii au vîrste diferite. Nu există gemeni printre ei. În anul acesta, Moș Niculae va cheltui cu 47 lei mai mult ca în anul trecut. Puteți afla cîți bani a cheltuit Moș Niculae anul acesta?

Se mai dă o indicație: suma cheltuită anul acesta se termină cu 13.

* * *

E: 762. Intr-o gospodărie agricolă colectivă s-au strîns de pe un cîmp $103\frac{11}{12}$ tone de fîn, de pe un al doilea 98,250 tone, iar de pe al treilea $215\frac{5}{6}$ tone. O parte din fîn a fost depus pe o arie pe care ar fi încăput 70 % din tot fînul, dar pe arie se mai găseau 15,4 tone de fîn. Restul de fîn a fost adunat în clăi care cuprindeau cantități proporționale cu numerele $2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{7}, 1\frac{1}{2}$.

Cît fîn se găsește în fiecare din cele patru clăi?

M. Săndulescu, București

E: 763. Trei copii trebuie să împartă între ei 23 lei, astfel ca primul să ia 1/2, al doilea 1/3, iar al treilea 1/8. Cum ei nu reușesc să-și împartă banii, un coleg le spune: vă mai dau dela mine un leu ca să vă împac. Avînd acum 23 + 1 = 24 lei, primul ia 24: 2 = 12 lei, al doilea ia 24:3 = 8 lei și al treilea 24:8 = 3 lei. În totul ei au luat 12 + 8 + 3 = 23 lei și colegul lor își ia înapoi leul. Cum se poate ca fiecare să ia mai mult decît i se cuvine și totuși colegul lor mai mare să-și poată lua înapoi leul pe care li-l dăduse?

* * *

E: 764. Brațele de muncă ale unei G.A.S. au fost repartizate în felul următor: la cules de sfeclă de zahăr au plecat jumătate din brațele de muncă și încă trei tovarăși; la cules de porumb au plecat jumătate din rest și încă 10 tovarăși; la semănăturile de toamnă au plecat 3/4 din rest și încă 3 tovarăși; iar restul de 10 tovarăși au fost repartizați la alte munci. Să se afle numărul brațelor de muncă repartizate fiecărei munci.

Man Octavian

E: 765. Să se verifice identitatea:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)=4.$$

Gh. I. Stoian, student, București

---

[1]) V, E: 763, 764, 766, 770, 773; VI, E: 761, 762, 765, 767, 771; VII, E: 768, 769, 772, 774, 775.

E: 766. Vîrsta mea, adunată cu vîrsta celor două surori ale mele Mariana și Ioana, dă numărul 42. Peste 8 ani vîrsta mea va fi de două ori vîrsta mea de acum 8 ani plus de două ori vîrsta Marianei tot acum 8 ani. Peste 8 ani vîrsta Ioanei va fi cît de două ori vîrsta mea de azi. Care este vîrsta fiecăreia dintre noi?

Adriana Demajo, elevă București

E: 767. Se dă un triunghi isoscel ABC, avînd baza AC și se duc medianele AF și CE din unghiurile egale, care întîlnesc laturile opuse în punctele F și E. Fie D punctul de intersecție a celor două mediane. Ducîndu-se EN și FH paralele respectiv cu AF și CE care se întîlnesc în punctul M, să se arate că patrulaterul $DEMF$ este un romb. * * *

E: 768. Să se arate că:

$$\frac{(a+b-c)^2}{c}+\frac{(a-b+c)^2}{b}+\frac{(b+c-a)^2}{a}+$$
$$+8(a+b+c)=(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Const. Rotaru, elev, Suceava

E: 769. Paralelogramul $ABCD$ are laturile de mărimi constante și vîrfurile C,D fixe, iar unghiurile variabile. Să se determine:

1) locul geometric al punctului I comun bisectoarelor interioare ale unghiurilor A și B;

2) locul geometric al punctului I' comun bisectoarele exterioare aceloraşi unghiuri.

N. C. Ciomu

E: 770. O gospodărie agricolă colectivă are 3 parcele semănate cu grîu. Suprafața primei parcele este egală cu suma dintre suprafețele parcelei a doua și a treia. Suprafața parcelei a treia este dublul suprafeței parcelei a doua. De pe parcela a doua s-a recoltat în medie, 24 q de grîu la ha. Recolta totală s-a pus în trei hambare în modul următor: în primul hambar s-a pus o pătrime din toată recolta și încă 24 q; în al doilea hambar s-a pus o treime din rest și încă 32 q; iar restul de 96 q s-a pus în al treilea hambar. Recolta medie la ha de pe prima parcelă este trei pătrimi din recolta medie la ha de pe parcela a doua; iar recolta medie de pe parcela a treia este 5/6 din recolta medie la ha de pe parcela a treia. Să se afle recolta totală de grîu.

Man Octavian

E: 771. La un magazin de stat sînt vîndute 55 paltoane bărbătești și de copii cu suma din care 4 % este 1380 lei. Un palton bărbătesc costă 750 lei iar unul de copil costă 40 % din prețul paltonului bărbătesc. Cîte paltoane bărbătești și cîte de copii sînt vîndute?

Gelu Ionescu, elev Roman

E: 772. Să se arate că:

$$(a^2-ab+c^2)^2-2(c^2+a^2-ab)(c^2-b^2+ab)+(b^2-ab-c^2)^2=(a-b)^4.$$

Silviu Guiașu, elev, Oradea

E: 773. Pentru a se construi un zid de piatră al cărui volum este de 60 m.c. se folosește un mortar cu o concentrație de 280 kg ciment la m.c. Știind că mortarul intră în zidăria de piatră în proporție de 32 % și că în timpul efectuării lucrării se mai pierde 3%, să se calculeze cantitatea de ciment necesară construirii zidului.

Mircea Ionescu, Sinaia

E: 774. Suma a trei numere luate cu zeci consecutivi este 90. Citul dintre primele două numere este 1 și restul 10; iar raportul dintre al treilea număr și primul este 2. Să se afle numerele.

Boris Baieră

E: 775. Să se arate că:

$$(1955^3+1)(1956^3+1)=(1955\cdot 1956-1)+(1955+1956)^3.$$

Miron Oprea

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

În cursul lunii august 1955 s-au evidențiat următorii rezolvitori de probleme din «*Gazeta Matematică și Fizică*», *seria B*, după cum urmează:

Rotaru Constantin, absolvent Suceava și student Iași: *Sorescu I. Victor*, absolvent Pitești; *Voinea Dorin*, clasa IX ș.m. 2 Craiova; *Boloca Ion*, clasa X Cîmpulung Moldovenesc; *Cristea I. Ion*, student București; *Zgăvîrdea Dumitru*, absolvent Caransebeș; *Ene Ion*, student București; *Donescu Șt. Dragomir*, student București; *Colibaba Tiberiu*, student București; *Grosu Gh. Florin*, clasa X Galați; *Niculescu M. Iulian*, clasa IX Turnu Măgurele; *Stepan Ion*, an III Constanța; *Căluianu Nicolae*, absolvent Roman; *Oprea Gh. Constantin*, Sinteștii-Vidra; *Elenberg Manfred*, student București; *Stoian I. Gheorghe*, student București; *Bogaciu Valeriu*, absolvent Pitești; *Melica Axente*, student București; *Murărescu Gheorghe*, clasa IX Roman; *Cristea Miron*, absolvent Toplița; *Savin I. Dan*, student Petroșani; *Pupăzan V. Nicolae*, U. M. Sibiu; *Niță Gheorghe*, absolvent Brăila; *Stroe Radu*, student Fac. arhitectură București, *Mitrofan I. Gheorghe*, student Electronică București; *Hodiș Gheorghe*, absolvent Zalău; *Popescu Paul*, clasa X. ș.m. 11 București; *Florescu Gh. Mircea*, student București; *Chitucea Eugen*, clasa X ș.m. 1 Craiova; *Roșianu C. Dragomir*, student Petrol și Gaze București; *Voinea I. Constantin*, clasa IX ș.m. 1 Craiova; *Dumitrescu Aurel*, clasa X-a Curtea de Argeș; *Cristea Aurel*, clasa X Focșani; *Țiru Emil*, student Iași; *Mișcol M. Mircea*, absolvent Giurgiu; *Mocanu Șt. Gheorghe*, student București; *Iorgulescu Alexandru*, clasa IX Urlați București; *Arsenovici Tiberiu*, clasa X Timișoara; *Panaitopol V. Laurențiu*, clasa IX Giurgiu; *Bercovici Izu*, clasa IX Focșani; *Drăgan Șt. Marin*, student București; *Pleniceanu A. Ioan*, absolvent Calafat și student Petroșani; *Gherman Corneliu*, clasa VIII Botoșani; *Stănășilă Octavian*, student București; *Ancuțoiu I. Gheorghe*, clasa IX R. Vîlcea; *Hegedüs Attila*, clasa IX Tg. Mureș; *Weiss Adolf*, clasa X Reșița; *Hodor D. Constantin*, clasa VII-a Roznov, P. Neamț, *Schileru I. Dinu*, clasa X ș.m. 1 București; *Mateescu N. Tudor*, absolvent Caransebeș; *Stănescu St. Nelu*, clasa X Giurgiu; *Mihăileanu N. Constantin*, clasa IX ș.m. 1 Timișoara; *Tudor S. Tiberiu*, clasa X Tg. Mureș; *Rus A. Ioan*, student Cluj; *Alexa I. Dumitru*, absolvent Iași; *Drăghicescu Inocențiu*, student București; *Motoc I. Ioan*, student București; *Guiașu Silviu*, absolvent Oradea; *Mihalache Traian*, student București; *Matei Aurel*, clasa IX-a Tg. Mureș; *Corbu Ion*, clasa, X, ș.m. 1 București și *Focșăneanu I. Ioan* clasa IX-a Piatra Neamț.

* * *

Pînă la 1 *septembrie* 1955 *s-au mai primit cel puțin cîte zece soluții bune la problemele propuse în numerele* 4, 5, 6, 7 *ale Gazetei Matematice și Fizice, seria B, dela rezolvitorii din localitățile care încep cu literele A—Z, după cum urmează*:

ADJUD. Clasa IX-a. Ciorcea N. Nicolae (1616, 620, 628, 635, 640, 642, 647, E: 638, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650).

AIUD. Clasa VIII-a. Suciu I. Ioan (1562, 565—570, 574, 577, 580). Clasa IX-a Ocna Mureș: Singerean Maria (1635, 640, E: 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 652). Școala medie de băieți nr. 1. Clasa IX-a. Fischer Gheorghe (1 62, 565, 567, 580, 619, 627, 628, 633, 634, 635, 640—648, 652, 657, 681, 685, 686, 687, 688, 692—701, 706).

ALBA IULIA. Clasa VIII-a. Mandel Robert (1563, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576); clasa IX-a. Voicu Virgil (1562, 565, E: 625, 634, 638, 640, 641, 643).

BACĂU. Clasa VIII-a. Vasilache Ioan (E: 612, 620, 625, 627, 629, 630, 655, 656, 667, 668); clasa IX-a. Schmelzer Magda (1567, 574, 644, 646, 647, 650, 651, 652, 653, 685, 686, E: 637); clasa X-a. Vasiliu Monica (1565, 577, 641, 645, 651, 652, 679, 681, 685, 696, 698, 701, 727, 733, 734, 735, 736, 738, 746, E: 641, 649, 652, 655, 663, 665, 667, 668),

Zilberman Mircea (1655, 656, 663, 666, 668, 669, 673, 674, 685—689, 695—699, 706, 724), absolvent. Onofrei N. Grigore (1561, 562, 565—570, 574, 575, 577, 582), Hărîboi Mihai 1565, 1566, 567, 568, 569, 574, 578, 635, 640, 643, 649, 652); clasa IX-a, Borca. Naghi Mariana (1566, 569, 621, 628, 635, 650, 688, E: 640, 644, 647).

BAIA MARE. Absolvent Fejeş Ludovic (1561, 580, 638, 640, 649, 651, 684, 685, 691, 693, 695 697, 715), Sîrbu Nicolae (1561, 622, 623, 640, 646, 649, 655, 677, 684, 685, 687, 689, 691, 693, 695, 696, 697, 706, 707, 715).

BÎRLAD. Clasa VII-a Păunești Adjud. Apostu C. Ioana (E: 626, 633, 639, 645, 646, 648, 652, 658, 664, 669, 676), Şerban Ligia (E: 625, 626, 633, 643, 644, 645, 646, 648, 650, 656, 657, 663, 664), Şerbănescu Cornel (E: 643, 645, 646, 648, 650, 653, 656, 657, 663, 665, 668, 669).

BOTOŞANI. Clasa VIII-a. *Gherman Corneliu* (1562, 566, 568, 569, 577, 578, 580, 616, 621, 627, 635, 638, 640, 642, 645, 654, 655, 656, 666, 668, 672, 673, 674, 681, 684, 688, 697, 698, 724, E: 625, 626, 628, 634, 638, 639—647, 650, 651, 654, 655, 656, 660, 664, 663, 665, 667, 668, P), Arion Adrian (1672, 674, 681, 684, 688, 697, 717, 724, 730, 744, E: 626, 629, 638, 639, 643, 644, 647, 650).

BRĂILA. Absloveni. Danciu. O. Victor (1560, 561, 563—570, 574, 575, 579, 580, 582, 585, 588, 589, 592), *Niță George* (1561, 564—570, 562, 574, 577, 578, 582, 625, 634—636, 640, 642, 653, 655, 670, 672, 676, 678, 681, 688, 691, 694, 697, 699, 701, 706, 707, 718, 721, 724, 727, 733, 747, 762, 763, 768).

BUCECEA (Botoşani). Absolvent Ionescu V. Mihai (1560, 561, 565, 566, 569, 570, 640, 641, 644, 646—649, 651—653, 685, 688, 697, E: 612, 634, 637, 638, 640, 647, 643).

BUHUŞI (Bacău). Student fără frecvență Donea Sorin (1567, 574, 575, 640, 646, 647, 687, 688, 689, 697, 706).

BUCUREŞTI. Studenți: Andreşoiu Glauco Inst. C.F.R. (1635—645, 647, 649, 650—653), Cîrstoiu C. Barbu (1562, 565—596, 574, 635, 656, 639, 640, 641, 670, 672, 685, 687—689, 693, 696), *Colibaba Tiberiu* Fac. Electronică (1655—658, 661—674, 677, 681—691, 693, 695—699, 726—730, 733—738, 740—744, 747, 748, 750—752, 754—55 probleme, P), *Cristea I. Ioan* Fac. matematică (1560—582, 612, 625, 628, 635—653), *Donescu Şt. Dragomir* Inst. Politehnic (1562, 567, 574, 609, 610, 612—614, 616—625, 627—629, 631—658, 666, 668, 670, 672—675, 677, 681—693, 695—701, 705—707, 709, 711, 714, 715, 718—721, 724), *Ene Ion* (1609, 614, 616, 618, 621—623, 625, 628, 629, 631—644, 646—658, 665—674, 677, 681—690, 692, 693, 695, 697—701, 703, 705—707, 709, 701—712, 714, 715, 718 720, 721, 724—77 probleme, P), Mihalache Traian (1636, 637, 640—643, 644, 646—653, 655, 658, 670, 672—674, 677, 681, 682, 685, 686, 688, 689, 693, 695, 697—699, 706, 707, 721, P), *Melica Axente George* Fac. matematică şi fizică (1612, 617, 620, 622, 623, 628, 633, 635, 636, 637, 863, 641, 642, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 655, 656, 674, 683, 684, 686, 687, 688, 690, 691, 697, 699, 706, 707, 711, 726, 728, 751, 799), *Mocanu St. Gheorghe* Fac. matematică (1560—582, 612, 622, 623, 625, 628, 634, 639, 643—653, P), *Moloc I. Ioan* (1618, 621—623, 635, 640—643, 648, 649, 651—653, 655—658, 668, 673, 674, 677, 681, 684, 685, 687—689, 691—693, 695, 697, 699, 701, 706, 707, 800), Popescu Şerban Inst. Pedagogic, 1620, 635, 640, 650, 651, 655, 672, 681, 690, 697, 698, 700, 701, 704, 705, 707, 724), Stănăşilă Octavian Fac. matematică (1608, 611, 612, 625, 628, 654—658, 660, 661, 674, 681—697, 699, 706, 707, 713, P), *Stoian I. Gheorghe* (1616, 619, 628, 633, 634, 655, 656, 658, 660, 666, 668—670, 672, 681—682, 685, 686, 688—690, 692, 693, 696, 697, 699, 702, 718, 721, 727, 728, 730, 733—736, 738, 747, 751, 753, 754, 760, 762, 766, 770, 774, 781, 799, 800, 803), *Ellenberg I. Manfred*, Instit. Construcții (1560—1570, 572—582, 620, 627, 637, 639, 6640, 642, 644—647, 648—652, 654—660, 672, 674, 677, 681—699, 706, 707), Crăciun Constantin Fac. matematici (1561, 562, 564, 566—569, 560, 643, 672, 673, 681, 697, 724), *Drăgan Şt. Marin* (1654—656, 664—666, 668, 670—675, 677—679, 681—685, 687—690, 692, 697—699, 706, 714, 715, 717, 721,

P), Drăghicescu Inocenţiu (1628, 635, 636, 638, 39, 641—653, 655, 668, 670, 672—764, 681, 683—690, 694, 695, 697, 698, 699), *Florescu Gh. Mircea* Inst. Politehnic (1561, 562, 564—569, 574, 575, 577, 578, 579, 589, 592, 635, 636, 640, 644, 646, 649, 650, 651, 652, 653, 668, 673, 674, 677, 682, 685, 687, 688, 689, 695, 687, 699, 706, 707, 719, P), Ionescu Cornel 1611, 616, 618, 621—623, 627, 629, 634—646, 648—653), Lebădă Laura Facult. de chimie (1562, 565, 567, 568, 570, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 582), Litinschi Mihai, Institutui Politehnic (1628, 635, 636, 638, 640—643, 646, 648, 650, 651, 662, 725, 730, 733, 734, 748, 762, 800), Lungu Ovidiu, Fac. Electronică (1560—564, 566, 567—572, 574, 577, 578—580, 582), *Mitrofan I. Gheorghe*, Fac. Electronică, (1654—658, 661, 666—670, 672—691, 693—695, 698—703, 705, 706, 707, 709—711, 714, 715, 720, P), Muşatescu Gabriela (1565, 567, 572, 574, 575, 582, 673, 674, 685, 687, 688, 689, 697, P), Racoveanu Em. C. (1561, 564—570, 574, 577, 580, 582, 587—592, 594, 597, 600, 603, 706, 707, 721), *Roşianu C. Dragomir* Inst. Petrol şi Gaze (1568, 575, 582, 623, 632, 633, 643, 651, 655, 656, 658—670, 673, 677, 681, 684, 685, 686, 688, 689—692, 695, 697, 715, 718, 726, 747, P), Săndulescu Alecu, Fac. Matematică f.f. (1567, 570, 574, 618 621, 635, 640, 663, 666, 733, 735, 740, 742, 750, 774, 775, 778), *Stroe Radu*, Fac. Arhitectură (1610, 613, 614, 620, 621, 638, 660, 664, 666—670, 673, 682—684, 687, 691, 696, 699, 707, 719—721, 724, 726—738, 740, 742, 744, 745, 747, 748, 751, 752, 754, 759, 762, 768, 769, 770, 772, 775, P), Şerbescu M. Alexandru (1562, 565, 567, 574, 580, 582, 618, 622, 623, 636, 636, 639, 640, 641, 646, 647, 649, 653, 670, 681, 684, 688, 690, 697, 698, 715, 724), *Zaharescu Marius*, Fac. Mecanică (1560—570, 572, 574, 576—582, 616, 627, 628, 635, 640, 642, 644, 645, 647, 650, 651, 652, 653, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 1 « *Nicolae Bălcescu* ». Clasa VI-a. Ghelmeziu Nicolae (E: 632, 634, 644, 646, 649, 652, 658, 663, 668); clasa IX-a. Emanoil Alexandru (1654, 655, 657, 658, 666, 667, 669, 672, 674, 678, 679, 686, 688, 697, 698, 701, 705, 707, 724, P); clasa X-a. Cincu S. Adrian (1572, 573, 574, 618, 622, 623, 631, 632, 635, 636, 638, 639, 640, 646, 647, 649, 650, 651, 653), Corbu Ion (1640, 642, 644, 646, 648, 650, 651, 652, 657, 673, 674, 681, 687, 688, 689, 693, 695—699, 701, 706, 724, 727, 728, 730, 733, 734), *Schileru I. Dinu* (1572, 575, 638, 647, 653, 664, 695, 707, 711, 714, 718, 721, 726, 727, 728, 730, 734, 736, 738, 739, 745, 747, 748, 750, 751, 753, 754, 759, 770, 774, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 4 « *Aurel Vlaicu* ». Clasa VIII-a. Dobre Cornel (E: 655, 665, 669, 674 676, 680, 689, 694, 700, 701, 703, 704, 707), Rădulescu Marin (1818, E: 669, 674, 694, 697, 698, 699, 700, 703, 707), Ştefănescu Viorel (1672, 674, 680, 688, 700, 703, 704, 730, 733), Toader M. Gheorghe (1730, 733, E: 607, 669, 671, 672, 674, 676, 680, 682, 689, 700, 701, 703), Udrea Dumitru (E: 655, 662, 665, 669, 670, 676, 700, 703, 704); clasa IX-a. Dinu N. Vasile (1635, 640, 726, 730, 733, 800, E: 640, 642, 643, 645, 680), Bejan I. Alexandru (1726, 730, 733, 800, E: 640, 643, 645, 647, 655, 658, 672, 674), Ionescu Mircea (1635, 640, 646, 646, 654, 663, 665, 672, 673, 674, 685, 686, 688, 689, 693, 694) E: 640 640, 643, 647, 679, 680, 684, 685), Mustăreaţă Boris (1640, 674, 688, 697, 730, 733, E: 638, 640, 647, 650, 654, 655, 658. 664, 672, 688), Popescu D. Alexandru (1635, 640, 655, 692, E: 640, 643, 645, 654, 658, 688), Rădulescu D. Constantin 1674, 688, 724, 730, 733, E: 640, 643, 667, 672, 679, 680, 689), Teodorescu Ioan (1635, 638, 640, 464, E: 638, 640, 641, 643, 644, 647), Teodorescu Radu (1655, 656, 666, 668, 669, 681, 688, 692, 694, 698), Teliu Constantin 1635, 644, 655, 656, 664, 668, 674, 688, 697, 701, 726, E: 635, 640, 669, 672), Schwartz Arnold (1635, 640, E: 640 E: 640, 643, 647, 678, 680, 684, 685, 688), Zamfirescu Gheorghe (1640, 730, E: 638, 640, 643, 655, 658, 667, 672, 674, 688); clasa X-a. Armăşelu Dumitru (1655, 673, 688, 697, 698, 728, 730, 733, 816, 820), Baciu I. Valeriu (1655, 666, 668, 674, 681, 688, 697, 699, 701, 706, 726, 727 728, 730, 737), Blidaru Lucian (1566, 568, 569, 570, 575, 578, 580, 582, 635, 636, 640, 641 647, 649, 650, 651, 652, 653, 681, 688, 694, 697, E: 614, 615, 618, 628, 634, 638, 640, 643, 646, 647, 650), Bucică Mihai (1726, 727, 728, 730, 733, 734, 735, 738, 740, 742, 743, 747, 759, 760, 761, 762), Crăciun Gheorghe (1566, 568, 569, 570, 635, 640, 646, 674, 688,

E: 643, 644, 646, 647, 649, 650), Cristache Aurel (1565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 575, 635, 640, 644, 651, 652, 730, 634, E: 640, 646, 647, 649, 650, 652), Dicu Constantin (1447, 449, 578, 568, 569, 570, 635, 636, 640, 668, 688), Filcescu Viorel (1566, 567, 568, 569, 635, 640, 641, 688, 728, 730, 734, E: 634, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652, 703), Giurgea Cornel (1640, 730, 733, E: 638, 640, 644, 647, 650, 661, 668), Mihalache Marin (1567, 574, 635, 674, 688, 726, E: 640, 643, 647, 655), Nistreanu Valeriu (1654, 655, 656, 659, 663, 669, 672, 688, 698, 699, 701, 705, 706, 724, 747, 762), Voinea P. Marin (1655, 688, 697, 728, 730, 816, 818, 820, 824), Zgreabăn Ioan (1640, 643, 644, 649, 651, 652, 674, 681, 685, 688).

Şcoala medie de fete nr. 8. Clasa VI-a. Mazilu Luminiţa (1750, E: 641, 641, 652, 653, 656, 657, 657, 668, 669, 677, 678).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa X-a. Mateescu Anca (1562, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 577, 575, 577, 578, 580), Vasiliu Viorica (1566, 567, 569, 572, 635, 640, 642, 655, 697, 706, E: 663); clasa VII-a. Predoiescu Marieta (E: 611, 612, 638, 640, 643, 646, 656, 657, 663, 668).

Şcoala medie de băieţi nr. 11. Clasa VIII-a. *Crăciularu Marcel* (1562, 565, 566, 568, 569, 577, 635, 640, 642, 646, 667, 730, 739, E: 626, 634, 636, 637, 638, 640, 643, 644, 646, 649, 650, 652, 654j655, 663, 664, 665, 667, 668, 669, 672, 673), Nicolae M. Valentin (1719, E: 652, 653, 655, 665, 667, 668, 669, 671); clasa X-a *Popescu Paul* (1616, 622, 623, 625, 628, 632, 635, 636, 640, 641, 642, 643, 644, 647, 649, 650, 651, 652, 653, 655, 656, 668, 669, 670, 672, 674, 675, 681, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 694, 695, 697), Velculescu S. Aurel (1591, 672, 696, 697, 698, 699, 701, 714, 724, 727, 728, 730, 733, 736, 737).

Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa V-a. Crăcea Dumitru (E: 638, 640, 641, 643, 650, 653, 655, 668, 678, 688); clasa VII-a. Petrică Nicolae (E: 615, 616, 626, 636, 637, 653, 655, 663, 664, 667, 676); clasa IX-a. Fluerașu Cezar (1568, 621, 627, 635, 640, 643, 645, 654, 678, 688). *Lerner Emil* (1561, 566, 567, 569, 570, 577, 585, 594, 601, 602, 607, 610, 624, 629, 655, 659, 672, 700, 701, 705, 706, 711, 719, 724, 729, 762, P).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa IX-a. Enescu Cornelia (1580, 561, 563, 564, 566, 568, 569, 578, 582, 635, 640, 643, 646, E: 625, 626, 629, 634, 637, 638,540, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652).

Şcoala medie de băieţi nr. 17. Clasa VIII-a. Gemis Genan (1602, 635, 640, E: 611, 627, 638, 639, 640, 647, 665), Paşa Florin (E: 628, 647, 649, 640, 651, 652, 655, 656, 661, 663, 664, 668); clasa IX-a. Păunescu I. Lucian (1666, 669, 672—674, 677, 681, 685, 687, 688, 689, 693—695, 699).

Şcoala medie de fete nr. 19. Clasa X-a. Nicolau Ileana (1621, 634, 636, 638, 646, 681, 683, 698, 706).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. Clasa VII-a. Bogdan Alecu (E: 626, 631, 637, 638, 639, 640, 643, 647, 648, 650, 654, 656, 659, 661, 665, 668); clasa VIII-a. Mustăţea Aurel (19565, 566, 568, 569, 577, 535, 640, 646, 654, 672, 681, 697, 724, 730, 734, E: 626, 634, 638, 640, 643, 644, 647, 650, 652, 654, 655, 656, 674).

Şcoala medie de fete nr. 21. Clasa IX-a. Demayo Adriana (1724, 726, 730, E: 656, 663, 667, 672, 673, 674, 735, 730, 743, 738, 754, 773, P).

Şcoala de 7 ani de fete nr. 25. Clasa VII-a. Repciuc Rodica (E: 602, 615, 616, 618, 619, 626, 627, 631, 640, 643).

Şcoala de 7 ani de fete nr. 98. Clasa VII-a. Pădureţ Victoria (E: 638, 640, 643, 644, 646. 647, 648, 650).

Şcoala de 7 ani nr 119. Clasa V-a. Mira Eugen (E: 624, 625, 627, 628, 629, 630, 631, 633, 639, 648, 656, 657, 658, 665, 668, 677, 678); clasa VII-a. Tohăneanu Florin (E: 592, 593, 600, 601, 602, 603, 605, 607, 608, 611, 640, 647).

BUZĂU. Absolvent Boerescu Dragoş (1635, 636, 673, 674, 681, 685, 688, 689, 690, 690, 697, 698, 714, 715).

CALAFAT. Clasa IX-a. Ghinea I. Petre (1565, 566, 567, 568, 569, 730, 733, 738, E: 625, 626, 637, 656, 658, 665, 668), absolvent Caraş Nicolae (1635, 638, 640, 642, 645, 647, 649, 650, 651, 653), *Pleniceanu A. Ioan* (1561, 568, 572, 574, 578, 580, 582, 618, 621, 622, 623, 626, 635, 636, 640, 641, 644, 647, 650, 651, 652, 653, 681, 685, 688, 689, 690, 691, 693, 695, 698, 693, 727, 728, 739, 759, 773, 772, 774).

CĂLĂRAŞI. Clasa VII-a. Costescu Carmen (E: 638, 640, 643, 647, 650, 653, 655, 656, 657, 658); clasa X-a. Belcin Adriana (1567, 569, 574, 635, 640, 646, 706, 729, 730, 733), absolvenţi: Colţea A. Valeriu (1635, 636, 655, 658, 664, 670, 674, 681, 683, 684, 685, 688, 689 690, 693, 695; 696, 687, 698, 699, 706, 707, 709, 714, 715, 720), *Vasilescu Aurel* (1632, 656, 670, 672, 673, 674, 681—696, 698, 699, 701, 706, 707, 715, 721, 724, 730, 731).

CARACAL. Clasa VII-a. Mihăilescu I. Viorel (1663, 730, 733, 735, E: 646, 653, 655, 656, 667, 676, P).

CIULNIŢA. Tractorist s.m.t. Banu Alexandru (1658, 673, 674, 681, 683, 685, 687, 688, 690, 693, 694, 695, 696, 705, 726, 728, 730, 732, 737, 742, 762, 774, 776).

CARANSEBEŞ. Absolvenţi: Lăbău Ananie (1560, 561, 563, 564, 565, 566, 567, 569, 571, 572, 574, 575, 578, 580, 581, 582), *Maleescu N. Teodor* (1560—565, 574, 582, 585, 618, 621—623, 632, 635, 638, 640, 642, 645, 646, 649, 654, 655, 657, 666, 668, 669, 672, 673, 674, 688, 697, 706, 714, 715, E: 612, 615, 622, 634, 640, 641, 643, 644, 656, 647, 648, 649, 650, 651, 652), Sederiniuc Aurel 1562, 564, 565, 574, 575, 582, 585, 618, 621, 622, 623, 632, 635, 640, 643, 644, 646, 649, E: 610, 612, 615, 616, 622, 634, 638, 640, 643, 644, 645, 646, 649, 650, 652), *Zgăvîrdea Dumitru* (1558, 560, 561, 562, 563, 565, 566, 567, 569, 570, 572, 574, 575, 576, 577, 580, 583, 585, 588, 589, 591, 616, 618, 621, 622, 623, 625, 634, 636, 637, 638, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 657, 669, 672, 673, 674, 677, 681, 682, 683, 685, 686, 687, 688, 689, 691, 697, 699, 701, 706, 707, 714, E: 636—638, 640, 634, 644, 646, 647, 649, 652, 660, P).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa X-a. Neagoe Leonid (1562, 565, 567, 568, 573, 621, 631, 663, 666, 706, 724).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Clasa X-a. *Boloca Ion* (1516—518, 522, 524—526, 529, 530, 532—534, 536, 544, 558, 560—562, 564—670, 573—575, 577, 578, 583, 585, 594, 601—603, 605—607, 613, 615, 620, 625, 627, 628, 635—637, 640—645, 647—653, 681—694, 696—699, P).

CÎMPIA TURZII. Clasa VIII-a. Pick Gheorghe (1565, 566, 568, 569, 570, 577, 578, 634, E: 626, 627, 634, 638, 639, 640, 643, 646, 650, 651).

CERNAVODĂ (Constanţa). Clasa IX-a. Budur Tiberiu (E: 640, 642, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 658, 665).

CHITILA. Clasa VII-a. Chisaru Ioan (1635, 640, 730, E: 592, 633, 638, 640, 644, 647, 663, 664, 676).

CLUJ. Şcala medie de energie electrică. Anul II. Butnaru Damian (1560, 566, 567, 569, 574, 578, 581, 631, 635, 640, 646). Şcoala medie de băieţi nr. 4, clasa IX-a. Bîrzan Armand (1654, 655, 666, 668, 669, 672, 674, 681, 688, 694, 701, 721, 724, 727, 730, 737, 736, 738, 750, 753, 768). Student *Rus A. Ioan* (1620, 625, 665, 665, 668, 670, 672—677, 681, 683—693, 697, 699, 701, 706, 707, 708, 711, 726, 727, 728, 744).

CONSTANŢA. Şcoala hidrotehnică, anul III. Stepan Ionel (1566, 563—572, 574, 755 578—582, 618, 621—623, 634—638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649—653, 673—677; Şcoala medie de băieţi. Clasa IX-a. Ionescu Ion (1567, 568, 578, 635, 640, 646, 657, 673, 727, 728, 730, 733, 735, 738), Manolescu I. Ilie (1565, 566, 567, 568, 569, 574, 575, 578, 580, 640, 641 646, 647, 649, 650, 652), Vlaicu Margareta (1664, 668, 669, 672, 730, 733, E: 639, 651, 659 662, 663), Ianuş Stere (1568, 578, 635, 640, 642, E: 624, 626, 627, 628, 631, 634, 636, 638

640, 647, 648), absolvent Budur I. Marcel (1528, 560, 561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 574, 575, 597, 635, 640, 644, 647, 650, 729, 730).

CORABIA. Şcoala medie mixtă. Clasa X-a. Şarpe I. Dumitru (1649, 650, 652, 653, 654, 655, 658, 659, 663, 665, 666, 667, 669, 670, 672. 673, 675, 677, 678, 681, 683, 687. 589).

CRAIOVA. Şcoala medie nr. 1 de băieţi. Clasa IX-a *Voinea I. Alexandru* (1650, 655, 656, 657, 658, 660, 672, 674, 677, 681, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 696, 695, 697, 699, 701, 706, 714, 718, 726, 727, 728, 730, 733, 736, 737, 744, 746, 760, 762, 763, P), Stăncculescu Adrian (1575, 580, 582, 657, 659, 666, 669, 672, 673, 674, 706). Clasa X-a. Bărbuică Nicolae (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570,571, 572, 573, 574, 577, 578, 579, 580, 581, 582), *Chitucea Eugen* (1561, 572, 621—623, 635, 636,640, 642, 646, 648, 650, 653, 674, 681—685, 687—691, 693, 695, 697—699, 715, 718, 726, 728, 730, 748), Hulubei Valeriu 1637, 638, 660, 664, 666, 668, 672—674, 677, 678, 679, 681, 682, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691—699), absolvent indescifrabil (1561, 566, 569, 578, 590, 618, 622, 623, 632, 635, 636, 640, 641, 644, 647, 650, 652, 653, 670, 674, 677, 681, 688, 689, 690, 706, 707, 715).

Şcoala medie nr. 2. de băieţi. Clasa IX-a. Climov Victor (1561, 567, 640, 646, 683, 688, 694, 697, 739, E: 640, 643, P), Voinea Dorin (1560—582, 634—653, E: 616, 621, 622, 623, 625—631, 633—644, 646, 647, 649—652, P).

Şcoala medie nr. 3 *de fete.* Clasa IX-a. Georgescu Ileana (1563, 566, 570, E: 640, 641, 643), student electrotehnică Ţenescu Virgil (1618, 621, 623, 635, 640, 641, 643, 644, 646, 649, P).

Şcoala de 7 *ani Orodel.* Clasa VII-a. Cojocaru M. Constanţa (E: 618, 624, 625, 630, 634, 638, 640, 644, 646, 650).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa IX-a. Teodorescu Dorin (1635, 640, E: 639, 640, 643, 647, 650, 655, 663, 664), clasa X-a. Bardar Marilena (1569, 570, 574, 575, 580, 635, 637, 640, 641, 644, 648, 649, 650, 651, 721), *Dumitrescu I. Aurel* (1609, 614, 623, 641, 643, 647, 651, 654, 656, 657, 665, 667, 672, 677, 681, 682, 683, 684, 685, 699, 690, 693, 695, 698, 699, 700, 701, 705, 706, 711, 714, 715, 717, 719, 720, 721, 724, 751, 759, 770, P).

DOROHOI. Absolvent Mircea Nicolae (1570, 635, 636, 639, 641, 643, 646, 647, 674, 681, 688, 697, 698, 699, E: 627, 655, 663, 664, 665).

DRĂGĂŞANI. Absolvent Burlacu I. Ştefan (1561, 564, 565, 567, 568, 574, 621, 635, 643, 644, 646, 649, 662, 668, 678, E: 638, 640, 643, 647, 651).

FĂGĂRAŞI. Clasa X-a. Matic Cornel (1565, 566, 567, 569, 574, 577, 580, 582, 635, 640, 642, 643, 645, 650, 653).

FIERBINŢI (Regiunea Bucureşti). Clasa VIII-a. Preda Vasilica (1646, 655, 665, 674, 688, E: 640, 641, 643, 655).

FOCŞANI. Clasa VIII-a. Dinulescu Horia (E: 596, 597, 600, 601, 603, 606, 608, 614, 616, 618, 620, 625, 638); clasa IX-a. Bercovici Izu (1575, 612, 620, 641, 642, 643, 647—650, 775, 786, 787, 670, 673, 674, 683, 688, 689, 693, 687, 707, 714, 728, 730, 733, 740, 747, 774, 652, 653, 657, 800, 803), Buşe M. Constantin (1575, 589, 643, 647—653, 670, 673, 674, 683, 688, 689, 714, 728, 730, 733, 740, 747, 774, 786, 800, 803), Mărgean Elena (1562, 565, 566, 569, E: 593, 596, 600, 601, 602, 603, 605, 607), Stoica N. Const. (1648, 664, 672, 674, 681, 688, 687, 730, 733, 734, 738), Tigănuş Mircea (1634, 650, 651, 653, 655, 656, 666, 670,672—674, 681, 685, 688—690, 693, 695, 687, 706, 707, 718, 721, 724, 730, 734, P); clasa X-a. *Cristea Aurel* (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 481, 482, 635—653, P).

GALAŢI. Clasa VIII-a. Brînduşescu Elisabeta (E: 638, 639, 640, 643, 644, 647, 650, 655, 662, 663); clasa X-a. *Grosu Gh. Florin* (1560—585, 587—607; 47 probleme), Kahane Eduard (1562, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 580, E: 625, 634, 636, 637), absolvent Ciurdea Eugen (1656, 657, 668, 669, 670, 673, 674, 681, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 692, 695, 698, 699, 706, 721).

GIURGIU. Clasa VII-a. Stăncescu Virgil (E: 614, 615, 636, 638, 640, 644, 647, 652, 663, 665); clasa IX-a. *Panaitopol V. Laurenţiu* (1571, 572, 583, 604, 631, 649, 654, 655, 656, 663, 665, 666, 667, 669, 672, 673, 674, 681, 684, 688, 689, 693, 696, 697, 701, 706, 707, 714, 715, 717, 724); clasa X-a. *Stăncescu Şt. Nelu* (1562, 565, 578, 582, 583, 601, 603, 605, 607, 608, 611, 620, 627, 634, 635, 640, 641, 645, 646, 658, 659, 667, 670, 680, 681, 692, 697, 699, 717, 727, 728, 730, 733, 734, 738), absolvent *Mişcol M. Mircea* (1608, 611, 612, 616, 618, 621, 622, 632, 634, 640, 641, 642, 644, 646, 647, 649, 650, 651, 652, 673, 674, 676, 677, 683, 684, 685, 686, 688, 689, 690, 693, 695, 697, 706, 707, 709, 714, 715, 720, 721).

HÎRLĂU. Clasa VIII-a. Ţibuleac Florin (1584, 588, 590, 601, 603, E: 610—623).

IAŞI. — Studenţi: Grecu P. Eugen (Inst. Construcţii) (1655, 656, 666, 670, 674, 681, 683, 690, 696, 697, 701, 706, 707, 724, 730, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 747), Juncu Gelu (Fac. matematici) 1618, 621, 622, 623, 635, 639, 640, 641, 644, 648, 649, 651, 652, 653, 655, 656, 666, 670, 674, 677, 684, 685, 688, 689, 690, 695, 706, 720, 726, 730), *Ţiru Emil* (1636, 640, 655, 659, 672, 673, 681, 685, 687, 689, 692, 695, 720, 727—731, 733, 737, 738, 740, 743,

744, 746, 747, 749, 752, 753, 759, 760, 774, 775, 776, 783, 784, 785, 789, 794, 799, 800, 803, 815, 818, 827, P), *Rotaru Constantin* (Institutul Politehnic) (1608, 611, 612, 692, 726, 727, 728, 730, 733, 734, 735, 736, 739, 740, 742, 747, 748, 751, 752, 753, 759, 760, 762, 763, 765, 770, 774, 775, 781, 783, 784, 786, 787, 792, 799, 800, 801, 803), Porţeanu Mircea (1623, 636, 658, 670, 677, 683, 684, 685, 687, 689, 693, 695, 703, 706, 714, 715, 721, 728, 732, 734, 743, 759, 760, 774, 776, 800); Şcoala tehnică de maiştri. Ariton I. Vasile (1522, 526, 531, 532, 535, 540, 545, 551, 555, 588); VII-a. Marinescu Alexandru (E: 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 653, 655, 656, 668); clasa VIII-a. Cuşmaru Ilie (1566, 568, 569, 640, 646, 774, E: 625, 634, 636, 637, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 650, 652, 659, 663, 672), Feldman Milu (1566, 568, 569, 578, 621, 640, 646, E: 625, 626, 636, 637, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 650, 663, 665), Şor Lieber (1566, 568, 569, 578, 621, 640, 646, E: 656, 625, 636, 637, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 650, 652, 663), absolvent. *Alexa I. Dumitru* (1612, 651, 655, 656, 673, 674, 681, 682, 684, 687, 688, 689, 693, 697, 699, 706, 707, 714, 718, 726, 728, 730, 733, 739, 740, 748, 762, 763, 770, 771, 775, 776, 777, P).

ORADEA. Absolvent. *Guiaşu I. Silviu* (1573, 608, 610, 611, 612, 636, 637, 638, 654, 655, 656, 657, 658, 668, 672, 673, 674, 677, 681, 682, 683, 684, 685, 688, 689, 690, 691, 693, 697, 698, 699), P), Bobe Niculae (1565, 566, 567, 568, 569, 643, 650, 653, 682, 683, 692, 694, 695, 696, 697, 699), Breban Mircea (1672, 685, 686, 688, 689, 697, 698, 706, 707, 715, 717, 724, P).

ORAŞUL STALIN. Clasa VIII-a. Dragomir Adrian (1615, 619, 627, 628, 629, 631, 635, 636, 637, 638, 640, 642, 643, 646, 648, 650), Jinga Gheorghe (1516, 525, 545, E: 604, 610, 611, 612, 614, 615, 616, 618, 619, 620, 621), Tarţa Mircea (E: 638, 640, 642, 644, 646, 647, 649, 650, 652, 655, 656, 658, 664, 668); clasa X-a. Ciobanu I. Ioan (1513, 516, 562, 567, 568, 570, 574, 579, 580, 588, 646, 653), Minea Florin (1561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 577, 578, 580. 585, 592, 600, 601, P), Păcurariu Dan (1560—572, 574, 577, 578—582, 628, 635, 636, 638, 640, 642, 643, 646, 648, 649), Tofan Mircea (1561, 563, 566, 635, 642, 649, 683, 685, 689, 693, 697), absolvent Ioniţă Tudor (1560, 561, 562, 583, 584, 585, 588, 589, 590, 591, 592, 594, 598, 600, 602, 603, 604, 605, 606, 607).

PANCIU. — Şcoala medie mixtă. Chiper Romeo (1528, 531, 589, 640, 648, 667, 674, 688, 706, E: 665).

PIATRA NEAMŢ. — Şcoala de 7 ani Roznov, clasa VII-a. *Hodor D. Const.* (1730, 733, 735, E: 624, 625, 629, 633, 636, 638, 639, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 651, 652, 653, 655, 656, 658, 664, 668); clasa VIII-a. Arîcov Rodica (E: 611, 612, 614, 619, 620, 622, 625, 634, 638, 640, 643, 644, 647, 650, 652, 655), Gervescu M. Ion (1663, 665, 666, 669, 730, 733, 735, 738, 742, 750, 772, 775, 778, E: 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 667, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 676, 677, 678, P).

PETROŞANI, Studenţi Inst, de Mine. *Pleniceanu Ion* (1561, 562, 565, 567, 568, 574, 580, 582, 618, 622, 635, 636, 638, 644, 646, 647, 650, 652, 685, 688, 689, 690, 693, 695, 697, 698, 701, 706, 707, 710, 715, P), *Savin I. Dan* (1654—661, 663—699, P; 42 probleme); clasa IX-A. Redl Clara (1560, 561, E: 626, 628, 631, 634, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 646—650, 652); clasa X-a. Nistor Cornel (1561, 562, 565, 567, 568, 570, 575, 577, 578, 582, 635, 640, 641, 642).

PITEŞTI. — Clasa VIII-a. Păun Ioana (1568, 672, 681, 688, 696, 697, 726, 730, 734, 752, E: 615, 644, 646, 653, 657, 660, 663, 665, 672, 676). Absolvenţi: *Bogaciu Valeriu*, (1560—592, 594, 596—607, P, 46 probleme), Gulie I. Nicolae (1651, 668, 670, 673, 674, 677, 681, 683—686, 688—693, 697, 698, 701, 706, 707, 714, 715), *Sorescu I. Victor* (1513, 515, 517, 531, 541, 642, 544, 557, 560—570, 772, 574—586, 596, 597, 598, 600, 608, 612, 613, 616, 618, 619, 621, 622, 623, 625, 627, 628, 629, 631—638, 640—658; 78 probleme).

PLOIEŞTI. — Clasa VIII-a. Căsăndroiu Tudor (1562, 563, 570, 635, 648, E: 611, 612, 614, 618, 619, 655, 660, 665, 668); clasa X-a. Georgescu Sorin (1561, 564—570, 574, 575, 578, 582, 635, 636, 640, 641, 643, 644, 646, 651, 652), Manciu Rodica (1658, 681, 688, 698, 706, 727, 728, 730, 792). Munteanu Silvia (1567, 574, 592, 626, 640, 644, 646, 647, 648, 649, 651, 652, E: 611, 615, 616, 618, 620, 625, 634, 636, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650).

RÎMNICU SĂRAT. Clasa VIII-a. Jercan Mircea (1621, 717, 714, E: 638, 639, 640, 643, 644, 647, 650, 668, 678, 674); clasa X-a. Ciobănaş Filaret (1560, 562, 563, 565, 566, 567, 568—570, 574, 577, 578, 580, 585, 594, E: 610, 614, 615, 618, 619, 620, 621, 622, 624, 625, 626, 634, 636), Curocichin Veronica (1561, 564, 565, 566, 568, 569, 574, 575, 580, 584, 640, 649, 673, 688, 706, 707).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa IX-a. *Ancuţoiu I. Gheorghe* (1585, 602, 606, 621, 634, 635, 654, 655, 656, 666, 669, 674, 678, 681, 688, 714, 726, 730. 733, 734, 739, 760, 744, E: 610, 614, 620, 634, 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 650, P), Sarion I. Virgil (1567, 574, 635, 640, 641, 681, 683, 683, 686, 688, 697, 727, 728, 730); clasa X-a. Abagiu V. Dorel (1567,

568, 641, 651, 652, 653, 706, 727, 728, 730, 733, 738, 665, 666, 668, 671, 672, 673, 674, 688, 696, 697, P), Grigorescu D. Ion (1565, 566, 567, 568, 569, 574, 578, 580, 635, 640, E: 625, 628, 647, 650), Paulescu N. Dan (1564, 566, 567, 569, 570, 574, 578, 582, 687, 694, 602, 603, 635, 638, 640, 646, 648).

REŞIŢA. Velicov Carmen (1560, 561, 563, 564, 566, 567, 569, 570, 571, 572, 574, 579, 580, 581, 582), *Weiss Adolf* (1560—570, 572, 574, 576—581, 585, 588—592, 606, 618, 622, 623, 635, 636, 638, 640, 640, 642, 644, 646, 647, 648, 649, 652, 653).

REGHIN. Antonescu Victor (1614, 645, 655, 656, 667, 668, 669, 670, 672, 673, 681, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 693, 695, 697, 698, 699, 706, 707, 715, 718, 721).

ROMAN. Clasa IX-a. *Murărescu Gheorghe* (1509, 549, 551, 556, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574—578, 580, 581, 582, 608, 611, 613, 615, 616, 621, 627, 628, 630, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, P); clasa IX-a. Zaharia Gheorghe (1564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 575, 584, 594), absolvent. *Căluianu Nicolae* (1560—572, 574, 575, 576, 578—582, 609, 616, 618, 621, 622, 623, 631, 634—644, 646—653, 688, 730, 733, 738, 739, 740, 742, 743, 746, 747, 750, 760).

SALONTA. Şcoala de 7 ani Inand, clasa V-a. Indric Corneliu (E: 614, 630, 638, 640, 643, 647, 650, 652, 653, 655); clasa VI-a. Şandor Maria (E: 614, 630, 635, 640, 643, 647, 652, 653, 655).

SIBIU. Clasa VIII-a. Müller Richard (1654, 666, 667, 669, 672, 678, 681, 692, 696, 697, 705, 724, 733, 734, 736, 738, 761, 768, 772, 774, E: 657, 665, 666, 673, 674, 676); clasa IX-a, Dordea Ioan (1561, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 580, 621, 666, 707, 719, 772, 774, 775), Alexandru Gh. (1610, 616, 620, 622, 623, 625, 628, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 649, 650, 652, 653), *Pupăzan V. Nicolaie*, (1608, 611—616, 618—620, 624, 625, 631, 654—658, 660, 664—667, 669, 670, 672—675, 677, 681, 683—685, 687—701, 705, 706, 707, 711, 712, 713, 718, 719, 721, 724).

SIGHIŞOARA. Absolvent. Forcun Mihail (1601, 608, 611, 622, 635, 640, 642, 644, 647, 648, 649, 651, 685, 706, 710, 714, 715, 720, 721, 724, P).

SINAIA, Student f.f. Ionescu N. Mircea (1615, 616, 618, 621, 622, 623, 626, 635, 636, 640, 641, 642, 649, 707, 715, 718, 724, E: 640, P).

SLĂNIC (Reg. Ploieşti). Clasa X-a. Curelea D. Iulian (1565, 566, 567, 568, 569, 574, 578, 628, 640, 641, 646, 668, 681, 693, 697) .

SIGHET. Clasa VII-a. Tomoiagă Doru (1697, 730, 733, 738, E: 652, 656, 657, 668, 669, 672, 678, P).

SLATINA. Absolvent. Antonescu Păun (1683, 685, 687, 688, 689, 691, 693, 695, 706, 707, P).

SINTEŞTI, Vidra (reg. Bucureşti). Student f.f. *Oprea Gh. Constantin* (1511, 513, 515, 518, 520, 522—534, 536, 540, 544—546, 550, 555, 558, 560, 561, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 578, 579, 580, 582, 585, 589, 590, 591, 592, 594, 643, 644, 646, 647, 648, 649, 651, 652, 653, P).

SUCEAVA. Clasa X-a, Creoleanu Nicolae (1567, 568, 574, 635, 638, 640, 646, 648, 651, 663, 666, 669, 674, 688, 697), absolvent. *Rotaru Constantin* (1576, 624, 627, 629, 634, 653—658, 660, 665—668, 670, 671—675, 677, 681—691, 693—699, 701, 705, 706, 707, 709, 711, 714, 715, 718, 719, 720, 721, 724, N, P).

TÎRGOVIŞTE. Clasa VIII-a. Brînzaru I. Traian (1621, 640, 674, 730, 733, 774, 796, E: 638, 670, 676), Stănciulescu M. Mihai (1608, 611, 613, 616, 620, 621, 622, 623, 625, 640, 641, 644, 647, 649, 650, 651, 652, 653, 677, 685, 687, 688, 689, 690, 695, 720, P).

TÎRNĂVENI. Clasa VIII-a. *Piso Pompiliu* (1654, 655, 656, 657, 660, 665, 667, 668, 672, 673, 674, 677, 681, 685, 692, 696, 697, 698, 701, 706, 707, 714, 717, 719, 724).

TÎRGU-JIU. Clasa VIII-a. Aniţescu N. Nicolae (1560, 561—566, 568—570, 578, 579, 585, 602, 604, E: 612, 614, 615, 617, 618, 620, 621, 624, 625, 626, 628, 634, 635, 636, 637); clasa X-a. Popescu A. Iulian (1562, 565, 567, 580, 640, 646, 677, 681, 706, E: 638, 640, 643, 644, 646, 649, 650, 652, 655).

TÎRGU MUREŞ. Clasa VII-a. Neagoe Olimpia (E: 592, 593, 594, 597, 600, 602, 608, 638, 640, 644, 647); clasa IX-a. *Hegedüs Attila* (1634—636, 640, 643, 644, 646—650, 652, 653, 657—659, 667, 668, 672—674, 677, 681, 684, 685, 687, 688, 589, 592, 693, 695, 697, 698, 701, 706, 707), Moga Ion (1566—570, 635, 640, 642, 646, 648), Matei Aurel (1560—572, 574—582, 535, 636, 638, 640—647, 650, 653); clasa X-a. Sasu E. Dorin (1561, 564, 565, 566, 569, 580, 588, 591, 663, 688, E: 640, 644), *Tudor S. Tiberiu* (1562, 565, 568, 578, 579, 655, 656, 663, 664—670, 674, 676 678, 688, 696, 697, 698, 714, 724, 726, 730, 733, 735, 750, 772, 774, E: 634, 642, 655, 656, 657, 659, 663—670, 674, 676, 678).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa IX-a. Bogdan P. Mircea (1561, 564, 565, 566, 568, 569, 570, 572, 574, 577, 580, 635, 640, 642, 643, 644, 646, 647, 650, 652, 653), *Foçăneanu I. Ioan* (1560—571, 573—582, 635—638).

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

TECUCI. Clasa X-a. Grecu Eugen (1561, 564—570, 574, 575, 578—580, 582, 635, 640, 643, 650, 651, 652, 653, E: 626, 634, 638, 639, 640, 643, 644, 646, 647, 650, 652, P), Rotaru Săvel (1564, 567, 568, 574, 577, 578, 590, 592, 643, E: 640), absolvent Herşcovici Avram (1566, 569, 578, 635, 640, 641, 642, 646, 647, 648, 653, 670).

TIMIŞOARA. Clasa VII-a. Mihăileanu N. Alexandru (E: 653, 655, 669, 670, 675, 676, 681, 686, 689, 701); clasa VIII-a. Coşereanu Radu (1730, E: 652, 653, 655, 656, 660, 663, 664, 668, 669, 676); clasa IX-a. *Mihăileanu N. Constantin* (1640, 642, 655, 656, 657, 663, 668, 671, 673, 674, 677, 683, 685, 686, 687, 689, 695, 707, 709, 730), Popa Laurenţiu (1565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 575, 576, 578, 582, 635, 636); clasa X-a. Bărglăzan Mircea (1561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 575, 577, 578, 580, 582), *Arsenovici Tiberiu* (1560—570, 572, 576, 579, 580, 581, 614, 616, 621, 622, 623, 632, 635, 636, 638, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 650, 651, 652, 653), Cismariu Ioana (E: 601, 619, 638, 640, 643, 645, 647, 650, 665), Nerodea Tiberiu (1578, 579, 588, 591, 602, 635, 640, 646, 648, 650, 666, 674, 681, 688, 697, 706, 714, 728, 730, 733, 739, 740, 742, 775), Vasilievici Alexandru (1646, 665, 666, 673, 674, 688, 697, 730, 733, 735, 738, 742, 775, E: 635, 650, 652).

TOPLIŢA (Reg. Autonomă Maghiară). Absolvent *Cristea Miron* (1560, 561, 563—569, 572, 574, 575, 577, 578, 580, 582, 602, 623, 644, 647, 653, 654, 681, 682, 685, 687, 688, 689, 690, 692, 693, 695, 697, 698, 699, 728, 730, 731, 733, 734, 737, 747, 753, 754, 762, 774, 755, E: 624, 625, 626, 629, 634, 636, 637, 638, 640, 643, 646, 647, 649, 650).

TRUŞEŞTI (Suceava). Clasa X-a. Ciubotaru C. Constantin (1655, 657, 658, 666, 668, 677, 669, 681, 685, 688, 693, 694, 701).

TULCEA. Leonid Slavov (1684, 685, 687, 688, 689, 690, 693, 697, 698, 699).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII-a. Sălcianu Tudor (1631, 635, 666, 717, 730, E: 640, 646, 653, 662, 665, 668), Bucată Ioana (1579, 681, E: 610, 620, 646, 653, 655, 656, 657, 662, 668); clasa IX-a. Drăgulinescu Marin (1562, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 576, 578, 580, 582), *Niculescu M. Iulian* (1614, 635, 638, 642, 643, 646, 648, 649, 652, 655, 656, 657, 665, 666, 667, 668, 669, 674, 678, 679, 681, 683, 684, 685, 688, 689, 695, 697, 699, 701, 706, 709, 714, 715, 717, 720, 721, 724, 728, 730, 733, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 747, 760, 774, 775, E: 652, 655, 660, 668).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Ionescu Radu (1635, 636, 640, 644, 646, 648, 651, 652, 668, 685, 687, 688, 689, 693, 695, 696, 697, 699, 701, P), absolvent Buţă Titu (1560, 561, 563, 565, 566, 567, 568, 572, 574, 575, 576, 578, 580, 581, 582, 635, 636, 637, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 648, 652, 653, P).

URLAŢI (Bucureşti). Clasa IX-a. *Iorgulescu Alexandru* (1578, 628, 636, 640, 651, 652, 653, 655, 667, 672, 674, 681, 685, 687, 688, 689, 696, 697, 699, 701, 706, 714, 724, 726, 727, 728, 730, 733, 734, 738, 747, 752, 768, 774, P).

VASLUI. Clasa VIII-a. Barbu Viorel (E: 638, 640, 643, 647, 650, 653, 654, 656, 665, 667, 668).

VIŞEUL DE SUS (Baia Mare). Clasa VIII-a. Vornicescu Nicolae (1724, E: 625, 634, 638, 640, 643, 647, 650, 668, 669, 672, 676).

ZALĂU. *Hodiş Gheorghe* (1560, 562, 563, 565—570, 574, 575, 578, 582, 628, 635, 640—649, 651, 652, 653, 726, 727, 728, 730, 733—735, 738, 748, 752, 754, 768, P).

ROMÎNAŞ. Opriş A. Ioan (1561, 564, 565, 567, 568, 574, 603, 628, 644, 650, 651, 652, 655, 669, 674, 685, 686, 688, 689, 697, 701, 706, 707, 720).

ZIMNICEA. Clasa VIII-a, Gheorghief Petre (E: 626, 634, 636, 638, 640, 641, 643, 650, 652, 653, 654, 655, 656, 659, 663, 667, 668).

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie, iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate *în ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați *Redacției G.M.F. seria B.*

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute și la problemele: 1700, 1702, 1708, 1716, 1723, 1757, 1762, 1769, 1777, 1783, 1804, 1805, 1807, 1808, 1825, 1853, 1854, 1859, 1861, 1872, 1873, 1900 și următoarele. *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului* 1956, *se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul* 1956.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, *însoțite de soluții*, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *În redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante.

— *Tovarăși colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a «Olimpiadei matematice și fizice* 1956», pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile de neprimirea revistei și propuneri sau sugestii în legătură cu tirajul sau întîrzierea revistei se vor face *Oficiului poștal local* sau Centrului de *Difuzare a Presei din București*, Piața Scînteii, Nr. 1.

— Fiecare cititor al G.M.F. seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și altora și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— La exercițiile și problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc rezolvări numai de la elevii claselor a V-a, a VI-a și a VII-a și a VIII-a, de la elevii anului I ai școlilor tehnice de maiștri sau din anul I și II ai școlilor profesionale sau pedegogice de învățători.

Rezolvitorii de probleme sînt rugați să nu trimită plicuri cu mai puțin de zece soluții. Din problemele primite nu se anunță cele incomplect rezolvate, cele care conțin greșeli, cele neglijent redactate, cele care au greșeli de calcul, desene neîngrijit făcute, sau sînt copiate după altele.

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1956

SE FAC LA OFICIILE POȘTALE SAU PRIN FACTORI POȘTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII.

c. 1866. Întreprinderea Poligrafică nr. 4

Prețul Lei 1 exemplarul

E 1426

BUCUREȘTI
ОБМЕН - CMEHA
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA
KAT

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VII — martie 1956

3

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII. Nr. 3 — martie 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *Rolul fizicii în dezvoltarea tehnicii noi* 113
2. *Despre construcţii geometrice de Bitay Ladislau* 115
3. *Forţele nucleare de conf. I. Rişavi*..... 124
4. *Dispozitiv pentru desenarea conicelor D. D. Boiangiu* 128
5. *Caleidoscop matematic* 133
6. *Un model de generator de curent alternativ* 136
7. *Chestiuni de examen (2040—2080)*..... 139
8. *Probleme rezolvate (1449, 1515, 1535, 1554, 1590, 1595, 1596, 1600, 1601, 1633, 1649, 1657, E: 566; E: 608)*..... 143
9. *Probleme propuse (2081—2108)* 154
10. *Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani (E: 776; E: 790)* 158
11. *Rubrica rezolvitorilor de probleme*..... 160
12. *Poşta redacţiei*.....

ANUL VII 3 MARTIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolangiu A.**, asistentă univ., **Ionescu-Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.4653 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VII * Nr. 3 martie 1956

ROLUL FIZICII ÎN DEZVOLTAREA TEHNICII NOI

DIRECTIVELE Congresului al II-lea al Partidului Muncitoresc Romîn trasează sarcini importante în toate domeniile de dezvoltare ale industriei şi agriculturii, adică ale tehnicii noi, şi anume dezvoltarea industriei mijloacelor de producţie, ridicarea nivelului tehnic în toate ramurile economiei naţionale, sectorul socialist în agricultură să reprezinte 60—70% din producţia marfă agricolă vegetală şi animală, dezvoltarea industriei bunurilor de consum şi altele, pe baza cărora se va desfăşura al doilea plan cincinal în vederea construirii socialismului în Patria noastră.

In momentul de faţă, tunelul de la Bicaz a fost săpat. La sfîrşitul celui de-al doilea cincinal, hidrocentrala va produce o putere de 110 000 kW, iar la începutul celui de-al 3-lea cincinal, puterea sa va creşte cu încă 100 000 kW. In industria extractivă s-a creat o ramură nouă: industria minereului de uraniu. Minereul de uraniu este baza unei energii noi — energia nucleară — care va lărgi foarte mult resursele energetice ale economiei noastre.

Pentru realizarea acestor sarcini se deschid perspective nebănuite de progres pentru industrie şi agricultură. Acest uriaş progres nu se poate realiza însă, cu o tehnică înapoiată, ci cu o tehnică modernă, cu o organizare raţională, folosind metodele cele mai avansate.

O tehnică modernă este o tehnică bazată pe cele mai noi cuceriri ale ştiinţei, pe cunoaşterea legilor naturii.

Noul tehnician trebuie să aibă un orizont ştiinţific dezvoltat, trebuie să fie un cunoscător al ştiinţelor fizice şi ale celor mai generale legi ale naturii. Studiul fizicii are mare însemnătate pentru stăpînirea adevărată a tehnicii şi înţelegerea proceselor de producţie. « Atîta timp cît nu cunoaştem legile naturii — spune Lenin — ne facem robi necesităţii oarbe ». Dacă am luat cunoştinţă de aceste legi, care acţionează independent de voinţa şi conştiinţa noastră, noi devenim stăpîni asupra naturii.

Aşa dar, la baza creşterii producţiei şi productivităţii muncii stă tehnica înaintată. Tehnica este totdeauna legată de relaţiile de producţie ale orînduirii sociale respective. Dezvoltarea economiei naţionale este determinată de dezvoltarea industriei şi agriculturii. Dezvoltarea lor cere neapărat, introducerea tehnicii noi, a metodelor noi de muncă. Pentru aceasta este însă necesar să se cunoască temeinic, fizica.

Sarcinile trasate de Congresul al II-lea al Partidului nu pot fi realizate fără o tehnică bazată pe cunoaşterea adîncă a ştiinţei fizice. Rolul important pe care îl are fizica în dezvoltarea tehnicii ni-l arată numeroasele ei aplicaţii practice. Astfel,

electricitatea de exemplu, se aplică în toate domeniile tehnicii. Descoperirea curenților de înaltă frecvență a dus la construirea cuptoarelor de înaltă frecvență, la călirea metalelor cu ajutorul acestor curenți. Electrotehnicienii au efectuat lucrări mari de cercetări și studii asupra teoriei centralelor și sistemelor energetice și în acest fel au putut elabora scheme originale de construcție a centralelor și instalațiilor respective. O serie de probleme tehnice privitoare la înregistrarea vibrațiilor, în aviație, la construcția manometrelor pentru căi ferate, pentru sondaj în medicină, nu ar fi putut fi realizate dacă fizica nu ar fi descoperit fenomenul piezoelectric.

La rîndul ei, fizica se dezvoltă pe baza tehnicii, care îi oferă aparate de cercetare tot mai perfecționate. In afară de aceasta, tehnica pune fizicii mereu probleme care se cer a fi rezolvate. Iată de exemplu, curenții turbionari. Electrotehnica i-a descoperit ca un efect dăunător care apare în miezul de fier al mașinilor electrice și al transformatoarelor. Studiul fizic al acestor curenți, cunoașterea legilor lor, a dus la utilizarea lor tehnologică în topirea metalelor și la încălzirea metalelor pentru călire.

Tehnica și fizica se dezvoltă într-o strînsă interacțiune. Nivelul fizicii, realizările și descoperirile ei reflectă nivelul producției și al tehnicii. Un exemplu este foarte grăitor. Descoperirea undelor electromagnetice a dat posibilitate lui Popov, să pună bazele radiotehnicii. In cadrul acesteia s-a dezvoltat radiolocația, care a dus la apariția unei noi ramuri a fizicii — radioastronomia, știință care permite explorarea spațiului cosmic, studiul meteoriților, etc.

Dacă analizăm care sînt direcțiile mari de dezvoltare ale tehnicii actuale, vom constata că ele sînt: mecanizarea, automatizarea și telecomanda proceselor de producție.

Mecanizarea înseamnă înlocuirea efortului muscular prin acțiunea unor sisteme tehnice (mașini, aparate, mecanisme), lăsîndu-se omului numai sarcina de a manevra și întreține sistemul tehnic respectiv. Mecanizarea este una din principalele direcții de dezvoltare a tehnicii și agriculturii socialiste, care are drept scop ușurarea muncii, lichidarea treptată a muncii grele, precum și asigurarea ritmului accelerat al producției și creșterea productivității muncii.

Automatizarea înseamnă executarea mecanică a sarcinii de manevrare, deservire și chiar de control al sistemului tehnic respectiv. Mașina automată lucrează singură și își adaptează ea însăși funcționarea la cerințele procesului de producție. Omului îi rămîne doar sarcina de a supravechea mașina și de a interveni în cazuri grele.

Telecomandă sau telemecanizare înseamnă comanda și controlul mașinilor și mecanismelor automate, făcută la distanță. Prin telemecanizare mașinile funcționează singure și fără supraveghere. Omul trebuie totuși, să le supravegheze periodic sau să le regleze.

Aceste trei direcții de dezvoltare ale tehnicii socialiste fac munca mai ușoară, mai plăcută, șterg granițele dintre munca fizică și cea intelectuală și duc la o înaltă productivitate a muncii. Realizarea unor astfel de mașini automatizate și telecomandate au la bază cunoașterea celor mai variate fenomene fizice.

Intr-o mașină automată este nevoie de un mecanism care să urmărească mișcările, ei să le adapteze la materialul în lucru. Acest mecanism al mașinii se numește element «sensibil», deoarece înlocuiește organele de simț ale omului. Există elemente sensibile care se bazează pe fenomenul fotoelectric; ele simt cele mai mici variații de intensitate luminoasă transformîndu-le — prin intermediul releelor electromagnetice — în comenzi pentru mașina automată. Există relee care funcționează ca elemente sensibile și folosesc un curent de o sută de ori mai mic decît curentul consumat de becul electric al unei baterii de buzunar.

Rolul fizicii în realizarea celor mai noi aplicații tehnice și biologice este cunoscut. Descoperirea elementelor radioactive are importante aplicații în biologie, medicină. Atomii marcați ajută chimiștilor să studieze mecanismul diferitelor reacții, geologilor să recunoască vîrsta rocilor, metalurgiștilor să recunoască aliajele din diferite materiale fără a le distruge.

Unul din cele mai importante capitole ale fizicii — fizica nucleară — are o largă aplicație practică în toate domeniile. In agricultură s-au făcut experiențe cu suprasulfat radioactiv prin care s-au determinat condițiile de folosire a îngrășămintelor. Izotopii radioactivi sînt folosiți în metalurgie și în construcțiile de mașini, pentru studiul uzurii organelor de mașini, pentru controlul pieselor sudate, etc.

Energia atomică și-a cîștigat un loc de seamă în diferite domenii ale tehnicii avansate. La 27 iunie 1954 a intrat în funcțiune în U.R.S.S. prima centrală electrică din lume, pe bază de energie nucleară, cu o putere instalată de 5000 kW. Motoarele atomice vor pune în mișcare locomotive, avioane, automobile. Rachetele cosmice vor transporta oameni pe alte planete. Energia nucleară va putea transforma natura. Stăpînirea energiei nucleare este o dovadă strălucită a marilor posibilități ale științei și în același timp, o dovadă că industriile noi create vor îmbunătăți procesele de producție. Iată dece studiul fizicii și cunoașterea fenomenelor și legilor după care ele au loc, este o sarcină ce revine oricărui om din societatea socialistă.

In școală, menirea fizicii este de a da elevilor o bază pentru educația politehnică, de a apropia școala de viață, de a orienta mai just pe elevi. Viitorul metalurgist va trebui să cunoască fizica pentru a cunoaște proprietățile metalelor pe care le prelucrează și legile mișcării și funcționării mașinilor unelte. Viitorul aviator trebuie să știe cum iau naștere forțele de interacțiune ale avionului cu aerul, cum funcționează motoarele cu elice și cele cu reacție, radiofonia și radiolocația. Viitorul tractorist sau combiner va trebuie să cunoască și el fizica. Viitorul marinar va trebui să cunoască legile de plutire a vaselor, legile mișcării valurilor, etc.

Studiul fizicii deschide pentru fiecare elev un larg orizont științific, o metodă de gîndire dialectic închegată, care îl face capabil să devină tehnician, constructor, inventator și inovator.

Partidul și guvernul acordă o mare importanță dezvoltării fizicii în țara noastră, asigurînd condiții optime în acest sens.

Profesori și elevi au datoria să intensifice munca pentru ridicarea nivelului științific, să acorde o deosebită atenție științelor fizice, legînd învățămîntul de viață, de activitatea practică.

DESPRE CONSTRUCȚII GEOMETRICE

BITAY LADISLAU
Asistent universitar

ENUNȚUL oricărei probleme de construcții geometrice trebuie să cuprindă două precizări, și anume:

1) datele problemei, adică segmentele, unghiurile, punctele cu ajutorul cărora trebuie construită figură cerută și

2) instrumentul sau instrumentele cu care trebuie făcută construcția.

Este lesne de înțeles că rezolvabilitatea problemei de construcții depinde de instrumentele folosite, de aceea este esențială indicarea instrumentelor admise în construcție. Mai mult, trebuiesc bine precizate acele operații care se pot

face cu instrumentul respectiv. De exemplu, dacă pe riglă avem o gradație sau dacă cele două muchii ale riglei sînt paralele, trebuie să știm că operația de măsurare sau de a duce două paralele cu cele două muchii ale riglei este admisă sau nu.

Instrumentele cele mai simple realizabile în practică și de aceea cele mai răspîndite sînt rigla și compasul. Astfel, istoricește rigla și compasul au devenit instrumente clasice de construcții. Bineînțeles că matematicienii s-au ocupat, pe lîngă rezolvarea problemelor de construcții cu aceste instrumente și cu alte probleme de construcții, mai ales atunci cînd s-au izbit de probleme pe care nu le-au putut rezolva cu rigla și cu compasul. Astfel de probleme sînt cunoscute în număr de trei încă din antichitate. Acestea sînt:

1. Trisecția unghiului: să se împartă cu rigla și cu compasul un unghi dat în trei părți egale.

2. Dublarea cubului: să se construiască cu rigla și cu compasul muchia unui cub avînd volumul îndoit al volumului unui cub dat (problema din Delos).

3. Cuadratura cercului: să se construiască cu rigla și cu compasul latura unui pătrat echivalent cu un cerc dat.

Matematicienii greci, neputînd să rezolve niciuna din aceste probleme, au recurs la alte instrumente de construcții. Astfel, Nicomede a definit o curbă numită conchoida lui Nicomede cu ajutorul căreia se poate împărți un unghi dat în trei părți egale, iar vestitul filosof grec Plato (429—347 î.e.n.) a construit un instrument cu ajutorul căruia se poate rezolva problema din Delos. Mai tîrziu au fost date numeroase metode pentru rezolvarea problemelor 1—2 cu diferite instrumente, pînă cînd s-a demonstrat în general că problemele 1—3 nu se pot rezolva cu ajutorul riglei și compasului. Această demonstrație relativă la problema a treia, adică la cuadratura cercului, s-a făcut abia în anul 1882 de către matematicianul german Lindemann.

Oricare ar fi însă instrumentul folosit la construcție — după cum am arătat mai sus — trebuie să precizăm operațiile care se pot face cu ajutorul lui. Aceste precizări ne dau definiția abstractă a instrumentului respectiv. Să ne mărginim numai la construcții de rezolvat cu ajutorul riglei și compasului și să dăm regulile de folosire ale acestor două instrumente.

1. Punctele A și B fiind date, le putem uni cu o dreaptă.
2. Dintr-un punct dat O cu o rază dată r putem duce un cerc.
3. Dreptele a și b fiind date, putem construi intersecția lor.
4. O dreaptă a și un cerc C fiind date, putem construi intersecția lor.
5. Două cercuri fiind date, putem construi intersecția lor.

Printr-un element (punct, dreaptă, etc.) «dat» înțelegem un element care este cuprins în enunțul problemei sau un element ce se obține în cursul procesului de construcție pornind de la datele problemei. Operațiile 1—2 precizează sub formă abstractă întrebuințarea riglei și compasului, iar operațiile 3—5 ne indică metoda de a obține noi puncte «date». Afară de aceasta, în orice construcție geometrică trebuie să admitem următorul lucru:

6. Putem considera ca element dat un punct oarecare din plan.

Să luăm un exemplu simplu. Fiind dată o dreaptă a și un punct P pe această dreaptă să se construiască *) o perpendiculară pe a în punctul P.

Luînd un punct M oarecare în plan (operația 6) ducem un cerc din centrul P cu raza PM (sau pe scurt: luînd o rază arbitrară din P ca centru descriem

*) Prin convenție, dacă într-o problemă de construcții gometrice nu se precizează instrumentele, atunci se subînțelege *totdeauna* construcția cu ajutorul riglei și compasului.

un cerc) (operaţia 2) care taie dreapta a în A şi B (operaţia 4). Din punctele A resp. B ca centre ducem cu raze arbitrare (operaţiile 6 şi 2) două cercuri care se intersectează în C (operaţia 5). Dreapta CP (operaţia 1) este perpendiculara cerută.

Să observăm în această construcţie că operaţia 6 este absolut necesară căci fără ea nici nu putem să începem construcţia.

Să considerăm mulţimea $\mathfrak{M}$ a tuturor construcţiilor care se pot efectua cu ajutorul riglei şi compasului. Oare ambele instrumente sînt necesare pentru rezolvarea acestor probleme de construcţii? Cu alte cuvinte: nu putem oare suprima rigla sau compasul fără ca să pierdem măcar una din rezolvarea construcţiilor susmenţionate?

În această direcţie au făcut cercetări G. Mohr, geometru danez şi L. Mascheroni, geometru italian, în anii 1672 resp. 1797 şi au ajuns la următorul rezultat (independent unul de altul):

Teorema lui Mohr-Mascheroni. Orice construcţie care se poate face cu ajutorul riglei şi compasului se poate face numai cu ajutorul compasului.

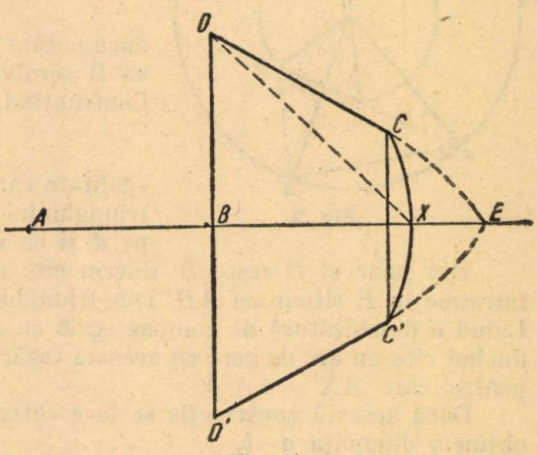


Fig. 1

Ne propunem să demonstrăm teorema enunţată.

Este suficient să demonstrăm că putem efectua numai cu compasul operaţiile 1 — 6. Bineînţeles că avînd la dispoziţie numai un compas trebuie să renunţăm din capul locului la unirea punctelor cu drepte în aceste construcţii; în astfel de construcţii o dreaptă este considerată construită dacă am reuşit să-i construim două din punctele sale. Avînd la dispoziţie un compas, operaţia 2 se efectuează fără nicio dificultate, iar operaţia 6 este realizabilă oricare ar fi instrumentul folosit pentru construcţie. Aşadar, rămîne să arătăm că putem determina numai cu ajutorul compasului.

I) intersecţia a două drepte date,
II) intersecţia unei drepte date cu un cerc dat,
III) intersecţia a două cercuri date.

Ori operaţia elementară III, avînd la dispoziţie un compas, se poate efectua fără nicio greutate, deci este suficient să arătăm că operaţiile I-II sînt realizabile cu compasul.

Întîi vom face două construcţii ajutătoare:

1. Să se construiască suma şi diferenţa a două segmente date.

Fie $AB = a$ şi b (fig. 1) cele două segmente date. Trebuie să construim numai cu compasul pe dreapta AB un punct X în aşa fel ca să avem $BX = b$. Pentru acest scop ducem un arc de cerc din punctul B cu raza b şi luăm un punct C pe acest arc. Din punctul A ca centru şi cu raza AC ducem un alt arc de cerc care taie arcul de mai înainte a două oară în punctul C' (simetricul lui C în raport cu AB). Notăm $CC' = c$ şi construim trapezul isoscel $DCC'D'$ în care $DD' = 2c$, $DC = D'C' = b$. Se demonstrează uşor că distanţa punctului

C la punctul de intersecţie al dreptei AB cu baza mare DD' a trapezului este tocmai b, cu alte cuvinte că DD' trece prin B. Trapezul cerut se poate construi astfel cu ajutorul compasului: din C resp. C' ducem cîte un arc de cerc cu raza b, iar din B ducem un cerc cu raza c. Intersecţiile acestui cerc cu arcele duse mai înainte ne dau punctele D şi D' (dreptele AB,CC', etc. sînt duse pe figură numai pentru a uşura demonstraţia; ele nu sînt necesare în construcţie. Această observaţie se referă şi la figurile 2,3 şi 4).

Trapezul isoscel fiind inscriptibil putem să-i aplicăm teorema lui Ptolemeu (produsul diagonalelor într-un patrulater inscriptibil este egal cu suma produselor laturilor opuse):

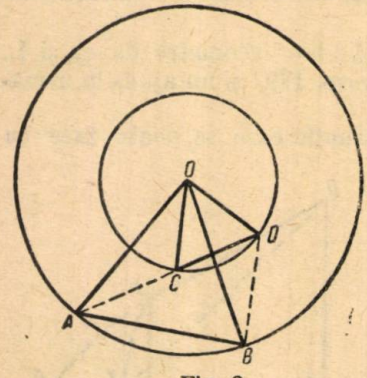


Fig. 2

$$d^2 = b^2 + 2c^2, \qquad (1)$$

unde am notat cu d diagonala trapezului. Pe de altă parte din triunghiul dreptunghic BDX avem

$$x^2 = b^2 + c^2 \qquad (2)$$

dacă notăm cu x distanţa $DX = D'X$. Problema va fi rezolvată dacă construim acest segment. Confruntînd (2) cu (1) deducem:

$$d^2 = x^2 + c^2, \qquad (2)$$

egalitate care exprimă că segmetul x este cateta triunghiului dreptunghic care are ca ipotenuză pe d şi ca cealaltă catetă pe c.

Din punctul D resp. D' ducem cîte un arc de cerc cu raza d, care se întretaie în E situat pe AB. Din triunghiul BDE se vede atunci că $BE = x$. Luînd o deschizătură de compas egală cu $BE = x$ şi din punctele D resp. D' ducînd cîte un arc de cerc cu această rază, intersecţia acestora ne va da pe X pentru care $AX = a + b$.

Dacă această construcţie se face către interiorul segmentului AB, atunci obţinem diferenţa $a - b$.

2. Fiind date segmentele a, b, c ($a < b$) să se construiască a patra proporţională a acestora numai cu compasul. Notînd cu x segmentul căutat avem:

$$x = \frac{a}{b} c. \qquad (4)$$

Să luăm două cercuri concentrice cu centrul în O şi cu raza a resp. b. Să luăm o coardă $AB = c$ în cercul avînd raza mai mare şi din punctele A resp. B să ducem două arce de cercuri cu o rază arbitrară r. Notăm intersecţia arcelor cu cercul mai mic (vezi fig. 2) cu C resp. D. Triunghiurile AOC şi OBD, avînd laturile respectiv egale, sînt congruente, deci $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$. Adunînd la aceste unghiuri unghiul $\widehat{COB}$, obţinem $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, de unde rezultă asemănarea triunghiurilor AOB şi COD, fiind vorba de două triunghiuri isoscele. Scriind proporţionalitatea laturilor, obţinem:

$$\frac{CD}{c} = \frac{a}{b}, \qquad \text{de unde} \qquad CD = \frac{a}{b} c,$$

adică CD este tocmai segmentul căutat.

Dacă c nu poate fi coardă în cercul cu centrul în O şi de rază a, adică dacă $c > 2a$, atunci luăm un număr pozitiv întreg n aşafel ca să avem: $n > \frac{c}{2a}$ şi construcţia o facem cu segmentele na,nb şi c (acum avem $c < 2na$). Din (4) se vede că segmentul x nu se schimbă. Segmentele na şi nb se construiesc succesiv conform construcţiei 1.

Acum să trecem la demonstrarea propriuzisă a teoremei enunţate.

I. Să construim numai cu compasul punctul de intersecţie a două drepte date AB şi CD.

Construim punctul A' simetricul punctului A faţă de dreapta CD. Pentru acest scop ducem cîte un arc de cerc din punctele C resp. D cu raza CA resp. DA; intersecţia a doua a acestor arce ne dă pe A'. Analog se construieşte simetricul B' al punctului B faţă de dreapta CD. Dreptele CD,AB şi $A'B'$ sînt concurente în punctul X căutat. Conform teoremei lui Thales

$$AX : XB = AA' : BB'$$

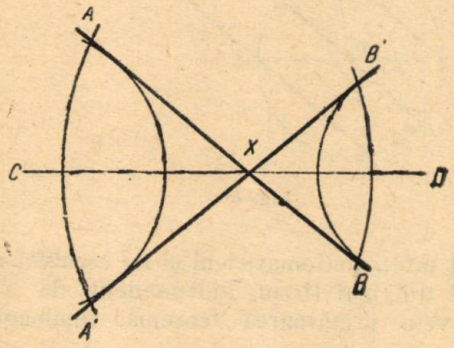


Fig. 3

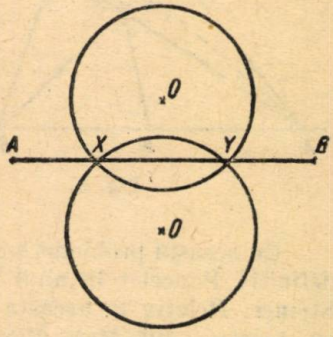


Fig. 4

sau notînd pentru prescurtare $AX = x$, $AB = c$, $AA' = a$, $BB' = b$, vom avea

$$\frac{x}{c - a} = \frac{a}{b}$$

sau scoţînd de aici pe x, obţinem:

$$x = \frac{a}{a + b}\, c,$$

ceeace revine la construcţia 2. x fiind construit, ducem din punctele A resp. A' ca centre două arce cu raza x, intersecţia cărora este tocmai X, punctul comun dreptelor AB şi CD.

II. Să se construiască numai cu compasul intersecţia unui cerc cu o dreaptă dată.

Fie O centrul cercului şi AB dreapta dată. Construim simetricul O' al punctului O în raport cu dreapta AB şi din O' ca centru descriem cu raza cercului dat un cerc, simetricul cercului dat în raport cu AB. Intersecţia acestui cerc cu cercul dat ne dă intersecţia dreptei AB cu cercul dat.

Această construcție nu se poate face dacă punctele O și O' coincid, adică dacă O este pe AB. În acest caz segmentul AO trebuie micșorat resp. mărit cu raza cercului dat și astfel se obțin punctele X și Y.

Cu aceasta am demonstrat complet teorema lui Mohr-Mascheroni: în problemele de coostrucții geometrice ce se rezolvă cu ajutorul riglei și compasului ne putem lipsi de riglă fiindcă toate aceste construcții se rezolvă numai cu ajutorul compasului. Bineînțeles efectuarea unei construcții numai cu ajutorul compasului poate duce la mari complicații așa că teorema demonstrată are mai mult importanță teoretică decît practică.

Acum să vedem care este situația cu celălalt instrument de construcție: rigla. Nu putem oare rezolva orice problemă de construcții din mulțimea $\mathfrak{M}$ numai ca ajutorul riglei fără să ne folosim de compas?

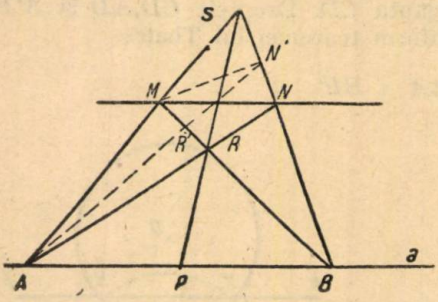


Fig. 5.

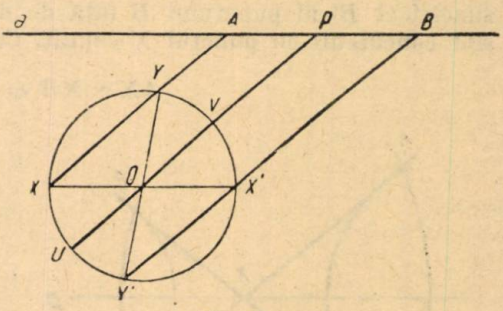


Fig. 6

Cu această problemă s-au ocupat mai mulți matematicieni și au rezolvat-o definitiv Poncelet în anul 1822 și cu 11 ani mai tîrziu, independent de el, Steiner. Relativ la această problemă avem următoarea teoremă, analoagă cu teorema lui Mohr-Mascheroni;

Teorema lui Poncelet-Steiner. Orice construcție care se poate rezolva cu ajutorul riglei și compasului se poate rezolva numai cu ajutorul riglei, dacă avem desenat un cerc oarecare cu centrul său.

Să demonstrăm această teoremă.

Este ușor de înțeles că și de data aceasta este suficient să arătăm că operațiile I-III se pot efectua numai cu ajutorul riglei dacă avem desenat un cerc cu centrul său. Ori, operația I se poate face direct cu ajutorul riglei, deci este suficient să arătăm posibilitatea efectuării operațiunilor II-III. Pentru acest scop facem în prealabil cinci construcții ajutătoare.

1. Fiind dată o dreaptă a și un punct M exterior dreptei să se construiască numai cu rigla o paralelă la dreapta a prin punctul M.

Considerăm două cazuri:

a. Se cunoaște mijlocul P al unui segment AB de pe dreapta a. Unim A cu M și pe prelungirea dreptei AM luăm punctul S, pe care la rîndul lui îl unim iarăși cu punctele P și B. Dreapta MB taie dreapta SP în punctul R, iar AR pe SB în punctul N. Dreapta NM este paralela cerută la a (fig. 5).

Pentru demonstrație să presupunem prin absurd, că MN nu este paralelă cu AB. Fie atunci $MN' \parallel AB$. Unim A cu N' și notăm cu R' intersecția dreptelor AN' și MB. Patrulaterul $ABMN'$ este un trapez, deci după o teoremă cunoscută, dreapta ce unește intersecția laturilor neparalele și intersecția diagonalelor (în cazul nostru punctele S și R') trece prin mijlocul bazelor (în cazul

nostru prin punctul P). Aceasta înseamnă că dreptele SR' şi SP coincid, adică R' este pe SP. Dar R' prin ipoteză aparţine şi lui MB, prin urmare R' este intersecţia dreptelor SP şi MB, adică coincide tocmai cu R. Dar atunci şi N' coincide cu N şi dreapta MN' coincide cu MN ceea ce este posibil numai dacă $NM \parallel AB$.

b. Nu se cunoaşte mijlocul niciunui segment de pe a. Fie O centrul cercului dat şi fie P un punct oarecare al dreptei a. Unim punctul P cu centrul O al cercului şi notăm cu U resp. V intersecţiile dreptei cu cercul dat: $UO = OV$, deci conform construcţiei «a» putem construi o dreaptă paralelă la dreapta PO care întîlneşte pe a în A. Fie X şi Y intersecţiile acestei drepte cu cercul dat. Ducînd diametrele XOX' şi YOY' în cercul dat, dreapta $X'Y'$ întîlneşte dreapta a într-un punct B pentru care $AP = PB$. Am construit astfel pe dreapta a un segment AB căruia i se cunoaşte mijlocul. Construcţia mai departe se face ca la construcţia «a» fig. (6).

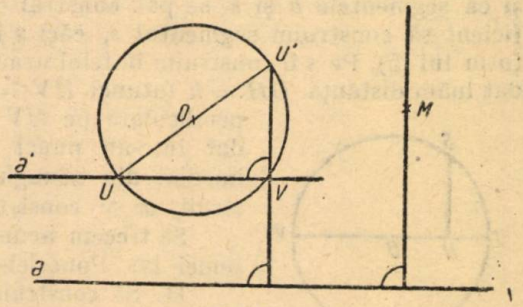


Fig. 7

Cu această construcţie am rezolvat şi o altă problemă: să se transporte numai cu ajutorul riglei un segment dat AB paralel cu el însuşi într-un punct M dat.

Dacă M nu este pe AB, atunci construim o dreaptă paralelă cu AM prin punctul B şi o paralelă la AB prin punctul M; intersecţia acestor drepte să notăm cu N. Evident MN va fi egal şi paralel cu AB.

Dacă M este pe dreapta AB, atunci transportăm mai întîi segmentul AB paralel cu el însuşi într-un punct M' ales arbitrar în exteriorul dreptei AB şi după aceea facem construcţia de mai înainte.

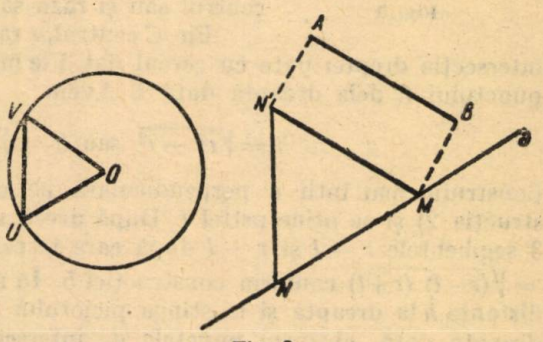


Fig. 8

2. Să se construiască numai cu ajutorul riglei o perpendiculară pe o dreaptă a printr-un punct dat M.

Construim o paralelă a' la dreapta a, care întîlneşte cercul dat în punctele U şi V (fig. 7), după aceea ducem o paralelă la dreapta $U'V$ prin punctul M, care va fi perpendiculara căutată.

3. Să transportăm un segment dat AB pe o dreaptă dată a din punctul M.

Întîi transportăm segmentul AB paralel cu el însuşi în punctul M': $MN' = AB$, după aceea ducem $OV \parallel AB$, $OU \parallel a$, $N'N \parallel UV$. Din asemănarea triunghiurilor OUV şi MNN' rezultă $MN = MN' = AB$.

4. Să se construiască a patra proporţională la trei segmente date a,b,c.

Construcţia este bine cunoscută din clasa a VIII-a; trebue să ţinem seama numai de faptul că pentru transportarea segmentelor date nu avem la dispoziţie compasul, deci această operaţie se face conform construcţiei 3. Ducerea paralelelor se face deasemeni conform construcţiei 1.

5. Să se construiască segmentul $x = \sqrt{ab}$, unde a şi b sînt două segmente date.

Notînd cu c suma segmentelor a şi b, care se construeşte cu ajutorul construcţiei 3, şi cu d diametrul cercului dat, avem:

$$x = \frac{c}{d} s \tag{5}$$

dacă notăm $s = \sqrt{hk}$, unde $h = \frac{d}{c} a, k = \frac{d}{c} b$. Mai întîi observăm că $h+k=d$ şi că segmentele h şi k se pot construi conform lui 4. Evident că este suficient să construim segmentul s, căci s fiind construit, x se construeşte conform lui (5). Pe s îl construim în felul următor: pe un diametru UV al cercului dat luăm distanţa $UH = h$ (atunci $HV = k$), în punctul H ridicăm o perpendiculară pe UV (construcţia 2) care întîlneşte cercul dat într-un punct S; $SH = s$, după cum se verifică imediat din triunghiul dreptunghic USV. s fiind construit, x se construieşte uşor conform construcţiei 4.

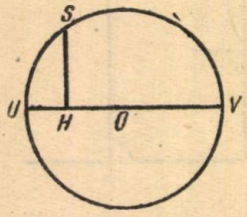


Fig. 9

Să trecem acum la demonstraţia propriu zisă a teoremei lui Poncelet-Steiner.

II. Să construim numai cu rigla punctul de intersecţie al unei drepte cu un cerc (care este dat prin centrul său şi raza sa).

Fie C centrul, r raza cercului şi să notăm cu X şi Y intersecţia dreptei date cu cercul dat. Fie mai departe $XY = 2h$, iar distanţa punctului C dela dreapta dată l. Avem

$$h = \sqrt{r^2 - l^2} \text{ sau } h = \sqrt{(r-l)(r+l)}.$$

Construim mai întîi o perpendiculară pe dreapta dată prin punctul C (construcţia 2) şi se oţine astfel l. După aceea se construiesc pe baza construcţiei 3 segmentele $r - l$ şi $r + l$ după care trecem la construcţia segmentului $h = \sqrt{(r-l)(r+l)}$ conform construcţiei 5. În sfîrşit transportînd pe dreapta dată distanţa h la dreapta şi la stînga piciorului perpendicularei coborîtă din C pe dreapta dată, obţinem punctele de intersecţie X şi Y.

III. Să se construiască numai cu rigla interesecţia a două cercuri date (prin centrul O resp. O' şi raza r resp. r' ale acestora).

Să notăm cu X şi Y punctele de intersecţie şi cu A punctul comun dreptelor XY şi OO'. Notăm mai departe cu a resp. x segmentele necunoscute OA resp AX şi cu $c = OO'$.

Din triunghiul OXO' scoatem conform teoremei generalizate a lui Pitagora;

$$r'^2 = c^2 + r^2 - 2ca$$

sau introducînd notaţia $c^2 + r^2 = d^2$,

$$a = \frac{d^2 - r'^2}{2c} = \frac{(d-r')(d+r')}{2c}.$$

Conform construcţiilor 2 şi 3 se construieşte triunghiul dreptunghic cu catetele c şi r; ipotenuza acestuia va fi d. După aceia construim segmentele $d-r'$, $d+r'$ şi $2c$ pe baza construcţiei 3 şi însfîrşit construim pe a conform lui 4.

Din triunghiul OAX scoatem

$$x = \sqrt{(r + a)(r - a)}.$$

Construim întîi segmentele $r + a$, $r - a$ şi după aceea segmentul x.

Segmentele a şi x fiind construite, sînt uşor de construit punctele X şi Y.

Cu aceasta am demonstrat complet teorema lui Poncelet-Steiner.

Comparînd cele două teoreme demonstrate (teorema lui Mohr-Mascheroni şi teorema lui Poncelet-Steiner) putem spune că compasul este un instrument « mai important » de construcţie decît rigla în acel sens că compasul poate înlocui în rezolvarea problemelor de construcţii rigla, dar rigla nu poate înlocui pe deplin compasul întrucît conform teoremei lui Poncelet-Steiner construcţiile mulţimii $\mathfrak{M}$ se pot efectua numai cu ajutorul riglei numai în acel caz, cînd cunoaştem un cerc cu centrul său. Se poate demonstra că cunoaşterea centrului cercului este absolut necesară, căci fără cunoaşterea lui nu este valabilă teorema lui Poncelet-Steiner.

În ceea ce priveşte construcţiile efective numai cu ajutorul riglei respectiv compasului, ele se pot efectua făcînd toate operaţiile elementare 1 respectiv 2 şi 3—6 în aceeaşi ordine în care ele se fac la construcţia corespunzătoare cu rigla şi cu compasul.

Să luăm ca exemplu următoarea construcţie simplă: Fiind dat un segment $AB = a$ să se construiască segmentul $2a$.

Dacă construcţia trebuie făcută cu rigla şi compasul, atunci construcţia se efectuează în felul următor:

1°. Luăm o deschizătură de compas egală cu a şi din B ca centru descriem un cerc cu raza a (operaţia 2).

2°. Determinăm intersecţia dreptei AB cu acest cerc: C (operaţia 5); $AC = 2a$.

Dacă construcţia trebuie făcută numai cu compasul, atunci efectuăm operaţiile 1° şi 2° în ordinea indicată mai sus ţinînd seama de următoarele: segmentul $AB=a$ este dat cu punctele A şi B; la operaţia 2° trebuie să procedăm aşa cum am arătat la demonstraţia teoremei lui Mohr-Mascheroni la punctul II.

Dacă construcţia trebuie făcută numai cu rigla şi dacă avem desenat un cerc cu centrul său, atunci construcţia se face aşa cum este descrisă la punctul 3 al demonstraţiei teoremei lui Poncelet-Steiner.

Bineînţeles, efectuarea unei construcţii numai cu ajutorul riglei sau compasului poate duce astfel la mari complicaţii, aşa că teoremele demonstrate mai sus au mai mult importanţă teoretică decît practică.

Dealtfel se poate întîmpla ca o problemă de construcţii de rezolvat cu ajutorul riglei *sau* compasului să aibă o soluţie mai simplă decît cea obţinută cu efectuarea succesivă a operaţiilor elementare din construcţia corespunzătoare efectuată cu ajutorul riglei *şi* compasului.

In încheiere să dăm un exemplu de acest gen.

Fiind dat un segment $AB = a$ să se construiască segmentul $2a$, numai cu ajutorul compasului.

Din punctul B ca centru şi cu raza $AB = a$ ducem o circumferinţă pe care se iau punctele C,D,E pentru care $AC = CD = DE$ (construcţia hexagonului regulat). Punctul E cade pe prelungirea dreptei AB şi $AE = 2a$.

Dacă comparăm această soluţie a problemei cu soluţia dată mai înainte (pe baza soluţiei problemei cu rigla şi cu compasul) este evident că aceasta este cu mult mai simplă.

FORŢELE NUCLEARE

Conf. IOSIF RIŞAVI

ŞTIM că cel mai simplu nucleu — nucleul izotopului «uşor» al hidrogenului $^{1}_{1}H$ este alcătuit dintr-un singur *proton*.

Protonul are o masă egală cu unitatea de masă şi o sarcină pozitivă egală, în valoare absolută, cu sarcina electronului.

Nucleele atomilor tuturor celorlalte elemente din sistemul periodic sînt alcătuite din *protoni* (particule materiale încărcate cu electricitate pozitivă) şi *neutroni* (particule materiale neutre din punct de vedere electric).

Neutronii au o masă sensibil egală cu masa protonilor. Masa nucleului este aproximativ egală cu suma maselor protonilor şi neutronilor săi.

Este evident că din moment ce nucleele conţin *protoni*, între aceştia trebuie să se exercite forţe electrice, a căror acţiune se supune legii lui Coulomb.

Deoarece semnul sarcinii tuturor protonilor este acelaşi (+), iar sarcinile electrice de acelaşi semn se resping reciproc, rezultă că forţele care acţionează între protoni sînt forţe electrice sau electrostatice de respingere.

Totuşi, dacă între particulele care alcătuiesc nucleul atomic nu ar acţiona nici un fel de alte forţe, atunci nucleul atomic n-ar putea rămîne stabil, deoarece protonii din nucleu, respingîndu-se între ei, s-ar desprinde explodînd în toate părţile.

Deoarece se constată că nucleul atomic există, aceasta înseamnă că asupra protonilor din nucleu, în afară de forţele electrostatice de respingere, mai acţionează şi alte forţe, care trebuie să fie desigur forţe de atracţie, a căror valoare întrece forţele electrostatice de respingere.

Se pune întrebarea ce fel de forţe sînt acestea ?

Noi ştim că în natură întîlnim două tipuri de forţe : forţele electrice şi forţele de gravitaţie (forţele de atracţie universală).

Este clar că forţele despre care este vorba nu pot fi forţe electrice şi de asemenea nu pot fi nici forţe de gravitaţie, deoarece forţele de gravitaţie între mase atît de mici ca masele protonilor şi neutronilor ar fi fără însemnătate în fenomenele nucleare.

Astfel ajungem la concluzia că între particulele ce alcătuiesc nucleele atomice se exercită nişte forţe specifice pentru nucleu, cu care nu ne-am întîlnit pînă acum.

Aceste forţe specifice de atracţie între particulele care compun nucleul *se numesc forţe nucleare.*

Se pune întrebarea, între ce particule acţionează forţele nucleare şi cum variază aceste forţe în funcţie de distanţa între particule ?

Pentru a putea răspunde la această întrebare, trebuie să ne referim la valoarea «defectului de masă» al nucleelor atomice.

Ştim că «defectul de masă» caracterizează energia eliberată la formarea unui nucleu din protoni şi neutroni, adică energia de legătură între particulele ce alcătuiesc nucleul.

La rîndul ei, energia de legătură depinde de forţele care acţionează între aceste particule.

Analizîndu-se variaţia valorii defectului de masă pentru diferite nuclee atomice s-au dedus concluzii preţioase privind valoarea forţelor care acţionează între particulele din nucleu, ca şi dependenţa acestor forţe în raport cu distanţa.

Astfel s-a constatat că forţele nucleare acţionează în interiorul nucleului, că sînt foarte mari pe distanţe mici, că se manifestă numai pînă la distanţe mici de ordinul 10^{-13} cm şi că descresc brusc odată cu creşterea distanţei (invers proporţional nu cu pătratul distanţei, ci cu o putere mult mai mare a ei), încît la o distanţă de $2 - 3 \cdot 10^{-13}$ cm, forţele nucleare devin practic egale cu zero.

În figura 1 se arată curba de potenţial a nucleului.

Pentru valori mari ale lui r, la distanţe mai mari de 10^{-13} cm, forţele nucleare sînt egale cu zero şi există numai forţe electrostatice de respingere, a căror acţiune se exercită pe distanţe care întrec mult dimensiunile nucleului. În schimb, la distanţe foarte mici de ordinul 10^{-12} cm forţele nucleare cresc brusc, astfel că forţele electrostatice de respingere devin neglijabile, faţă de cele nucleare ; potenţialul îşi schimbă sensul şi curba de potenţial cade brusc, formînd o groapă de potenţial a cărei parte inferioară este situată în domeniul valorilor negative. Din cauza variaţiei extraordinar de accentuate a forţelor nucleare, căderea curbei de potenţial este atît de bruscă, încît pereţii gropii de potenţial pot fi consideraţi ca verticali.

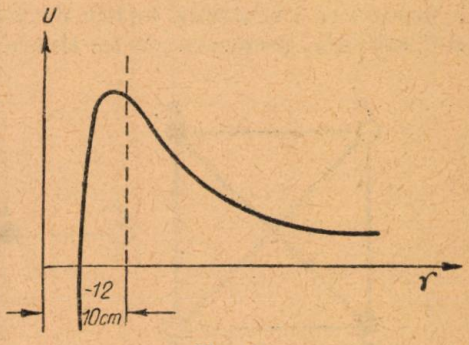


Fig. 1

Din această cauză cîmpul de acţiune al forţelor nucleare este net delimitat, aşa încît nucleului i se poate atribui un « diametru » sau o « rază ».

Prin « raza nucleului » se înţelege, în mod convenţional, raza de acţiune a forţelor nucleare şi nu o rază geometrică.

Trecerea de la domeniul de acţiune al forţelor nucleare la cel al forţelor electrostatice de respingere se caracterizează printr-un maxim al curbei de potenţial (barieră de potenţial).

Înălţimea acestei bariere de potenţial depinde de sarcina nucleului ($\pm Ze$) cît şi de sarcina particulei (ze), care se mişcă în cîmpul nucleului.

Energia potenţială (B), ce corespunde barierei de potenţial, o putem calcula ca energie de interacţiune coulombiană a ambelor sarcini la o distanţă egală cu « raza » nucleului:

$$B = \frac{zZe^2}{R}.$$

Din această formulă, rezultă următoarea valoare pentru B în privinţa barierei de potenţial a uraniului (U), pentru particula α (în MeV, cu $R = 9.10^{-13}$ cm);

$$B = \frac{2.92.23.10^{-20}}{9.10^{-13}.1{,}6.10^{-12}} = 29{,}5 \text{ MeV}.$$

Pentru *protoni* bariera de potenţial a uraniului va fi desigur de două ori mai joasă.

O altă caracteristică a forţelor nucleare, prin analogie cu forţele care determină proprietăţile chimice ale elementelor este «valenţa» potrivit căreia numai un anumit număr de particule vecine intră în acţiune, astfel că nucleele cele mai stabile se vor obţine pentru un anumit număr de particule în interacţiune.

Acestei însuşiri, una din cele mai importante particularităţi ale forţelor nucleare, i se spune proprietate de saturaţie. Deci forţele nucleare posedă proprietatea de saturaţie.

Pentru concretizare putem arăta că *protonul* şi *neutronul* sînt bivalenţi din punctul de vedere al forţelor nucleare, cu alte cuvinte, fiecare din ei poate lega două particule.

Cele mai stabile nuclee uşoare sînt nucleele în care numărul de protoni este egal cu numărul de neutroni.

Deoarece la nucleele alcătuite din trei particule (1 proton şi 2 neutroni sau 2 protoni şi 1 neutron), forţele de valenţă ale protonului sau neutronului nu sînt saturate, asemenea nuclee sînt mai puţin stabile decît helionul [1]) $^4_2$He,

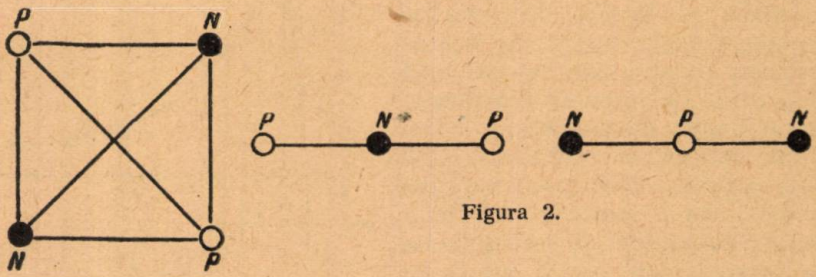


Figura 2.

nucleul de heliu alcătuit din 2 protoni şi 2 neutroni. Explicaţia stabilităţii mai mari a helionului (particulă α) stă în faptul că forţele de valenţă ale protonilor şi neutronilor în particula α sînt saturate.

In teoria explicării naturii forţelor nucleare, rolul principal în demonstrarea saturaţiei îl joacă schimbul dintre diferitele particule: protoni şi neutroni.

Cînd raportul dintre numărul de protoni şi numărul de neutroni este egal cu unu, atunci energia nucleului este cea mai mică.

Dacă am forma un nucleu cu un alt raport între particule, ca de exemplu un nucleul care să conţină mai mult cu un proton (numărul protonilor fiind egal cu $n+1$) şi mai puţin cu un neutron (numărul neutronilor fiind egal cu $n-1$), atunci energia unui astfel de nucleu ar fi mai mare decît energia unui nucleu care ar cuprinde acelaşi număr ($2n$) de particule, rezultînd din acelaşi număr de protoni şi neutroni.

Întrucît, în conformitate cu criteriul general al stabilităţii, orice sistem are tendinţa de a lua din toate stările posibile pe aceea care corespunde minimului energiei lui libere (adică de a trece într-o stare cu energie mai mică), trebuie să admitem că nucleul considerat de noi ca fiind alcătuit din $(n+1)$ protoni şi $(n-1)$ neutroni va tinde să se transforme într-un al doilea nucleu format din n protoni şi tot din n neutroni.

În ce fel se va produce această transformare?

---

[1]) Helionul este atomul de heliu care prin pierderea a doi electroni s-a transformat în nucleu; i se mai spune particula α.

Pentru ca această transformare să se producă, trebuie neapărat ca un proton să se transforme într-un neutron.

O astfel de transformare care decurge din caracterul acțiunii forțelor nucleare va fi însoțită de emiterea unor pozitroni și de aci și numele ei de dezintegrare radioactivă pozitronică.

Deci, la acele nuclee în care numărul protonilor este mai mare decît numărul neutronilor, va avea loc totdeauna o dezintegrare radioactivă pozitronică.

În sprijinul celor afirmate mai sus se pot da următoarele exemple: nucleul izotopului $^{11}_{6}C$, avînd o radioactivitate pozitronică, are șase protoni și cinci neutroni; nucleul izotopului $^{13}_{7}N$, care emite pozitroni, are șapte protoni și șase neutroni; nucleul izotopului $^{27}_{14}Si$, care de asemenea emite pozitroni, are 14 protoni și 13 neutroni, etc.

Este de reținut faptul că transformarea unui anumit tip de nucleu — cuprinzînd un anumit număr de protoni și neutroni — într-un alt tip de nucleu — cuprinzînd alt număr de protoni și neutroni — depinde de raportul dintre energiile celor două nuclee.

Pentru evaluarea bilanțului total al energiei nucleului are importanță nu numai energia care depinde de acțiunea forțelor nucleare specifice, dar și energia care depinde de acțiunea forțelor electrice de respingere între protonii care intră în alcătuirea nucleului.

Dar pe măsură ce numărul de nucleoni *) din nucleu crește, adică A (numărul de masă) crește, va crește și numărul protonilor (Z) precum și forțele electrice de respingere dintre protonii din nucleu.

Forțele electrice de respingere (forțele coulombiene) micșorează stabilitatea nucleului și manifestă un rol precumpănitor cînd trecem de la elementele mijlocii la elementele grele (cu masă atomică mare) din tabela lui Mendeleev.

Astfel nucleele care au același număr de protoni și neutroni nu vor mai fi cele mai stabile.

Trăsătura caracteristică a nucleelor elementelor ușoare este valoarea medie egală a numărului de protoni (Z) și de neutroni ($A - Z$) din nucleu.

Mai stabile vor fi acele nuclee ale elementelor grele care au mai puțini protoni decît neutroni, deoarece la un număr constant de particule nucleare (nucleoni), odată cu micșorarea numărului de protoni, se micșorează și forțele electrice de respingere și, ca urmare, se mărește stabilitatea nucleului.

Nucleele elementelor cu număr atomic (număr de ordine Z) mai mare de 83 nu mai sînt stabile și ca urmare a acestui fapt se dezintegrează spontan, proces numit și fisiune, transformîndu-se în nuclee mai ușoare, cu numere atomice mai mici și deci mai stabile.

Ca exemplu în acest sens se poate da nucleul izotopului de uraniu $^{235}_{92}U$, care se dezintegrează spontan în două nuclee mai ușoare, cu numere atomice mai mici și deci mai stabile.

Pentru elementele cu număr de masă (A) mai mare de 120, energia de legătură pe nucleon $\left(\frac{E}{A}\right)$ se micșorează odată cu creșterea numărului de masă (A). De aci deducem că probabilitatea existenței nucleelor elementelor cu număr atomic (Z) mai mare ca 100 este mică.

Variația forțelor nucleare în funcție de distanța între particule s-a arătat mai sus precum și consecințele acestei variații. Rămîne doar să se mai răspundă

*) Protonii și neutronii se numesc adesea *nucleoni* sau particule nucleare.

la celălalt aspect al întrebării puse la început şi anume: între ce particule acţionează forţele nucleare?

Experienţele făcute de Tuve şi colaboratorii săi, bazate pe studiul ciocnirii protonilor rapizi cu nuclee de hidrogen, au dovedit că *forţele nucleare specifice acţionează nu numai între protoni şi neutroni, dar şi între doi protoni.*

În această experienţă protonii rapizi erau accelerați cu ajutorul unui generator electrostatic pînă la energia de 900 000 electron-volţi*), iar ca difuzor servea o substanţă care conţinea hidrogen.

Mai tîrziu, studiul difuziei neutronilor rapizi de către deuteroni şi protoni a permis să se stabilească faptul că *forţele nucleare specifice se exercită şi între doi neutroni.*

În stadiul actual al cercetărilor cu privire la natura deosebită a forţelor nucleare — se consideră că acţiunea foreţlor nucleare specifice se extinde asupra tuturor particulelor care fac parte din nucleu.

DISPOZITIV PENTRU DESENAREA CONICELOR

D. D. BOIANGIU

Lector, Institutul Politehnic Bucureşti

Încă in antichitate grecii cunoşteau destul de bine o parte din proprietăţile conicelor, ba chiar mai mult, au reuşit să imagineze pe baza proprietăţilor lor geometrice diferite metode de construcţie grafică.

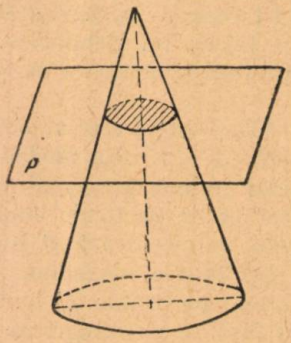


Fig. 1

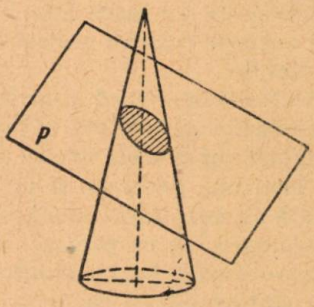


Fig. 2

Conicele sînt curbe plane care poartă acest nume deoarece ele apar dacă intersectăm un con de rotaţie cu un plan.

Intersecţia conului cu planul se poate face în mai multe feluri:

a) *Planul perpendicular pe axa conului.* Curba ce rezultă din intersecţie este un cerc (fig. 1).

b) *Planul este înclinat faţă de axa conului* fără a intersecta prelungirile generatoarelor. În acest caz din intersecţie rezultă o curbă (un contur) închisă ca un cerc turtit, foarte des întîlnită în tehnică, denumită elipsă (fig. 2).

*) În fizica atomică, energia se măsoară în unităţile electron-volt (eV) şi în unităţi mai mari kilo-electron-volţi (keV) şi un milion de electron-volţi (MeV).

Un *electron-volt* (eV) este egal cu energia pe care o dobîndeşte un electron după ce traversează o diferenţă de potenţial de 1 V.

c) Planul este paralel cu o generatoare a conului. Curba ce rezultă nu mai este un contur închis ci o curbă deschisă cu o singură ramură. Ea poartă numele de parabolă.

d) Planul intersectează conul şi prelungirile unei generatoare. Dacă prelungim generatoarele conului nostru obţinem un al doilea con identic cu cel iniţial. Planul de intersecţie va întîlni ambele conuri. Curba de intersecţie se va compune în acest caz, din două ramuri deschise. Această curbă a primit numele de hiperbolă (fig. 4).

Vedem deci, că din intersecţia unui con cu un plan pot rezulta trei genuri de curbe diferite: elipsa, iperbola, parabola,. În genul elipsă sînt cuprinse şi cercurile.

Este interesant faptul că aceste curbe pe care grecii le-au studiat cu multă atenţie acum două milenii, s-au dovedit a avea o mare importanţă pentru fizicieni, tehnicieni şi ingineri care le întîlnesc în foarte multe cazuri şi aproape în toate domeniile.

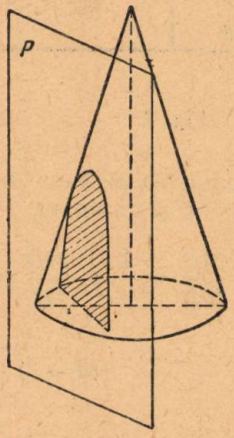


Fig. 3

Fig. 4

Încă din antichitate arhitecţii au constatat că aceste curbe merită interes şi le-au folosit la construcţia anumitor monumente, clădiri şi poduri.

După celebra şi revoluţionarea descoperire a lui Galileo Galilei că Pămîntul se învîrteşte, o serie de savanţi şi mari astronomi au descoperit că Pămîntul se mişcă în jurul Soarelui descriind o elipsă (fig. 5). Nu mult după ce I. Newton a descoperit legea fundamentală a mecanicii şi oamenii au început să studieze cu mai multă atenţie problemele legate de mişcarea corpurilor, s-au descoperit o serie întreagă de fenomene în studiul cărora s-a dovedit din nou importanţa conicelor.

Oamenii au observat de exemplu, că dacă aruncăm o piatră dintr-un loc într-altul cu o anumită viteză şi o anumită înclinare faţă de orizontală

Fig. 5

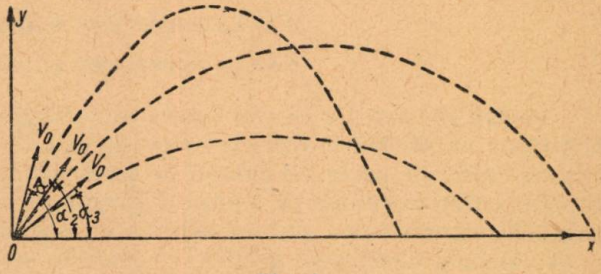


Fig. 6

acastă piatră descrie o parabolă. Au mai observat că dacă se schimbă mărimea vitezei sau înclinării faţă de orizontală se schimbă şi parabola şi odată cu aceasta o serie întreagă de particularităţi, cum ar fi înălţimea maximă la care se ridică piatra sau distanţa la care ea recade pe sol (fig. 6).

A enumera exemplele posibile în care cercetătorii în ştiinţele naturii au întîlnit conicele este imposibil atît datorită varietăţii domeniilor cît şi numărului mare de exemple ce s-ar putea da.

Aceste curbe por fi definite însă şi altfel, pe baza proprietăţilor lor geometrice.

O conică este locul geometric al punctelor pentru care raportul distanţelor de la unul din ele la altul fix şi la o dreaptă fixă este constant. Dacă raportul distanţelor este mai mic ca unitatea conica este o elipsă; dacă este egal cu unitatea este parabolă şi dacă este mai mare, este o iperbolă.

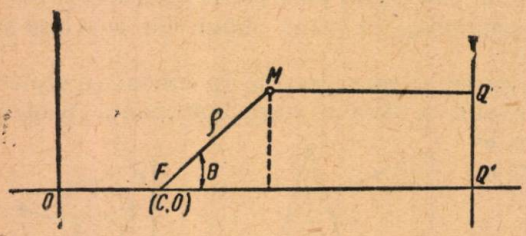


Fig. 7

Dacă însemnăm cu ρ (raza polară) distanţa de la focarul F la punctul M de pe conică şi cu θ unghiul pe care îl face PM (raza polară) cu o axă luată ca axă de referinţă, atunci se poate demonstra că pentru punctul M avem relaţia:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

În adevăr, vom avea pe baza definiţiei date: $OQ' = d$, $MF = \rho$, $OF = c$; $MQ = d - \rho\cos\theta - c$ şi raportul

$$\frac{MQ}{MF} = \frac{1}{e}; \quad \frac{MQ}{MF} = \frac{d - c - \rho\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{e}$$

sau

$$e(d - c) - e\rho\cos\theta = \rho,$$

de unde:

$$\rho = \frac{e(d - c)}{1 + e\cos\theta} = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

care este tocmai ecuaţia indicată şi unde am notat $(d - c)\,e$ prin p.

Dacă în această relaţie:

$e < 1$, conica este o elipsă;

$e > 1$, conica este o iperbolă;

$e = 1$, conica este o parabolă.

Pentru construcţia acestor conice s-au imaginat o serie întreagă de metode Există un număr foarte mare şi variat de metode de construcţie grafică pentru fiecare curbă în parte. Se cunosc de asemenea o serie întreagă de dispozitive (instrumente) mecanice cu ajutorul cărora se construiesc elipse, iperbole şi parabole, cărora li s-a dat numele de elipsografe, iperbolografe şi parabolografe. Metoda construirii grafice a conicelor prezintă dezavantajul că pentru realizarea ei sînt necesare o serie de construcţii grafice ajutătoare care încarcă desenul. În acelaş timp, faptul că linia curbă se obţine prin racordarea anumitor porţiuni de curbă duce la oarecari abateri. Folosirea instrumentelor mecanice prezintă dezavantajul necesităţii unui astfel de instrument, în schimb avem avantajul de a obţine o curbă corectă, continuă şi nu se încarcă desenul cu alte construcţii ajutătoare.

Ne propunem în cele ce urmează, să studiem un astfel de instrument care să poată construi, după voia noastră, oricare din cele 3 tipuri de conici arătate. Acest dispozitiv este avantajos prin faptul că înlocuieşte trei instrumente separate (fig. 8).

Mecanismul se compune din:

1) o bară $EABC$ care are braţul AD solidar şi perpendicular pe $EABC$. Bara e prevăzută cu un ac de fixare în A;

2) o bară cotită CDE, unghiul cotului fiind de 90°;

3) o manivelă OB astfel construită încît lungimea ei poate fi ajustată după nevoie; manivela e prevăzută cu un ac de fixare în O;

4) un manşon BC astfel construit încît se poate lungi aşa ca să potrivim distanţa BC după voie;

5) trei manşoane simple dintre care unul în C şi două în E. Manşonul din C este articulat la manşonul BC iar manşoanele din E sînt articulate între ele. Unul din manşoanele din E e prevăzut cu un creion.

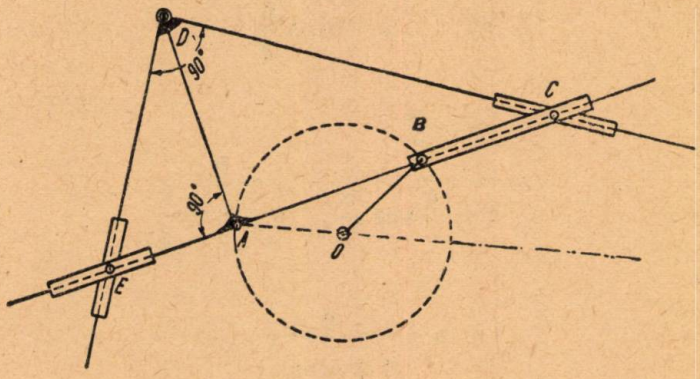


Fig. 8

Funcţionarea mecanismului: 1) se potriveşte lungimea manivelei OB şi distanţa BC după nevoie, în funcţie de conica ce dorim a construi;

2) se potriveşte lungimea AD astfel ca să avem $AD = 2\,OB$;

3) se fixează punctul A al barei $EABC$ în focarul conicei şi punctul C în centrul ei;

4) se roteşte manivela OB în jurul lui O care pune în mişcare întreg mecanismul, astfel că punctul E desenează conica dorită.

Justificarea instrumentului se poate face dacă analizăm schiţa lui. Observăm că vom avea în permanenţă CDE — un triunghi dreptunghic — în care AD este înălţimea dusă din vîrful unghiului drept. Insemnăm: $OB = \frac{b}{2}$ raza manivelei; $BC = a$ distanţa dintre axele manşonului BC; θ este unghiul dintre manivela OB şi axa AO fixă; $AD = b$ înălţimea triunghiului.

În triunghiul EDC se observă relaţiile:

$$AD^2 = AC \cdot AE$$

sau

$$AE = \frac{AD^2}{AB + BC}.$$

Înlocuind cu datele noastre avem:

$$\rho = AE = \frac{b^2}{b\cos\frac{\theta}{2} + a},$$

deoarece din triunghiul AOB observăm că

$$AB = 2\,OB\cos\frac{\theta}{2} = 2\cdot\frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2} = b\cos\frac{\theta}{2},$$

iar $AE = \rho$ este tocmai raza polară. Vom avea deci:

$$\rho = \frac{b^2}{a + b\cos\frac{\theta}{2}}$$

sau:

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{b}{a}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{p}{1 + e\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Dar ecuația

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\frac{\theta}{2}}$$

este tocmai ecuația indicată pentru conice.

Potrivim deci, dispozitivul în așa fel ca raportul dintre dublul lungimii manivelei și al lungimii manșonului BC să fie corespunzător curbei dorite.

Construcția unui astfel de dispozitiv este simplă și se poate realiza ușor în orice atelier mic.

Am arătat mai sus că există o serie întreagă de astfel de dispozitive pentru realizarea curbelor matematice. Construcția lor a constituit o preocupare deosebită pentru foarte mulți savanți, ingineri și tehnicieni. Foarte multe dispozitive de acest gen poartă numele celor care le-au realizat. Se cunosc astfel, elipsograful lui Leonardo da Vinci, elipsograful lui Cardan, elipsografele, parabolografele și iperbolografele oamenilor de știință sovietici Artobolewski sau Delone, etc. Toate aceste instrumente nu sînt altceva decît mecanisme. Exemplul dat și în general, toate instrumentele de acest gen, ilustrează legătura strînsă ce există între matematică și practica tehnică.

Instrumentele matematice constituie un domeniu vast de studiu, foarte interesant din punct de vedere al cunoștințelor de matematici, mecanică și teoria mecanismelor și găsește în același timp, aplicații tehnice foarte variate și folositoare industriei.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. **De unde provine denumirea de «diviziune armonică»?** Este cunoscut faptul (v. de ex. G.M.F. (B), nr. 11/1954) că pentru trei puncte A, B şi M ale unei drepte există un punct bine determinat M' în aşa fel că:

$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} = -\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \qquad (1)$$

unde segmentele care figurează în rapoarte sînt orientate. Zicem în acest caz, că punctele A, B, M, M' formează un *sistem armonic* de puncte, iar diviziunea însăşi poartă numele de *diviziune armonică*. Această noţiune are un rol important în geometrie. Se pune problema: de unde provine această denumire? În cele ce urmează vrem să clarificăm această problemă. Vom scrie pentru acest scop relaţia (1) sub altă formă.

Dacă notăm $\overline{M'M} = m$; $\overline{M'B} = b$; $\overline{M'A} = a$, vom avea $\overline{AM'} = -\overline{M'A} = -a$; $\overline{AM'} + \overline{M'M} = -\overline{M'A} + \overline{M'M} = -a + m = m - a$; $\overline{MB} = \overline{MM'} + \overline{M'B} = -\overline{M'M} + \overline{M'B} = -m + b = b - m$, iar relaţia (1) se poate scrie în felul următor:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{m-a}{b-m} \text{ sau } \frac{a}{b} = \frac{m-a}{b-m}.$$

De aici:

$$\frac{m-a}{a} = \frac{b-m}{b}\ ;\ \frac{m}{a} - 1 = 1 - \frac{m}{b}\ ;\ m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2,$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}. \qquad (1)$$

Dacă numerele a, b şi m verifică această relaţie, atunci se zice că m este *media armonică* a lui a şi b.

Un fapt bine cunoscut din acustică este următorul: lungimile unei coarde pentru care acestea ne dau acordul do, mi, sol, sînt proporţionale cu numerele $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$. Se poate vedea uşor, că «media armonică» a numerelor 1 şi $\frac{2}{3}$ este egală chiar cu $\frac{4}{5}$. Dar atunci, această proprietate este valabilă şi pentru lungimile a, b, m ale coardelor — cu lungimi ce corespund sunetelor do, sol, mi — deoarece aceste lungimi sînt proporţionale cu numerele $1, \frac{2}{3}$ şi $\frac{4}{5}$. Deci, lungimea de coardă m, pentru care obţinem sunetul mi este «media armonică» a lungimilor de coardă a şi b pentru care obţinem sunetele do şi sol

Iată faptul care a condus la denumirea de «media armonică» respectiv, de «diviziune armonică». Această noţiune atît de importantă în geometrie, are deci origină în fizică şi anume, în acustică.

Vrem să arătăm în sfîrşit, legătura ce există între media armonică (m) media geometrică (G) şi cea artitmetică (A) a două numere. Să exprimăm pe m din relaţia ($1'$); obţinem:

$$m = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}},$$

adică

$$m = \frac{G^2}{A}. \tag{2}$$

Deci: *media armonică a două numere este egală cu raportul dintre pătratul mediei geometrice şi media aitmetică ale celor două numere.*

2. **Numărul şi suma divizorilor unui număr întreg.** — Fie a un număr întreg. Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă: cîţi divizori are numărul a şi cu cît este egală suma acestor divizori?

Pentru aceasta ne vom folosi de descompunerea în produs de factori primi a numărului a. Este bine cunoscut faptul că dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt numerele prime care divid pe a şi dacă aceste numere intervin în a de $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ori, atunci este valabilă următoarea descompunere în produs de factori primi a numărului a:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}. \tag{1}$$

Această descompunere este unică, dacă facem abstracţie de ordinea factorilor.

Numărul a are ca divizori pe 1 şi numerele care se obţin prin înmulţirea în toate felurile posibile a numerelor prime $p_1, p_2, \ldots, p_n$ la puteri mai mici sau egale cu $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ (de ex., divizorii numărului $a = 120 = 2^3.3.5$ sînt următoarele numere: 1; 2; 3; $2^2 = 4$; 5; 2. $3 = 6$; $2^3 = 8$; 2. $5 = 10$; $2^2.3 = 12$; $3.5 = 15$; $2^2.5 = 20$; $2^3.3 = 24$; $2.3.5 = 30$; $2^3.5 = 40$; $2^2.3.5 = 60$; $2^3.3.5 = 120$). Este evident că după efectuarea operaţiilor în produsul

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ldots (1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{\alpha_n}) \tag{2}$$

fiecare termen al sumei obţinute este un divizor al lui a şi această sumă conţine toţi divizorii numărului a şi numai pe aceştia. (De exemplu, în cazul numărului $a = 120 = 2^3.3.5$ suma de mai sus se scrie în felul următor: $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3)(1 + 5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20 + 24 + 30 + 40 + 60 + 120$). Deci, numărul termenilor care intervin în suma considerată este egal chiar cu numărul divizorilor $d(a)$ ai lui a; iar suma însăşi reprezintă suma $S(a)$ a divizorilor numărului a.

Factorii expresiei (2) conţin un număr de $\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_n + 1$ termeni, deci, suma obţinută prin înmulţirea acestor factori conţine $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$ termeni. *Numărului divizorilor lui* a este deci, egal cu:

$$d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1). \tag{3}$$

Pentru a calcula suma observăm că factorii expresiei (2) sînt progresii geometrice cu raţiile $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Deci, suma divizorilor lui a este dată de următoarea formulă:

$$S(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}. \tag{4}$$

De exemplu, în cazul numărului $a = 120 = 2^3.3.4$ numărul, respectiv suma divizorilor sînt egale cu $d(120) = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4.2.2 = 16$, respectiv $S(120) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 360$.

Dacă numerele prime figurează numai la puterea 1 în descompunerea (1) a numărului a, atunci se deduce din formula (3) că numărul divizorilor lui a este egal cu

$$d(a) = 2^n. \tag{5}$$

De exemplu, pentru $a = 30 = 2.3.5$, $d(30) = 2^3 = 8$.

3. **O demonstrație aritmetică a unei relații combinatorice.** — O relație bine cunoscută în analiza combinatorie este următoarea:

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^n = 2^n - 1.$$

unde $C_n^k (k = 1,2,\ldots n)$ reprezintă numărul combinărilor a n elemente luate de k ori. Dacă luăm în considerare că $C_n^0 = 1$, relația precedentă se poate scrie și sub forma următoare:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Această formulă exprimă următoarea teoremă: *Suma coeficienților binomiali este egală cu* 2^n. Vom da o demonstrație a acestei relații, în care ne vom folosi numai de noțiunea de combinare și de cîteva noțiuni și rezultate elementare din aritmetică.

Să alegem n numere prime diferite. Fie $p_1, p_2, \ldots p_n$ aceste numere. Produsul acestora este un număr întreg:

$$a = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Divizorii numărului a sînt, în afară de 1, numerele obținute în felul următor: formăm din numerele prime $p_1, p_2, \ldots, p_n$ toate combinațiile posibile și formăm produsul numerelor din aceste combinații. Numărul divizorilor lui este egal deci, cu $d(a) = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$. Pe de altă parte, $d(a) = 2^n$ (v. formula 5 de la punctul 2). Rezultă că:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^n = 2^n.$$

ceeace era de demonstrat.

4. — **O aplicație a sistemului diadic.** — Seria de greutăți care se întrebuințează în practică pentru măsurarea greutăților se compune din greutăți de 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; etc. dcg, deci alegerea acestei serii se bazează pe sistemul zecimal. Dacă avem din fiecare greutate un singur exemplar și vrem să măsurăm în așa fel ca aceste greutăți să fie puse numai în același taler, atunci multe greutăți (de exemplu, greutățile de 4; 9; 14; 19;...dcg) nu se pot măsura. Se pune problema: cum trebuie să fie aleasă *o serie de greutăți pentru ca pînă la o anumită limită să fie posibilă, măsurarea greutății fiecărui obiect cu un număr minimal de greutăți, în așa fel încît aceste greutăți să fie puse numai pe același taler.*

Se poate arăta ușor că putem atinge acest scop pînă la $2^{n+1} - 1$ dcg cu seria de greutăți de 1; 2; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$;...; 2^n dcg. Pentru aceasta trebuie să observăm că măsurarea unui obiect de x dcg, cu greutățile 1; 2; 4; 8;...; 2^n în

condițiile de mai sus, este echivalentă cu problema reprezentării numărului x în forma:

$$x = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots + a_n \cdot 2^n, \qquad (1)$$

unde numerele $a_0, a_1, \ldots a_n$ pot fi egale cu 0 sau 1. Cu alte cuvinte problema se formulează în felul următor: *dacă numărul x se poate scrie în sistemul diadic ca un număr care conține maximum $n + 1$ unități sau nu?* Această reprezentare a lui x este posibilă și univocă dacă $x < 2^{n+1}$. Într-adevăr, x trebuie să satisfacă inegalitatea $x < 2^{n+1}$, deoarece în sistemul diadic $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ este cel mai mare număr care conține $n + 1$ cifre. Dacă x este egal cu unul din numerele $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$, atunci afirmația noastră este evident adevărată. Dacă $2 < x < 2^2$ (adică $x = 3$), atunci $x = 1 + 2$; dacă $2^2 < x < 2^3$, atunci $x = 2^2 + x_1$, unde $x_1 < 2^3 - 2^2 = 2^2 (2 - 1)$ și deoarece acest număr se poate reprezenta cu ajutorul numerelor $1, 2, 2^2$ în forma (1), urmează că x se poate reprezenta cu ajutorul lui $1, 2, 2^2$ și 2^3 în forma (1); continuînd acest raționament, ajungem la concluzia că dacă $2^{n-1} < x < 2^n$ atunci x se poate reprezenta cu ajutorul numerelor $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ în forma (1) și, însfîrșit, dacă $2^n < x < 2^{n+1}$, atunci $x = 2^n + x_{n-1}$, unde $x_{n-1} < 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ și deoarece acest număr se poate reprezenta cu ajutorul numerelor $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ în forma (1). urmează că x se poate reprezenta cu ajutorul numerelor $1, 2, 2^2, \ldots 2^n$ în forma (1). Univocitatea reprezentării lui x este urmarea faptului că în sistemul diadic, ca și în orice alt sistem de numerație, reprezentările numerelor se pot face numai într-un singur fel. În consecință, pînă la limita de $2^{n+1} - 1$ dcg se pot măsura toate greutățile (și anume, numai într-un singur fel) cu seria de greutăți $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$ în așa fel că aceste greutăți se pun numai într-un singur taler. Acest randament nu-l pot avea $n + 1$ greutăți dintr-o serie de greutăți, care e diferită de cea precedentă. Într-adevăr, cea mai bună serie de greutăți trebuie să conțină greutatea de 1 dcg pentru măsurarea obiectelor de 1 dcg și greutatea de 2 dcg pentru măsurarea obiectelor de 2 dcg. Cu aceste două greutăți se pot măsura obiectele de 3 dcg, dar pentru măsurarea a 4 dcg avem nevoie de greutatea de 4 dcg, și așa mai departe; în sfîrșit, avem nevoie de greutatea de 2^n dcg.

De exemplu, cu seria de greutăți compusă din 6 măsuri: 1; 2; 4; 8; 16; 32 se poate măsura orice greutate pînă la $2^6 - 1 = 63$.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

UN MODEL DE GENERATOR DE CURENT ALTERNATIV

după **V. G. MACRUȘIN**

din « Fizica v școle » nr. 5/1954

ÎN manualele școlare de fizică este descris generatorul de curent alternativ. Pentru a explica elevilor construcția și funcționarea generatoarelor folosite în industrie, la care curentul este indus în înfășurările statorului, în cercul de fizică se pot construi modele de asemenea generatoare cu magneți permanenți sau electromagneți.

Construcția unui model de generator cu magneți permanenți se vede clar în fig. 1. Drept postament al modelului servește o scîndură de dimensiunile 27 × 16 × 2 cm. Pe postament sînt fixate două suporturi de metal *2* pe care se fixează rotorul. Înălțimea suporturilor se calculează astfel încît axul rotorului să se afle la o disanță de 12,5 cm de postament. Distanța dintre suporturi este de 17,2 cm. Rotorul este un cilindru de lemn 6 cu diametrul de 7 cm și înălțimea de 13 cm. De ambele părți pe ax se îmbracă cilindrii de lemn *5*, cu diametrul de 2 cm și înălțimea de 2 cm.

După direcția a trei diametri dispuși la 120° unul față de altul, se practică tăieturi în rotor cu o daltă îngustă în care se introduc forțat, magneți în formă de bare. Una din tăieturi se face de trei ori mai largă pentru a se introduce 3

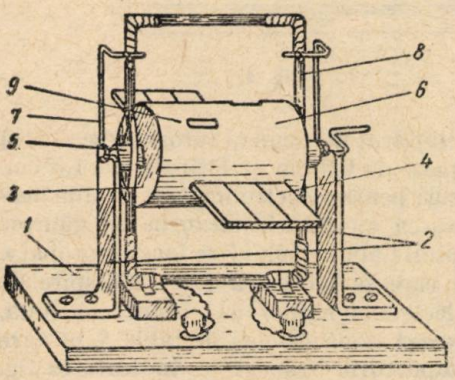


Fig. 1.

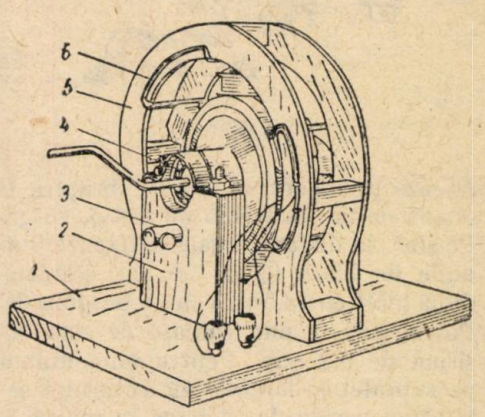


Fig. 2.

magneți alăturați. Înfășurarea *8*, în interiorul căreia se învîrtește magnetul (fig. 1) are 200 spire din sîrmă subțire (0,2—0,3) cu izolație de email. Ea poate fi confecționată în felul următor: se bat 4 cuie într-o scîndură în colțurile unui dreptunghi cu dimensiunile de 14,5 × 20,5 cm. Pe cuie se înfășoară sîrma. În cîteva locuri înfășurarea se leagă cu ață, apoi se scoate. Laturile mai lungi ale înfășurării se desfac pentru a trece axul rotorului. Pe urmă cadrul se înfășoară la colțuri cu bandă izolantă, lăsînd numai o porțiune mică pentru ca să se vadă că înfășurarea are multe spire. Cadrul se fixează pe niște suporturi mici de lemn, iar la partea de sus se fixează cu ajutorul unor susținători din sîrmă *7*, sudați la suporturile *2*. Capetele înfășurării sînt aduse la borne.

Dacă în cele trei tăieturi ale rotorului se introduce cîte un magnet așa încît polii lor să alterneze, la învîrtirea rotorului se va induce în înfășurare un curent cu frecvența de trei ori mai mare decît frecvența rotorului. Acesta va fi un model de generator cu mai mulți poli.

Un model de generator cu electromagneți rotativi este prezentat în fig. 2. Postamentul acestui model are dimensiunile 32 × 45 × 3 cm. Suporturile de lemn de pe el se confecționează din scîndură groasă de 4 cm. Ele sînt înalte de 16,5 cm și au lățimea de 14. Distanța dintre suporturi este de 14 cm. În suporturi se fac cîte trei găuri: două verticale, cu diametrul ceva mai mare decît al șuruburilor cu care se fixează suporturile de postament (și brățara rulmentului de la axul rotorului) — și una orizonatală, pentru a se trece tubul în care se află peria care aduce curentul la rotor.

In fig. 3 este reprezentat rotorul generatorului. El este un cilindru de lemn *1* cu diametrul de 18,5 cm şi înălţimea de 2 cm, fixat pe axul *2*. Acesta este de dorit să fie din lemn şi aşa de gros ca pe el să intre cu precizie doi rulmenţi cu bile *3*. După diametrul exterior al rulmenţilor se fac tăieturi în suporturile *2* ale modelului (fig. 2) şi se îndoaie brăţările *4*, indicate în fig. 3. Rulmentul se

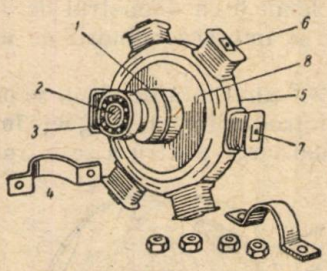


Fig. 3.

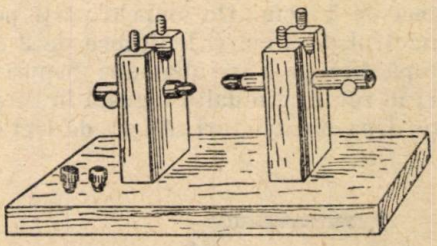


Fig. 4.

fixează în suport cu aceste brăţări. Pe cilindrul de lemn al rotorului se aşează o şină de fier în formă de inel *5*, cu grosimea de 0,8 cm şi lăţimea de 1,8 cm. Pe şină, la distanţe egale se fixează 6 miezuri pentru electromagneţi cu dimensiunile de 1,8 × 0,5 × 3,5 cm. Pentru fixarea cu nituri, miezurile se găuresc după înălţime (3,5 cm) cu un burghiu de 2 mm. Capul nitului *7* se face «îngropat». Pe miezuri se pun carcase de carton, pe care se înfăşoară 120—150 spire de sîrmă de 0,2 mm. Pentru alimentarea electromagneţilor cu curent continuu, pe suprafeţele laterale ale rotorului se fixează două discuri de tablă *8*, pe care le ating periile de cărbune introduse în suporturile respective, indicate în fig. 4. Susţinătoarele periilor se confecţionează din tuburi de diametru potrivit. Dintr-o parte, transversal pe tub, se fixează o clemă, iar în interior se introduce un arc care apără peria. Capetele înfăşurărilor electromagneţilor se sudează de discurile aşezate pe suprafeţele laterale ale rotorului.

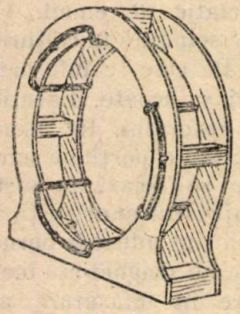


Fig. 5.

Înfăşurarea statorului se face din 200 spire de sîrmă de 0,2 — 0,3. Ea se înfăşoară mai întîi pe 2 cuie bătute la distanţă de 46 cm unul de altul şi se lipeşte apoi în cîteva locuri cu bandă izolantă. Înfăşurarea se fixează pe carcasa statorului a cărui formă se vede bine în fig. 5. Pereţii laterali ai carcasei se confecţionează din placaj. Diametrul interior al carcasei este de 27 cm. Centrul ei trebuie să coincidă cu axul de rotaţie al rotorului, ceea ce se realizează la montarea modelului prin introducerea sub stator sau sub suporturi a unor bucăţi de carton. Lăţimea carcasei este de 7 cm. Pe axul rotorului se poate aşeza o roată de transmisie cu curea. Pentru demonstrare se conectează la perii o sursă de curent continuu (element sau acumulator). Capetele înfăşurării se conectează la un galvanometru. Frecvenţa care se obţine este de trei ori mai mare (după numărul perechilor de poli), decît frecvenţa corespunzătoare a rotorului. Trebuie subliniat că la construcţia generatoarelor veritabile, din industrie, înfăşurarea statorului nu se află în aer, ci se aşează în renurele unei carcase de fier, ceea ce permite o considerabilă mărire a cîmpului magnetic.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ IAŞI, EXAMENUL II, 1955.

2040. Se consideră un con circular drept cu raza bazei R şi înălţimea H; cu centrul în vîrful conului se descrie o sferă de rază r ($r < H$). Se suprimă porţiunea din suprafaţa sferei cuprinsă în interiorul conului şi porţiunea din suprafaţa conului cuprinsă în interiorul sferei. Se cere să se afle:

1) aria acestui corp, fără aria bazei conului;

2) presupunînd cunoscute generatoarea G a conului şi raza R a lui precum şi aria πa^2 a corpului de mai sus, să se găsească raza sferei precum şi condiţia de posibilitate a problemei.

2041. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$\sin x + m \sin^2 2x + \sin 3x = 0.$$

2042. Se consideră un dreptunghi a cărui lungime este mai mare cu 1 decît lăţimea şi un patrat cu latura 1. Cît de mare trebuie să fie lăţimea pentru ca aria dreptunghiului să fie de 6 ori mai mare decît aria patratului?

2043. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^6 x + \cos^6 = \frac{1}{4}\cdot$$

2044. Pe o dreaptă se dau punctele A, B, C aşa ca $AB = a$, $BC = b$. Din B se descrie o sferă cu raza r şi din A se duce conul tangent la aceasta.

a) Să se afle raza sferei cu centrul în C tangentă la conul precedent.

b) Să se afle aria totală şi volumul corpului cuprins între con şi cele 2 sfere.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC IAŞI AUGUST 1955.

2045. Într-un triunghi dreptunghic înălţimea corespunzătoare ipotenuzei este de $\frac{24}{5}$ m, iar suma catetelor este de 14 m.

Să se afle volumul corpului ce se obţine din rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei.

2046. Se consideră două conuri circulare drepte C şi c avînd vîrful V comun şi planele bazelor P şi p paralele între ele. Ştiind că pentru conurile considerate valorile numerice (exprimate în metri) ale razelor R şi r şi ale înălţimilor I şi i satisfac sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} 3R - 5I + 2r + 4i &= 0, \\ 2R - I - i &= 0, \\ R + 2I - 7r &= 0, \\ 3I + 4r - 9i &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

a) să se determine soluţia sistemului (1) eliminînd necunoscuta i din ecuaţia a doua;

b) să se verifice că generatoarele conurilor fac acelaşi unghi cu înălţimile corespunzătoare;

c) să se calculeze diferenţa volumelor conurilor C şi c precum şi suprafeţele laterale ale lor;

d) să se calculeze cu aproximaţie pînă la 0,001 raza unui al treilea con circular drept avînd înălţimea $I - i$ şi volumul egal cu diferenţa volumelor conurilor C şi c.

2047. a, b, c fiind trei numere reale, să se demonstreze inegalitatea:

$$3a^2 + 2(b + c)a + 3b^2 + 3c^2 - 2bc \geqslant 0 \qquad (1)$$

și să se arate că semnul egal este posibil numai dacă $a = b = c = 0$.

Punînd apoi, $a = \cos u$, $b = \sin u$, $c = \operatorname{tg} u$ să se deducă inegalitatea:

$$3 + \sin 2u + \sin u + \frac{(3 - 2\cos u)\sin^2 u}{\cos^2 u} \geqslant 0, \qquad (2)$$

valabilă pentru orice u pentru care $\cos u \neq 0$. Este posibil ca inegalitatea (2) să fie vreodată o egalitate?

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTATEA DE INDUSTRIE UȘOARĂ IAȘI, 29 AUGUST 1955

2048. — O dreaptă oarecare dusă prin punctul de intersecție al diagonalelor unui dreptunghi $ABCD$ intersectează laturile opuse AB și CD în M respectiv N, iar prelungirile laturilor opuse BC și AD, în P respectiv Q. Să se arate că:

$$\frac{AB^2}{PQ^2} + \frac{BC^2}{MN^2} = 1.$$

2049. — Să se găsească valorile lui m pentru care sistemul:

$$\begin{aligned} x + y &= 4m - 4, \\ xy + 5x + 5y &= 6m^2 - 6, \\ 5xy + 4x + 4y &= m^2 - 3m + 2 \end{aligned}$$

are soluții. În caz afirmativ se va rezolva.

2050. — Să se găsească soluțiile ecuației:

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x.$$

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL PEDAGOGIC, TIMIȘOARA, ÎN ANUL 1955

2051. — Se dă trinomul $y = x^2 + bx + c$. Se cere:

1) Să se determine coeficienții b și c astfel ca numerele 1, b și c să formeze în ordinea indicată o progresie aritmetică, iar suma patratelor rădăcinilor trinomului să fie 47.

2) Să se reprezinte grafic trinomul y obținut înlocuind pe b și c cu valorile găsite la punctul 1) și să se deducă semnul său.

3) Să se rezolve inecuația $\dfrac{x^2 + bx + c}{2x^2 - 8} > 1$; b și c avînd tot valorile găsite la punctul 1).

2052. — Se dă un triunghi isoscel ABC avînd $AB = AC = a$ și unghiul $A = x$, $90° < x < 180°$ (x fiind mai mic decît 180° și mai mare decît 90°). Se cere să se calculeze în funcție de a și x:

1) Aria și volumul corpului născut prin rotirea triunghiului în jurul uneia din laturile egale.

2) Raportul $\dfrac{R}{r}$, unde R este raza sferei circumscrise conului interior (cel mic) și r raza sferei înscrise în conul exterior (cel mare).

3) Să se calculeze elementele de la punctul 1 și 2 dacă x este rădăcina ecuației trigonometrice:

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{2}{\cos^2 x} \text{ și } a = 6 \text{ cm}.$$

2053. — Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^2 + xy + y^2 = a^2,$$

$$x + \sqrt{xy} + y = b.$$

2054. — Se dă $\cos x = \frac{3}{4}$ știind că $0° < x < 90°$. Se cere să se afle valoarea expresiei: $32 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2}$.

2055. — Se dau ecuațiile:

$$2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} + 32 = 0, \quad \log (x + 0{,}8) + \log (x - 0{,}2) = \log 12.$$

Rădăcina pozitivă a primei ecuații este lungimea catetei unui triunghi dreptunghic, iar a celei de-a doua este proiecția pe ipotenuză a celeilalte catete. Să se afle toate elementele de lungime ale triunghiului dreptunghic.

DIN PROBLEMELE DATE LA OLIMPIADELE MATEMATICE ÎN UNIUNEA SOVIETICĂ 1955

2056. — Suma unui număr oarecare de numere consecutive din șirul natural al numerelor, începînd cu unitatea, este de 3 cifre, toate cifrele acestuia fiind identice. Cîte numere s-au luat în această sumă?

(Olimpiada matematică din Kiev, clasa VIII, 1955)

2057. — Fie dat un triedru și pe una din fețele sale un punct A. Să se găsească cel mai scurt drum închis pe suprafețele triedrului, care trece prin punctul A și care intersectează toate muchiile.

(Olimpiada matematică din Kiev, clasa IX, 1955)

2058. — Doi jucători extrag pe rînd bile dintr-o ladă. La rîndul său, fiecare poate lua un număr oarecare de bile mai mic decît p. Va pierde acela care va fi obligat să ia ultima bilă. Cum trebuie să joace primul jucător pentru a cîștiga, dacă numărul bilelor din ladă este n $(p < n)$?

(Olimpiada matematică din Kiev, clasa IX, 1955)

2059. — Să se rezolve ecuația: $6^x + 4^x = 9^x$.

(Olimpiada matematică din Kiev, clasa IX, 1955)

2060. — Să se arate că numărul $3^{2n+2} - 8^n - 9$ este divizibil cu 64 pentru orice n întreg.

(Olimpiada matematică din Kiev, clasa X, 1955)

2061. — Un pieton, mergînd pe calea Stalin în orașul Ordjonikidze, a observat că după fiecare 12 minute este întrecut de tramvai, iar după fiecare 6 minute el însuși întîlnește tramvaiul. Considerînd că pietonul și tramvaiul se mișcă cu o viteză constantă, să se determine după ce interval de timp pleacă tramvaiul din ultima stație.

(Olimpiada matematică din Ordjonikidze, clasa IX, 1955)

2062. — Să se găsească soluțiile raționale ale sistemului de ecuații

$$x + z = 3,$$

$$y + u + xz = \frac{9}{2},$$

$$xu + yz = 3,$$

$$yu = 1.$$

(Olimpiada matematică din Ordjonikidze, clasa IX, 1955)

2063. — Să se găsească cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției $y = \cos 2x - 4 \sin x$.

(Olimpiada matematică din Ordjonikidze, clasa IX, 1955)

2064. — Două vase A și B, de aceeași greutate, conțin cantități diferite de apă. Greutatea vasului A cu apă reprezintă $\frac{4}{5}$ din greutatea vasului B cu apă. Dacă toată apa din B se varsă în A, atunci greutatea lui A va fi de opt ori mai mare decît greutatea lui B. Știind că în B era cu 500 g mai multă apă decît în A, să se determine greutatea vaselor și cantitatea inițială de apă din fiecare vas. (Se cere rezolvare aritmetică și algebrică.)

(Olimpiada matematică din Ordjonikidze, cl. X, 1955)

1065. — Să se demonstreze că dacă $0 < 2\alpha < 180°$, atunci este adevărată inegalitatea $\operatorname{ctg} \alpha \geqslant 1 + \operatorname{ctg} 2\alpha$.

(Olimpiada matematică din Ordjonikidze, cl. X, 1955)

2066. — Se dă funcția $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare a ei și să se construiască graficul.

(Olimpiada matematică din Ordjonikidze, cl. X, 1955)

DIN PROBLEMELE DATE LA OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ DIN R. P. POLONĂ

2067. — Să se găsească locul geometric al centrului unui dreptunghi ale cărui vîrfuri sînt așezate pe perimetrul unui triunghi dat.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2068. — Să se demonstreze că ecuația

$$(x - a)(x - c) + 2(x - b)(x - d) = 0,$$

în care $a < b < c < d$, are două rădăcini reale.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2069. — Se dă un cerc și două tangente la acest cerc. Să se ducă o a treia tangentă la acest cerc în așa fel ca segmentul ei cuprins între tangentele date să aibă o lungime dată d.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2070. — Să se demonstreze că dacă n este un număr întreg mai mare decît 2, atunci

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$$

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2071. — Să se demonstreze că dacă $a < b < c < d$, atunci:

$$(a + b + c + d)^2 < 8(ac + bd).$$

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2072. — Se dau două drepte oarecare în spațiu, m și n. Pe dreapta m se măsoară segmentul AB de lungime dată a, iar pe dreapta n se măsoară segmentul CD de lungime dată b. Să se demonstreze că volumul tetraedrului $ABCD$ nu depinde de poziția segmentelor AB și CD pe dreptele m și n.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2073. — Se dă o dreaptă Δ și punctele A și B așezate unul de o parte iar celălalt de cealaltă parte a acestei drepte. Să se ducă un cerc prin punctele A și B în așa fel, încît coarda în cerc, determinată de dreapta Δ să fie cît mai scurtă.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2074. — Se dă o dreaptă, un cerc și un punct A care nu este așezat pe niciuna din aceste linii. Să se ducă prin punctul A un segment care să aibă o extremitate pe cerc, iar a doua pe dreaptă, astfel ca punctul A să fie mijlocul acestui segment.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2075. — Se dă un cerc k și cele două tangente duse din punctul M, MP și MQ. Să se ducă la acest cerc încă o tangentă așa fel ca segmentul ei cuprins între laturile unghiului PMQ să aibă o lungime dată l.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2076. — Cunoscînd raza R a cercului circumscris unui triunghi ABC, să se calculeze raza cercului care trece prin centrele celor trei cercuri exînscrise triunghiului ABC.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2077. — Să se înscrie într-un patrat dat, un alt patrat astfel ca una din laturile sale sau prelungirea ei să treacă prin punctul dat k.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2078. — Să se determine p și q astfel ca trinomul $x^4 + px^2 + q$ să fie divizibil prin trinomul dat $x^2 + ax + b$.

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2079. — Pentru ce valoare a parametrului m suma patratelor rădăcinilor ecuației $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$ are cea mai mică valoare?

(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

2080. — Să se ducă într-un cerc o coardă care, tăiată de coardele date AB și AC, să fie împărțită în trei părți egale.

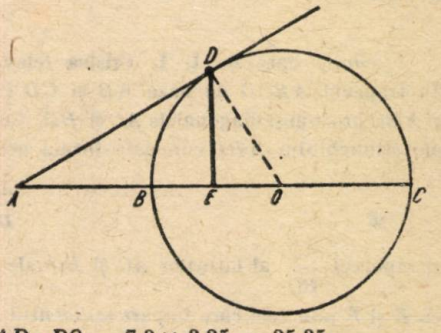
(Olimpiada matematică din R. P. Polonă, 1953)

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1449

Luăm pe aceiași dreaptă în continuare, segmentele $AB = 5{,}2$ cm și $BC = 6{,}5$ cm. Descriem pe BC ca diametru un semicerc. Ducem tangenta AD din A la cerc. Să se calculeze distanța DE de la D la diametrul BC.

N. N. Mihăileanu



Soluție dată de **R. Stroe, I. Cristea, C. Țurlea, G. Șerb, I. Lupuțiu, S. Guiașu.** Conform puterii punctului față de cerc, avem:

$$AD^2 = AB \cdot AC = AB\,(AB + BC) =$$
$$= 5{,}2 \cdot 11{,}7 = 60{,}84,$$

deci,

$$AD = \sqrt{60{,}84} = 7{,}8.$$

În triunghiul dreptunghic ADO avem: $DE = \dfrac{AD \cdot DO}{AO} = \dfrac{7{,}8 \times 3{,}25}{5{,}2 + 3{,}25} = \dfrac{25{,}35}{8{,}45} = 3$ cm.

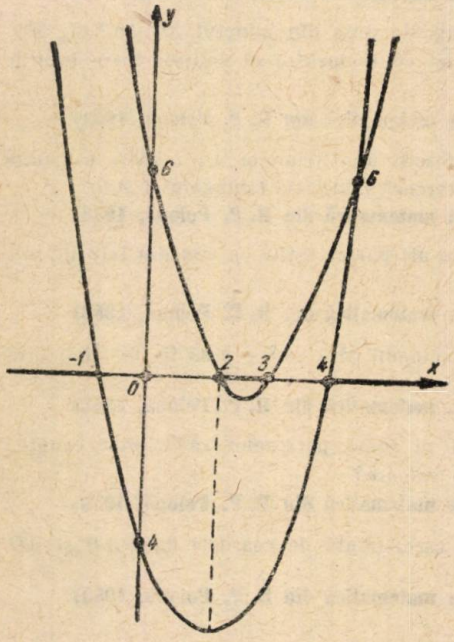
Problema 1515

Să se rezolve inecuația:

$$\frac{x-3}{x+1}+\frac{x^2+x-8}{(x+1)(x-4)}>\frac{x-2}{x-4}.$$

(Examen Inst. Mașini electrice, Craiova)

Soluție. Inecuația se mai poate pune sub forma:



$$\frac{(x-3)(x-4)+x^2+x-8-(x-2)(x+1)}{(x+1)(x-4)}>0$$

sau

$$\frac{x^2-5x+6}{(x+1)(x-4)}>0$$

în care va trebui să avem ambii termeni ai fracției pozitivi sau negativi pentru aceiași valoare dată lui x.

Reprezentăm grafic și numărătorul și numitorul inegalității.

În ipoteza I, trinoamele devin pozitive în afara rădăcinilor trinoamelor. Deoarece intervalul $(+2, +3)$ (valorile care anulează numărătorul) este cuprins în intervalul $(-1; +4)$ (valorile care anulează numitorul), valorile lui x care satisfac inecuația vor fi în afara intervalului $(-1; +4)$.

În ipoteza II, trinoamele devin negativ pentru valorile lui x în intervalul rădăcinilor care le anulează. Pentru motivul arătat la ipoteza precedentă, intervalul $(+2; +3)$ fiind cuprins în intervalul $(-1; +4)$ valorile lui x care satisfac inecuația vor fi în intervalul $(+2; +3)$. Deci avem ca soluții:

$$-\infty < x < -1;\quad 2 < x < 3 \quad \text{și} \quad 4 < x < +\infty.$$

Problema 1535

Să se construiască un trapez căruia i se cunosc unghiurile de la bază și lungimile diagonalelor.

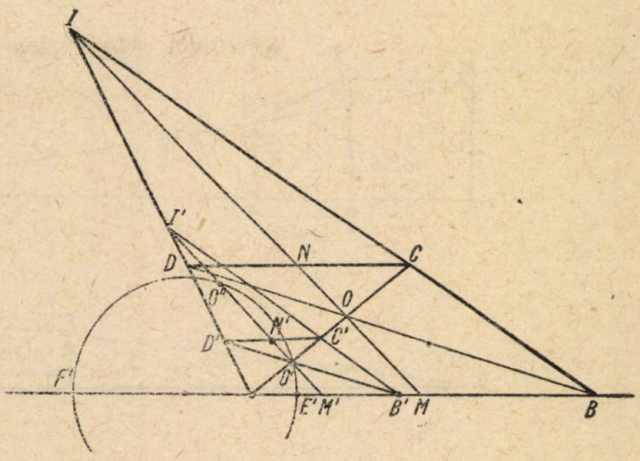
H. Hamzin (Sterlitamak)

Soluție dată de **I. I. Cristea** (elev, Constanța). — Presupunem problema rezolvată. În trapezul $ABCD$ de baze AB și CD (v. figura) cunoaștem unghiurile de la bază BAD și ABC precum și diagonalele AC și BD. Cunoscînd unghiurile $BAI = BAD$ și $ABI = ABC$ ale triunghiului ABI cunoaște forma acestuia. Totodată avem:

$$\frac{AO}{BO}=\frac{AC}{BC}$$

și raportul $\frac{AO}{BO}$ al laturilor AO și BO ale triunghiului ABO este deci constant, încît notînd cu E și F punctele care împart segmentul AB în acest raport, punctele E și F sînt picioarele bisectoarelor unghiului O în triunghiul ABO și deci punctul O se află pe cercul de diametru EF. Dar punctul O se află și pe mediana IM a triunghiului ABI. Urmează deci construcția:

Considerăm un segment oarecare AB' cu ajutorul căruia construim triunghiul $AB'I'$ ce are unghiurile $B'AI'$ și $AB'I'$ egale cu unghiurile date. Ducem mediana $I'M'$ a triunghiului $AB'I'$ și apoi împărțim segmentul AB' prin punctele E' și F' în raportul cunoscut $AO/BO = AC/BD$ al diagonalelor. Descriem semicercul de diametru $E'F'$. Acest semicerc taie mediana $I'M'$ a triunghiului $AB'I'$ în punctul O'. Ducînd și prelungind dreptele AO' și $B'O'$ obținem punctele C' și D', dreapta $C'D'$ fiind paralelă cu AB'. Am obținut astfel trapezul $AB'C'D'$ asemenea cu trapezul căutat.



Pentru a găsi trapezul $ABCD$, pe dreapta AC' din A luăm segmentul AC egal cu diagonala corespunzătoare unghiului ABC în trapezul $ABCD$, iar prin C ducem paralela CB la $I'B'$ și paralela CD la AB' obținînd astfel trapezul căutat, căci BD este cealaltă diagonală.

Alte două soluții sînt date în *Matematica v școle, nr. 2/1955.*

Observare. *Dacă mediana $I'M'$ taie semicercul de diametru $E'F'$ în două puncte O' și O'' cum e cazul figurii ($I'M'$ este secantă semicercului), problema admite două soluții diferite; dacă $I'M'$ e tangentă semicercului avem o soluție unică și dacă $I'M'$ nu taie semicercul nu avem soluții.*

Problema 1554

O lentilă convexă dă pe un ecran imaginea unei lămpi mărită de două ori. Cînd lentila a fost deplasată cu 36 cm mai aproape de ecran, ea a dat o imagine de două ori mai mică. Să se afle distanța focală a lentilei.

* * *

Soluție. Notînd cu p' și p respectiv distanța imaginei de la centrul optic al lentilei și distanța obiectului pînă la el, vom avea $\frac{p'}{p} = 2$ și $\frac{p'-36}{p+36} = \frac{1}{2}$, de unde $p = 36$ și $p' = 72$ cm, deci distanța focală este $f = \frac{pp'}{p+p'} = 24$ cm.

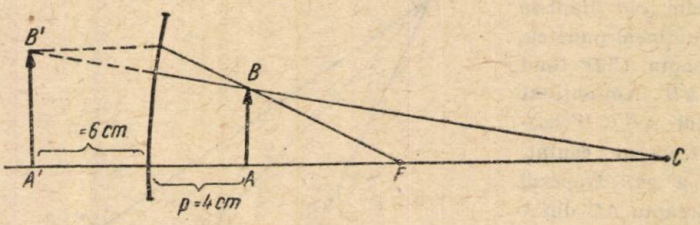
S-au primit soluții bune de la **Ad. G. Șerb, M. Filipoiu, C. Țurlea, D. Donescu, T. Colibaba, I. Cristea, L. Ghițescu, I. Alexa.**

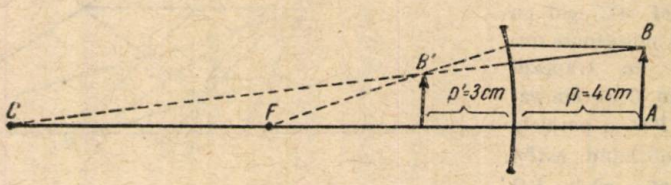
Problema 1590

Un obiect se află la o depărtare de 4 cm de vîrful unei oglinzi sferice, distanța focală fiind de 12 cm. Să se afle distanța imaginei. Să se construiască imaginea formată.

* * *

Soluție dată de **Miu Gh. Filipoiu.** Dacă oglinda este concavă, folosesc formula $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, unde f = distanța focală, p = distanța obiectului de vîrful oglinzii, p' = distanța imaginii de vîrful oglinzii. Deci: $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{p'}$, de unde $p' = -6$ cm.





Dacă oglinda este convexă, folosesc formula $\frac{1}{f} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ sau $\frac{1}{21} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{p'}$, de unde $p' = 3$ cm.

Problema 1595

Pe latura BC a unui triunghi ABC sau pe prelungirile ei, se iau două puncte oarecare I, D. Din I se duc paralelele la laturile AB, AC pînă întîlnesc în E și F respectiv laturile AC, AB. O paralelă la dreapta EF întîlnește în N, P respectiv dreptele DF, DE. Se coboară perpendicularele NN' pe AC și PP' pe AB și înălțimile BB', CC'. Să se arate că:

$$\frac{NN'}{BB'} \pm \frac{PP'}{CC'} = 1 \quad \text{și} \quad S_{NAC} \pm S_{PAB} = S_{ABC}.$$

Dan C. Panu

Soluție dată de **I. Cristea,** Constanța. — 1. Fie F' și K proiecțiile punctelor F și D pe AC, iar E' și L proiecțiile punctelor E și D pe AB. Paralelele FF', NN', DK determină pe secantele FD, $F'K$ niște segmente, iar paralelele EE', PP', DL determină pe secantele ED, $E'I$ alte segmente între care există respectiv relațiile:

$$NN' = \frac{FN \cdot DK + ND \cdot FF'}{FN + ND}; \quad PP = \frac{EP \cdot DL + PD \cdot EE'}{EP + PD}, \tag{1}$$

de unde:

$$\frac{NN'}{BB'} = \frac{FN}{FN + ND} \cdot \frac{DK}{BB'} + \frac{ND}{FN + ND} \cdot \frac{FF'}{BB'};$$

$$\frac{PP'}{CC'} = \frac{EP}{EP + PD} \cdot \frac{DL}{CC'} + \frac{PD}{EP + PD} \cdot \frac{EE'}{CC'}.$$

Cum însă

$$\left|\frac{DK}{BB'} \pm \frac{DL}{CC'}\right| = \left|\frac{DC}{BC} \pm \frac{BD}{BC}\right| = \frac{|DC \pm BD|}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1,$$

$$\left|\frac{FF'}{BB'} \pm \frac{EE'}{CC'}\right| = \left|\frac{AF}{AB} \pm \frac{AE}{AC}\right| = \left|\frac{IC}{BC} \pm \frac{BI}{BC}\right| = \frac{|IC + BI|}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1,$$

iar:

$$\frac{FN}{FN + ND} = \frac{EP}{EP + PD}$$

și

$$\frac{ND}{FN + ND} = \frac{PD}{EP + PD},$$

căci:

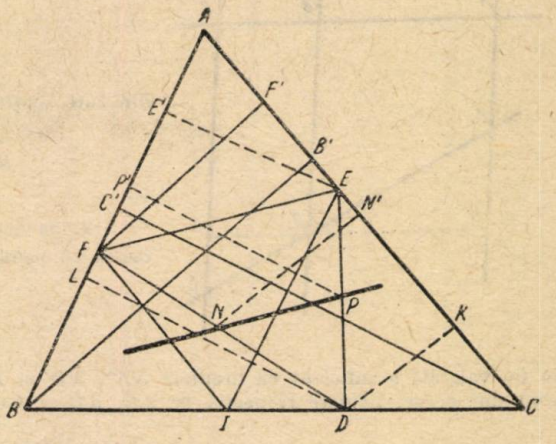
$$\frac{FN}{ND} = \frac{EP}{PD},$$

rezultă:

$$\left|\frac{NN'}{BB'} \pm \frac{PP'}{CC'}\right| =$$

$$= \frac{FN}{FN + ND}\left|\frac{DK}{BB'} \pm \frac{DL}{CC'}\right| +$$

$$+ \frac{ND}{FN + ND}\left|\frac{EF'}{BB'} \pm \frac{EE'}{CC'}\right|$$



sau

$$\left|\frac{NN'}{BB'} \pm \frac{PP'}{CC'}\right| = \frac{FN}{FN + ND} + \frac{ND}{FN + ND}$$

și prin urmare:

$$\left|\frac{NN'}{BB'} \pm \frac{PP'}{CC'}\right| = 1. \qquad (2)$$

2. Amplificăm relația (2) cu S_{ABC}. Obținem:

$$NN' \cdot \frac{S_{ABC}}{BB'} \pm PP' \cdot \frac{S_{ABC}}{CC'} = S_{ABC}.$$

cum însă:

$$\frac{S_{ABC}}{BB'} = \frac{AC}{2} \text{ și } \frac{S_{ABC}}{CC'} = \frac{AB}{2},$$

rezultă:

$$\left|NN' \cdot \frac{AC}{2} \pm PP' \cdot \frac{AB}{2}\right| = S_{ABC},$$

sau

$$S_{NAC} \pm S_{PAB} = S_{ABC},$$

căci evident:

$$S_{NAC} = \frac{NN' \cdot AC}{2} \text{ și } S_{PAB} = \frac{PP' \cdot AB}{2}.$$

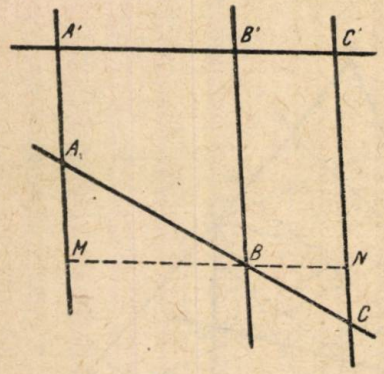
Observare. 1. La scrierea relațiilor (1) ne-am bazat pe următorul fapt: fie AA', BB', CC' segmentele determinate de două secante oarecare pe trei paralele astfel că $AA' < BB < CC'$ (figura). Există relația:

$$BB' = \frac{AB \cdot CC' + BC \cdot AA'}{AB + BC}.$$

Într-adevăr, ducînd prin B paralela MN (M pe AA', N pe CC') triunghiurile MAB și MBC sînt asemenea așa că:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{NC},$$

cum însă: $AM = A'M - A'A = B'B - A'A$; $NC = C'C - C'N = C'C - B'B$,



rezultă

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BB' - A'A}{C'C - A'A},$$

din care scoțînd pe $B'B$ obținem:

$$B'B = \frac{AB \cdot C'C + BC \cdot A'A}{AB + BC}.$$

2. Se deduce bazîndu-se pe observarea precedentă că pentru ca relația

$$\left| \frac{NN'}{BB'} \pm \frac{PP'}{CC'} \right| = 1$$

să fie valabilă e suficient ca dreptele NN', BB' și PP', CC' să fie respectiv paralele. Cazul cînd sînt perpendiculare respectiv pe AC, AB și deci paralele între ele, e un caz particular.

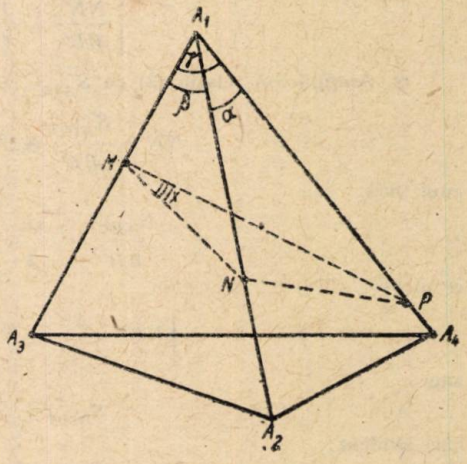
Problema 1596

Se dă un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ și se notează $A_4A_1A_2 = \alpha$; $A_2A_1A_3 = \beta$; $A_3A_1A_4 = \gamma$ și fețele opuse vîrfurilor A_2, A_3, A_4 respectiv cu S_2, S_3, S_4. Dacă $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ să se stabilească relația:

$$\cos(S_2, S_3) + \cos(S_3, S_4) + \cos(S_4, S_2) = 1,$$

prin (S_2, S_3) înțelegîndu-se unghiul diedru format de fețele S_2 și S_3.

Mircea Bocu, Oradea



Soluție dată de **I. I. Cristea** (Constanța) și **Ad. G. Șerb** (Pitești). Fie M un punct pe muchia A_1A_3. Planul perpendicular în M pe muchia A_1A_3 determină triunghiul MNP. Fie $\sphericalangle NMP = x$, adică $(S_2, S_4) = x$. Din triunghiul MNP avem:

$$\cos x = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2\,MN \cdot MP},$$

iar din triunghiul A_1NP avem: $NP^2 = A_1A^2 + A_1P^2 - 2A_1N \cdot A_1P \cos\alpha$, încît:

$$\cos x = \frac{MN^2 + MP^2 - A_1N^2 - A_1P^2 + 2A_1N \cdot A_1P \cos\alpha}{2\,MN \cdot MP} = \frac{A_1N \cdot A_1P \cos\alpha - A_1M^2}{MN \cdot MP},$$

căci evident:

$$A_1N^2 - MN^2 = A_1M^2; \quad A_1P^2 - MP^2 = A_1M^2.$$

Cum totodată:

$$\frac{A_1M}{A_1N} = \cos\beta; \quad \frac{MN}{A_1N} = \sin\beta; \quad \frac{A_1M}{A_1P} = \cos\gamma; \quad \frac{MP}{A_1P} = \sin\gamma,$$

avem:

$$\cos x = \frac{\cos\alpha - \frac{A_1M}{A_1N}\cdot\frac{A_1M}{A_1P}}{\frac{MN}{A_1M}\cdot\frac{MP}{A_1P}} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} -$$

$$- \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} - \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma.$$

Analog:

$$\cos y = \frac{\sin 2\beta}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} - \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\sin 2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$$

și într-adevăr, dacă $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, atunci:

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} -$$

$$- (\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha) = 1,$$

căci:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

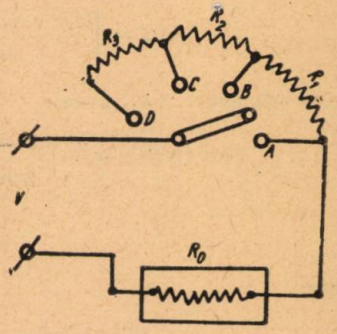
$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Relația este deci demonstrată.

Problema 1600

Cum trebuie să fie rezistențele R_1, R_2, R_3 ale unui reostat (din figură) pentru ca intensitatea curentului care trece printr-un aparat cu rezistența $R_a = 30$ ohmi la deplasarea comutatorului reostatului de pe un contact pe altul să se schimbe cu 1 A. Schema e alimentată de la o sursă cu tensiunea de 120 V.

* * *



Soluție. Intensitatea curentului, cînd comutatorul face contact în A, este:

$$I_0 = \frac{120}{30} = 4\text{A}.$$

Conform problemei, la mutarea comutatorului pe contactul B, introducîndu-se rezistența R_1, intensitatea curentului scade cu 1 A. Atunci:

$$I_1 = 4\text{A} - 1\text{A}; \quad \text{iar:} \quad 30 + R_1 = \frac{120}{3},$$

$$R_1 = 10 \text{ ohmi}.$$

Cînd se face contactul în C intensitatea I_2 devine (introducîndu-se și rezistența R_2):

$$I_2 = 3\text{A} - 1\text{A} = 2\text{A}; \quad \text{iar:} \quad 30 + 10 + R_2 = \frac{120}{2},$$

de unde: $R_2 = 20$ ohmi.

Cînd comutatorul face contactul în D, pentru ca intensitatea curentului să devină $I_3 = 2A - 1\text{A} = 1\text{A}$ trebuie ca:

$$30 + 10 + 20 + R_3 = \frac{120}{1},$$

adică $R_3 = 60$ ohmi. Deci: $R_1 = 10$ ohmi; $R_2 = 20$ ohmi; $R_3 = 60$ ohmi.

Problema 1601

Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ se cunosc laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ $DA = d$. Să se exprime lungimile diagonalelor AC și BD și raza cercului circumscris.

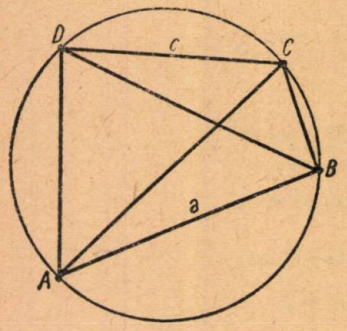
* * *

Soluție. Din triunghiurile ABC și ADC avem:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos(ABC),$$

$$AC^2 = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos(ABC)$$

și eliminînd pe $\cos(ABC)$ între aceste două relații, obținem:



$$AC^2\,(ab + cd) = (a^2 + b^2)\,cd + (c^2 + d^2)\,ab.$$

Cum însă:

$$(a^2 + b^2)\,cd + (c^2 + d^2)\,ab = (ac + bd)\,(ad + bc),$$

iar:

$$ac + bd = AC \cdot BD, \qquad (1)$$

rezultă:

$$AC^2\,(ab + cd) = AC.\ BD\,(ad + bc),$$

de unde

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}, \qquad (2)$$

și rezolvînd sistemul de ecuații (1), (2) în raport cu AC și BD, obținem:

$$AC^2 = \frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd}; \quad BD^2 = \frac{(ab + cd)\,(ac + bd)}{(ad + bc)}$$

de unde:

$$AC = \sqrt{\frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd}}; \quad BD = \sqrt{\frac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Din triunghiul ABC avem:

$$\cos(ABC) = \frac{a^2 + b^2 - AC^2}{2ab} = \frac{(a^2 + b^2)\,(ab + cd) - (ac + bd)\,(ad + bc)}{2ab\,(ab + cd)}$$

$$\cos(ABC) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)},$$

iar:

$$\sin^2(ABC) = 1 - \cos^2(ABC) = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)^2}\right)^2$$

sau:

$$\sin(ABC) = \frac{\sqrt{(-a + b + c + d)\,(a - b + c - d)\,(a + b - c + d)\,(a + b + c - d)}}{2\,(ab + cd)}.$$

și deci, tot din triunghiul ABC:

$$R = \frac{AC}{2\sin ABC} = \sqrt{\frac{(ab + cd)\,(ac + bd)\,(ad + bc)}{(-a + b + c + d)\,(a - b + c + d)\,(a + b - c + d)\,(a + b + c - d)}}$$

Soluțiile sînt date de **I. I. Cristea** (Constanța) și **C. Țurlea** (Craiova).

Problema 1633

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare există relația:

$$\Sigma a^3 \cos B \cos C = abc\, \Sigma \cos^2 A.$$

N. Botea (S.G.M. iunie 1935)

Soluția I-a dată de **Ad. Gab. Şerb** (Piteşti). — Avem

$$a^3 \cos B \cos C + b^3 \cos C \cos A + c^3 \cos A \cos B =$$

$$= a\,(a \cos B)\,(a \cos C) + b\,(b \cos)\,C\,(b \cos A) + c\,(c \cos A)\,(c \cos B) =$$

$$= a\,(c - p)\,n + c\,(a - m)\,p + c\,(b - n)\,m =$$

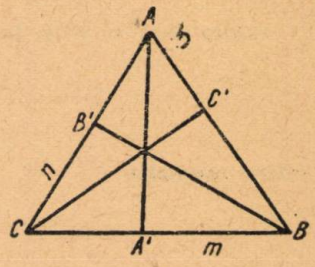
$$= a\,(b - n)\,p + b \cdot m\,(c - p) + c \cdot n\,(a - m) =$$

$$= a\,(c \cos A)\,(b \cos A) + b\,(a \cos B)\,(c \cos B) + c\,(a \cos C)\,(b \cos C) =$$

$$= abc\,(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

Soluția a II-a dată de **R. Stroe** (Ploieşti). Ţinem seamă de relaţiile:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ şi analoagele.}$$



Relaţia de demonstrat devine:

$$\Sigma a^3 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= abc\, \Sigma \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2},$$

sau

$$\Sigma \frac{a\,(a^2 + c^2 - b^2)\,(a^2 + b^2 - c^2)}{4bc} = \frac{\Sigma a^2\,(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4abc},$$

adică

$$\Sigma a^2\,(a^2 + c^2 - b^2)\,(a^2 + b^2 - c^2) = \Sigma a^2 + b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Dezvoltînd:

$$\Sigma\,(a^6 - a^2b^4 - a^2c^4 + 2a^2b^2c^2) = \Sigma\,(a^6 + a^2b^4 + a^2c^4 - 2a^4b^2 - 2a^4c^2 + 2a^2b^2c^2)$$

sau reducînd termenii asemenea:

$$\Sigma\,(-a^2b^4 - a^2c^4) = \Sigma\,(a^2b^4 + a^2c^4 - 2a^4b^2 - 2a^4c^2).$$

relaţie care este evidentă.

Problema 1649

Să se rezolve ecuaţia:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

(Examen Inst. Politehnic Iaşi)

Soluţia. Putem scrie succesiv:

$$1 + \cos 2x + \sin x + \cos x + \sin 2x = 0$$

sau:

$$2 \cos^2 x + (\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x) = 0.$$

Deci:

$$2 \cos x\,(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x = 0$$

sau:

$$(\sin x + \cos x)\,(2 \cos x + 1) = 0.$$

Avem: $\sin x + \cos x = 0$ sau $\operatorname{tg} x = -1$ care ne dă

$$x_{1,2} = 180\ K + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$, care ne dă:

$$x_{3,4} = (2K + 1)\ 180 \pm \frac{\pi}{3},$$

unde $K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Problema 1657

Să se găsească două progresii, una aritmetică și una geometrică, fiecare din cîte patru termeni, așa încît adunînd termenii de același rang din ambele progresii să obținem drept sumă respectiv numerele 18, 18, 26, 58.

(Olimpiada 1955. Clasa IX-a)

Soluție dată de **Edith Lazăr** (București). Avem:

$$\div,\ a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r;$$

$$\div\div,\ b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3.$$

Conform enunțului,

$$a + b = 18 \quad ; \quad (1)$$

$$a + r + bq = 18 \quad ; \quad (2)$$

$$a + 2r + bq^2 = 26 \ ; \quad (3)$$

$$a + 3r + bq^3 = 58 \ . \quad (4)$$

Prin scăderi obținem:

$$b\ (q - 1) = -r \quad ; \quad (2) - (1)$$

$$bq\,(q - 1) = 8 - r \ ; \quad (3) - (2)$$

$$bq^2(q - 1) = 32 - r. \quad (4) - (3).$$

Prin împărțiri obținem:

$$q = \frac{r - 8}{r} = \frac{32 - r}{8 - r}, \text{ de unde}$$

$$(r - 8)\,(8 - r) = 32\ r - r^2, \quad \text{deci} \quad 16\ r = -64.$$

Obținem $r = -4$ și $q = 3$.
Apoi, $a + b = 18$ și $a + 3b = 22$, de unde $a = 16$ și $b = 2$. Prin urmare avem:

$$\div;\ 16,\ 12,\ 8,\ 4:$$

$$\div\div;\ 2,\ 6.\ 18,\ 54.$$

S-au primit multe soluții, însă mai lungi.

Problema E: 566

Să se scrie în sistemul de numerație cu baza 8 numărul 1954 scris în baza 10. Același număr să fie scris în baza 12.

* * *

Soluție dată de elevii **I. Gervescu** și **C. Hodor,** clasa VII-a. Roznov. Numărul 1954 pentru a fi scris în baza 8 se procedează astfel:

```
1954 | 8
16   |-----
----- | 244 | 8
=35   | 24  |-----
 32   |-----| 30 | 8
----- | = =4 | 24 |-----
 =34  |      |-----| 3
  32  |      =6
-----
 = 2
```

Numărul 1954 scris în baza 10 se scrie în baza 8 astfel: 3642.

Pentru ca un număr să fie scris în baza 12 ne trebuie 12 semne. Avînd în numerația noastră numai 10 semne vom nota pe 10 cu *a* și pe 11 cu *b*. Numărul 1954 scris în baza 10, pentru a fi scris în baza 12, se procedează astfel:

```
1954 | 12
12   |-----
----- | 162 | 12
=75   | 12  |-----
 72   |-----| 13 | 12
----- | = 42 | 12 |-----
= 34  |  36  |-----| 1
  24  |-----| =1
-----| = 6
  10
```

Numărul 1954, scris în baza 10, se va scrie în baza 12 astfel: 116 *a*.

Problema E: 608

O unitate de pionieri comandă 26 cravate și 31 insigne care costă împreună 83 lei; iar altă unitate comandă 52 cravate și 38 insigne în valoare de 142 lei. Cît costă o cravată și cît costă o insignă de pionier

M. Stoica, Panciu

Soluție dată de elevul **Grăjdeanu I. P.** anul IV, școala pedagogică mixtă Iași și **Const. Mihăileanu,** cl. VII-a, Timișoara.

26 crv. ..... 31 insig. ..... 83 lei

52 crv. ..... 38 insig. ..... 142 lei

Diferența provine din faptul că a doua oară s-au cumpărat cu 26 cravate și 7 insigne mai mult ca prima dată.

26 crv. ..... 7 insig. ..... 59 lei

26 crv. ..... 31 insig. ..... 83 lei

Diferența de 24 lei provine din faptul că s-au cumpărat 24 insigne a doua oară, deci 24 insigne costă 24 lei: 1 insignă = 1 leu.

26 crv. ..... 7 insig. ..... = 59 lei

26 cravate = 59 — 7 = 52 lei,

1 cravată $= \frac{52}{26} = 2$ lei.

Proba: (26.2) + (31.1) = 83,

(52.2) + (38.1) = 142.

PROBLEME PROPUSE

2081. *a)* Să se calculeze cantitatea de motorină (în kg) necesară pentru a vaporiza 200 kg apă, ce se află la temperatura inițială de 20°C presupunînd că numai 50% din căldura produsă prin arderea motorinei este absorbită de apă.

Se dă: puterea calorică a motorinei de 10 000 kcal/kg și căldura latentă de vaporizare (evaporare) a apei de 540 kcal/kg.

b) Să se calculeze cîți metri cubi de gaz metan trebuie să ardă complet (teoretic se va admite că randamentul este egal cu unitatea) pentru a încălzi 100 kg apă de la temperatura de 15° la temperatura de 55°, știind că puterea calorică a gazului metan este de 8000 kcal/m^3.

* * *

2082. *a)* Un vagon de 10 tone se mișcă uniform cu viteza de 36 km/oră. Care este energia cinetică și ce forță de frînare necesită pentru a se opri pe o distanță de 20 m.

b) Un corp cu masa de 1 kg, aflat inițial în repaus, străbate cu o mișcare uniform accelerată un spațiu de 1800 m în timp de 1 minut. Să se calculeze mărimea forței și lucrul mecanic efectuat.

* * *

2083. *a)* Un emițător radio are frecvența undei emise de 300 kHz. Să se afle lungimea de undă.

b) Să se calculeze perioada și frecvența radiației din spectru vizibil care are lungimea de undă de 0,4 microni.

c) O rază de lumină cade pe suprafața unei ape liniștite, astfel că sinusul unghiului de incidență este de 2/3. Să se afle unghiul de refracție $\left(\text{se va lua la apă } n = \frac{4}{3}\right)$.

* * *

2084. Fie E mijlocul laturii BC a triunghiului ABC în care $b > c$. Pe perpendiculara în B pe BC se ia de aceeași parte cu A față de BC, lungimea BD egală cu AE. Cercul cu centrul în E și rază $\frac{b-c}{2}$ taie cercul EBD în F și F', iar cercul cu centrul în F sau F' este întîlnit de DF sau DF' în M și N. Să se demonstreze că lungimile DM și DN sînt egale cu laturile AB și AC. Se cer construcții și rezultate analoage cînd se consideră cercul cu centrul în E și rază $\frac{b+c}{2}$.

Gh. Buicliu

2085. Să se construiască grafic un triunghi ABC în care cunoaștem laturile AB și AC precum și distanțele MM_1 și MM_2 ale unui punct M de pe latura BC respectiv la laturile AB și AC. Aplicație: $AB = 52$ mm, $AC = 38$ mm, $MM_1 = 12$ mm și $MM_2 = 28$ mm.

C. Ionescu-Țiu

2086. Se dau două cercuri tangente exterioare. Unim mijlocul A al tangentei comune TS cu O și O_1 astfel ca dreptele formate să taie cercul O în M și B, iar cercul O_1 în N și C. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și AMN sînt asemenea.

Radu Ionescu, elev, Turnu-Severin

2087. Trei prisme cu secțiunea patrată, turnate dintr-un aliaj cu densitatea d_1, sînt introduse într-un lichid cu densitatea d_2, — prima pînă la 9 cm din înălțimea ei, iar a treia pînă la 4 cm din înălțime. Latura secțiunii celei dintîi este cu 2 cm mai mică, iar a celei de-a treia cu 2 cm mai mare decît latura secțiunii celei de-a doua.

Știind că prismele au aceiași greutate și că presiunea de jos în sus exercitată de lichid asupra fiecărei prisme este egală în acest caz cu greutatea fiecăreia, să se determine înălțimile celor trei prisme și raportul densităților, pentru ca problema să fie posibilă.

N. C. Ciomu

2088. *a)* O lupă are o convergență de 5 dioptrii. Un obiect luminos se află la 10 cm depărtare de lupă. Să se calculeze distanța corespunzătoare a imaginii.

b) Un obiect luminos rectiliniu se află la 20 cm depărtare de centrul optic al unei lentile convergente avînd distanța focală de 15 cm. Să se afle distanța corespunzătoare a imaginii.

c) Un obiect luminos se află la distanța de 18 cm de vîrful unei oglinzi sferic concave de rază 20 cm. Să se afle distanța corespunzătoare a imaginii.

* * *

2089. *a)* Cu ce este egală capacitatea unui condensator plan cu dimensiunile de 5 × 5 cm și cu dielectricul format dintr-un strat de parafină de 0,2 mm grosime, constanta dielectrică fiind 5.

b) O sarcină de + 1600 CGS u.e.s. creează în vid un cîmp electric. Cu ce este egală intensitatea cîmpului format la o distanță de 20 cm de sarcina electrică?

c) Două sarcini punctiforme de + 10 și — 20 unități CGS u.e.s. se află la distanța de 10 cm una de alta în vid. Să se calculeze forța de acțiune reciprocă.

* * *

2090. Se grupează 12 elemente galvanice de cîte 1,5 V f.e.m. și 0,8 ohmi rezistență interioară în următoarele feluri:

1) toate în serie,
2) cîte 6 în serie și cele două serii în paralel,
3) cîte 4 în serie și apoi cele trei serii în paralel,
4) cîte 3 în serie și apoi cele 4 serii în paralel,
5) cîte 2 în serie și apoi cele șase serii în paralel.

Să se determine:

a) f.e.m. și rezistența interioară în grupări în fiecare caz;

b) care din grupări dă curentul cel mai mare dacă rezistența exterioară este de 2 ohmi?

Ștefan Vasile, elev, Botoșani

2091. Să se construiască triunghiul ABC în care $b + c = a + h$, cunoscînd latura a și raza r a cercului înscris. Se va demonstra întîi, că cercul de diametru BC este tangent cercului înscris.

Gh. Buicliu

2092. Să se dea o demonstrație geometrică a identității:

$$(1 + \operatorname{tg} a)^2 + (1 + \operatorname{ctg} a)^2 = (\sec a + \operatorname{cosec} a)^2.$$

Dinu Gheorghe, elev, Craiova

2093. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC avem:

$$(AB.MC + AC.BM)\cos\frac{A}{2} \leqslant BC.AM,$$

unde M este un punct oarecare pe latura BC.

C. Ionescu-Țiu

2094. Să se arate că:

$$(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3) - (a - b)^3 (b - c)^3 (c - a)^3 =$$
$$= 3(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)(a - b)(b - c)(c - a).$$

Mircea Adam

2095. Un velier navigă într-un drum dat D. Pavilionul navei face cu planul longitudinal al navei unghiul α. Viteza vîntului măsurată pe navă (vînt aparent) este W_1. Navă schimbă de drum luînd drumul D'. Viteza vîntului aparent este W_2. Pavilionul face cu planul longitudinal al navei unghiul ε.

Se cere: viteza navei în cele două drumuri și viteza vântului real.

C. V. Costăchescu

2096. Un cerc cu centrul în punctul comun a trei cercuri egale ce se taie în punctele A, B, C întîlnește aceste cercuri în șase puncte astfel încît: dreptele determinate de două puncte neconsecutive concură două cîte două în punctele A, B, C și sînt egal înclinate pe laturile triunghiului. Să se studieze și cazuri particulare.

Gh. Dobrotescu, Predeal

2097. Să se demonstreze identitatea:

$$(ax + by + cz)(ay + bz + cx)(az + bx + cy) -$$
$$- (az + by + cx)(ay + bx + cz)(ax + bz + cy) =$$
$$= (a - b)(b - c)(c - a)(x - y)(y - z)(z - x).$$

Mircea Adam

2098. — Să se arate că între elementele unui triunghi avem relația

$$\sum a^3(1 - \cos^3 B - \cos^3 C) = 3abc \sum \cos B \cos C.$$

N. Mihăileanu

2099. — Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relația

$$\frac{\cos B}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{2\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{c^2}{r^2},$$

unde r este raza cercului înscris și $c = AB$.

Florian I. Goga, inginer

2100. — Să se rezolve ecuația

$$(a^2 - 1)x^4 - (a^4 - 2a^2 + 2)x^3 + (a^4 - 2a^2 + 2)x - (a^2 - 1) = 0.$$

* * *

2101. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum \sin^3 \frac{C}{2} \sin^3 \frac{A-B}{2} = \frac{3r}{4R} \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2},$$

notaţiile fiind cele obişnuite într-un triunghi.

Savin I. Dan, elev, C.-lung Muscel

2102. — Să se arate că într-un trapez isoscel înscris într-un semicerc, unghiul ascuţit este cît jumătatea unghiului obtuz format de diagonale.

Radu Cornăţeanu, Călăraşi

2103. — Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd unghiurile şi r raza cercului înscris şi apoi, un triunghi echilateral echivalent cu patratul de arie maximă înscris în triunghiul ABC.

* * *

2104. — Se dă ecuaţia $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea în y ale cărei rădăcini să fie

$$y_1 = \frac{x_1 + x_1^2}{1 - x_2} \quad \text{şi} \quad y_2 = \frac{x_2 + x_2^2}{1 - x_1},$$

unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

Ionescu Ion, elev, Tîrgovişte

2105. — Să se construiască grafic segmentele x şi y date de relaţiile:

$$x^2 = y\sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{şi} \quad x^4 + y^4 = 2a^2(a^2 + b^2),$$

unde a şi b sînt două segmente date.

Rusnac I. Leonid, student, Timişoara

2106. — Să se construiască un triunghi cunoscînd poziţia centrului cercului circumscris şi direcţia a două laturi ale triunghiului ortic.

Cocoş Emanuel, elev, Constanţa

2107. — Fie un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$) de laturi a, b, c, iar M şi N două puncte respectiv pe AB şi CM aşa ca $BM = (m-1) \cdot MA$ şi $MN = n \cdot NC$. Dreapta AN taie ipotenuza BC în R. Să se arate că:

$$(1 + m \cdot n)\, AR = \sqrt{m^2 \cdot n^2 \cdot b^2 + c^2}.$$

C. Em. Racoveanu, student, Bucureşti

2108. — Să se construiască grafic triunghiul ABC cunoscînd o latură, raza cercului circumscris şi raza cercului exînscris în interiorul unghiului opus laturii date.

Grabcev D. Boris, elev, Predeal

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 776. Un muncitor muncind timp de 25 zile cîte 8 ore pe zi primeşte 600 lei. Cît ar primi săptămînal dacă ar lucra cîte 10 ore pe zi?

* * *

E: 777. Avem două aliaje, unul cu titlul de 0,920 şi celălalt cu titlul 0,900. Cîte părţi trebuie luate din fiecare aliaj spre a se obţine un nou aliaj cu titlul de $\frac{11}{12}$.

* * *

E: 778. Dacă la un amestec de 1,700 kg de apă sărată în proporţie de 8% se adaugă 400 grame apă, care va fi proporţia de sare în noul amestec?

* * *

E: 779. Care este volumul unui clopot în greutate de 1,250 kg făcut dintr-un aliaj obţinut prin topirea laolaltă a 1000 kg cupru, 280 kg. cositor, 12,5 kg zinc, 10 kg plumb, ştiind că densităţile acestor metale sînt: cupru = 8,88; cositor = 7,3; zinc = 6,86; plumb = 11,35

* * *

E: 780. Două cărţi costau împreună 30 lei; ştiind că la una s-a redus preţul cu 10% şi la cealaltă cu 15% şi că după reducere au constat împreună 26,40 lei, se întreabă cît costă acum fiecare carte?

* * *

E: 781. Dacă la o cantitate de produse fabricate, deşeurile materiei au fost de 16% din materie primă pusă în lucru, să se calculeze cîte procente reprezintă deşeurile faţă de produsele fabricate.

* * *

E: 782. Trei elevi au depus bani la CEC, dar niciunul din ei nu are suma de lei 1170 cît costă o bicicletă pe care fiecare doreşte să o cumpere. După ce s-au sfătuit între ei ce bani au fiecare depuşi, primul elev se adresează celui de-al doilea şi al treilea astfel: daţi-mi fiecare cîte $\frac{2}{3}$ din banii voştri şi cumpăr bicicleta pentru mine. Al doilea elev nemulţumit de acestă propunere se adresează elevului întîi şi trei astfel: mai bine daţi-mi voi cîte $\frac{5}{8}$ plus 15 lei din banii voştri şi eu cumpăr bicicleta pentru mine. Al treilea elev neacceptînd propunerile celor doi elevi se adresează lor astfel: daţi-mi fiecare cîte $\frac{11}{15}$ minus 25 lei din banii voştri şi eu cumpăr bicicleta pentru mine. Ce sumă a avut fiecare depusă la CEC?

I. N. Munteanu

E: 783. Să se afle în ce caz sistemul

$$ax + by = c,$$
$$bx + cy = a,$$
$$cx + ay = b$$

admite soluţii.

Gh. I. Stoian, student, Bucureşti

E: 784. Să se arate că expresia

$$(y-1)^2 \cdot (y^2+1) + y^2$$

este un patrat perfect.

Aurel Cristea, Focşani

E: 785. Pentru a săpa un şanţ o echipă de 7 muncitori trebuie să lucreze două zile după normă. În primele 4 ore cei 7 muncitori sapă însă 35% din şanţ, iar în următoarele 4 ore din zi ei obţin o depăşire de normă de 20%. În fiecare zi se lucrează cîte 8 ore. Se cere:

a) cu cît a depăşit norma în prima zi echipa de muncitori?

b) în cît timp va termina restul de şanţ 4 muncitori cu o depăşire de normă de 25%?

c) ce cantitate de pămînt au săpat în prima zi şi cît le-a rămas pe a 2-a zi celor 7 muncitori dacă norma unui muncitor este de 2,6 m.c. în 8 ore?

Mircea Ionescu, Sinaia

E: 786 Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x-a}{y} = \frac{y-b}{z} = \frac{z-c}{x} = k.$$

T. Mihalache, student, Bucureşti

E: 787. La o întovărăşire agricolă s-a hotărît ca 1140 ha să fie însămînţate cu grîu, secară, orz şi porumb pe tarlale. Primele trei tarlale sînt proporţionale cu fracţiile: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ şi $\frac{5}{6}$, iar tarlaua întîia este cu 30 ha mai mare decît a doua. Care este aria fiecărei tarlale?

B. I. Baieră, profesor, Păuneşti

E: 788. Randamentul unei lămpi cu spirt este de 40 %. Ce cantitate de spirt trebuie ars într-o lampă de laborator pentru a încălzi 5 litri apă de la 20°C pînă la fierbere, ştiind că puterea calorică a spirtului este 7200 kcal/kg.

B. I. Baieră, profesor, Păuneşti

E: 789. Să se calculeze aria patratului format de bisectoarele unui dreptunghi de laturi a şi b.

R. Stroe, student, Bucureşti

E: 790. Dacă la o întrecere între două echipe de minieri prima a depăşit norma cu 20% şi a doua cu 30%, amîndouă echipele au scos zilnic 226 tone de cărbuni, şi dacă prima ar depăşi norma cu 30% şi a doua cu 20% ele ar scoate împreună 224 tone cărbuni, care este norma fiecărei echipe?

* * *

Clasa V: (E: 776, 777, 782); VI: (E: 778, 779, 780, 781, 785, 787, 788, 789); VII: 783, 784, 786, 789).

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 noiembrie 1955 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme: *Melica Axente George*, student anul I Matematici, București, *Torjescu Florin*, student anul II Mecanică, București, *Stănciulescu M. Mihai*, clasa IX Tîrgoviște, *Alexa Ion*, absolvent Sibiu, *Panaitopol V. Laurențiu*, clasa IX Giurgiu, *Lungu Ovidiu*, student, București, *Negut Nicolae*, student București, *Delu Ștefan*, clasa IX Corabia, *Pupăzan V. Nicolae*, absolvent Sibiu, *Nicolaescu Dan*, clasa IX Călărași, *Voicu I. Traian*, clasa X Slatina, *Anițescu N. Nicolae*, clasa VIII Tg. Jiu, *Ene Ion*, student București, *Matei Aurel*, clasa IX Tg. Mureș, *Bucur Gheorghe*, clasa X Pucioasa (Ploiești), *Țibuleac Florin*, clasa VIII Iași, *Nicolau Gh. Cornel*, clasa VIII, școala medie nr. 4 București, *Popa Laurențiu*, clasa X-a Timișoara, *Draica Constantin*, clasa IX B, școala medie nr. 4 București, Fluerașu Cezar, clasa X Școala medie nr. 13 București, *Cristache Aurel*, clasa X școala medie nr. 4 București, *Ianuș Stere*, clasa IX Constanța, *Cetățeanu Cecilia*, studentă Craiova, *Savin Dan*, student Petroșani, *Boloca Ioan*, școala medie c.f.r. Cîmpulung Moldovenesc, *Ursoiu Vasile*, absolvent Roman, *Lupuțiu Ioan*, absolvent Ploiești, *Voinea C. Dorin*, clasa X școala medie nr. 2 Craiova, *Zilberman Mircea*, clasa X Bacău, *Grofșoreanu Tudor*, clasa VII școala medie nr. 7 București, *Căsăndroiu C. Tudor*, clasa VIII Ploiești, *Focșeneanu I. Ioan*, clasa X Tg. Neamț, *Pîrvănescu Iulius*, clasa X Tecuci, *Arsenovici Tiberiu*, clasa X Timișoara, *Grosu Gh. Florin*, clasa X Galați, *Botoran I. Petre*, clasa X Giurgiu, *Pleniceanu Ioan*, student Petroșani, *Segal Zigu*, absolvent Iași, *Stăncescu N. Emil*, clasa X Giurgiu, *Iorgulescu Alexandru*, clasa X școala medie nr. 20 București, *Duduica Radu*, clasa X școala medie nr. 17 București, *Bărbuică C. Nicolae*, Clasa X școala medie nr. 1 Craiova, *Manolache V. Dumitru*, absolvent Focșani, *Hulubei Valeriu*, clasa X școala medie nr. 2 Craiova, *Urmă D. Radu*, clasa X școala medie nr. 1 București *Goldstein Alexandra*, clasa X-a Tecuci.

* * *

Pînă la 1 noiembrie 1955 s-au primit cîte cel puțin zece soluții bune la problemele propuse în numerele 7, 8, 9, 10 ale Gazetei Matematice și Fizice, seria B de la următorii rezolvitori, după cum urmează:

AIUD. Clasa X-a. Fischer Gheorghe (1726—1728, 730, 744—748, 772), Suciu I. Ioan 1727, 730, 733, 736, 745, 747, 753, 760, 762, 768).

ALBA IULIA. Clasa X-a. Făgădaru Ion (1727, 728, 730, 732, 733, 742, 747, 787, 802, 819), absolvent Torsan Ilie (1656, 710, 711, 714, 726, 727, 733—735, 737, 739, 742—744, 747, 752, 759, 762, 767, 772, 774, 775, 787, 788, 801, 803, E: 656, 672).

ARAD. Student Vlagiu I. Ion (1424, 425, 431, 432, 435, 436, 610, 627, 635, 640, 647, 650—653, 659, 681, 683, 685, 686, 689, 690, 697), absolvent Buneț Ioan (1618, 621, 622, 628, 635, 636, 639, 640, 643, 644, 647—653).

BACĂU. Student Donea Sorin (1565, 566, 568, 578, 635, 649, 674, 677, 693, 730, 738,P); clasa VIII-a. *Tofan V. Dumitru* (1625, 635, 640, 642, 643, 645, 646, 648, 650, 654—656, 663—668, 672—674, 681, 684, 688, 697, 698, 701, 707, 721, E: 638—656, 658—665, 667, 668); clasa X-a. Hărăboi Mihai (1636, 646, 648, 650, 653—655, 674, 677, 685, 688, 689, 693, 697, 706), Vasiliu Monica (1621, 649, 666, 672, 689, 728, 762, 775, 787, 803), *Zilbermann Mircea* (1725—740, 742, 744, 745, 747, 750, 752, 754, 762, 763, 768, 769, 787, 800, 813, 814, 816, 826).

BÎRLAD. *Școala de 7 ani Păunești*: clasa VI-a. Chiriac Maria (E: 631, 633, 643, 648, 650, 656, 657, 668, 669, 678, 685), Pintilie Florica (E: 631, 633, 643, 648, 650, 656, 657, 668, 669, 678, 685, 692); clasa VII-a. Apostu Ioana (E: 662, 667, 673, 674, 678, 680, 682, 684, 685, 689, 692), Avădanei Steliana (E: 593, 626, 627, 629, 630, 632, 633, 641, 645, 653, 655,

668), Şerban Ligia (E: 639, 658, 662, 669, 673, 674, 676, 678, 680, 689, 692), Şerbănescu Cornelia (E: 626, 633, 639, 652, 658, 662, 674, 676, 685, 689, 692), Stoica Neculai (E: 626, 639, 646, 652, 658, 662, 669, 674, 680, 685, 689, 692).

BAIA MARE. Absolvent Mihalca Virgil (1618, 622, 623, 634, 635, 640, 644, 649, 670, 677, 681, 685, 697, 698, 706, 715, 787, 794); clasa X-a. Conţiu A. Ioan (1625, 627, 628, 635, 640—649, 651—653).

BĂICOI (Ploieşti). Jilăveanu S. Gheorghe (1727, 730, 733, 736, 738, 746, 760, 774, E: 672, 700).

BALŞ (Craiova). Clasa X-a. Paraschiv Ioan (1660, 666, 670, 685, 689, 690, 697, 698, 706, 714, 724, 730, 733, 734, 736, 737, 803).

BOTOŞANI. Clasa X-a. Bîrzoi Maria (1655, 656, 663, 664, 672—675, 677, 685, 688, 689, 727, 730, 733, 806), Breazu Florica (1655—658, 677, 681, 685, 687, 689, 699, 701, 730, 733), Lelescu Nicolae (1563, 566, 567, 569, 571, 579, 580, 655—658, 677, 681, 686, 687, 689, 699, 701, 730, 733).

BRĂILA. Clasa X-a. Dobrescu Gh. (1640, 641, 647, 652, 672, 681, 685, 688, 689, 697, 698, 727, 728, 730, 733, 734), Georgescu Laurian (1670, 677, 685, 688, 689, 727, 728, 730, 733, 736—738, 743, 747, 752, 775, 787, 794, 803), Iordache Gh. Vasile (1635, 640, 642, 646, 674, 688, 697, 699, 706, 728, 730, 733, 734, 738).

BUCUREŞTI. Studenţi: Antonescu Păun (fac. de mecanică) (1641, 643, 646, 648, 649, 672, 674, 677, 688, 693, P), *Ene Ion* (1611, 726—752, 754, 759, 760, 762, 763, 765, 768—770, 772, 774—776, 778, 785, 786, 792, 794, P, N), Ionescu Mircea (fac. construcţii) (1728, 730, 733, 734, 736—738, 740—745, 750, 759, 760, P), *Lungu Ovidiu* (fac. electronică) (1618, 621—623, 627, 632, 635, 636, 640—644, 646—649, 651—653, 726—728, 730—738, 740, 742, 743, 745, 746, 749, 752—754, 759, 760, 762, 763, 770, 742, 743, 745, 746, 749, 752—754, 759, 760, 762, 763, 770, 772, 774—776, 786—788, 792—794, 799, 803), *Melica Axente George* (fac. matematici) (1608, 613, 615, 616, 618, 621, 624, 627, 642, 654, 657, 658—662, 665, 666, 668—673, 675, 677, 682, 685, 692—694, 696, 698, 700, 701, 705, 712, 714, 715, 717—719, 721, 724, 727, 729—731, 733, 741, 743—750, 752—754, 758—760, 765, 766, 768, 770, 772, 775—777, 779, 786, 787, 789, 793—795, 802, 810, 816, 817, 820—822, 825, 831, 833, 835, 837—841, 844, 845, 847—849, 851, 857, 861, 891), Negoescu Emil (fac. construcţii c.f.r.) (1635, 636, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 651—653, 674, 681, 683, 685, 687—690, 693—695, 697, 699, 726, 728, 730, 734, 747, 748, 752), Schip Z. Harry (1562, 569, 618, 622, 640—642, 646, 647, 649, 653, 655, 656, 668, 674, 681, 685, 688, 689, 692, 693, 695—700, 706, 714, 718, 728, 730), *Torjescu Florin* (fac. mecanică) (1558, 560—585, 587—592, 594, 596, 599—608, 611, 613—616, 618, 619, 621—625, 628, 629, 631—661, 663—674, 676—678, 681—701, 705—707, 709, 711, 714, 715, 717—721, 724, 726—731, 733—741, 743—752, 754, 756, 759—763, 766, 768, 770, 772, 774—776, 778, 780—782, 784—787, 789, 792—796, 798—804, 810, 814, 816, 819, 824, 826, P). *Absolvenţi*: Apetroaiei Mihai (1618, 622, 623, 625, 626, 640, 643, 644, 646, 647, 649—653, 657, 674, 684—688, 697, 706, 707, 721), *Georgescu I. Emil* (1621, 623, 632, 636, 651, 656, 658, 673, 674, 677, 681, 684—690, 693—697, 699, 706, 715, 718, 721, 726—728, 730, 733, 734, 738, 740, 762, 774, P), *Ionescu Cornel* (1654—659, 663, 665—668, 670, 672—674, 677, 681, 683—685, 687—694, 697—699, 701, 706, 707, 714, 715, 718, 721, 724), *Neguţ Nicolae* (1560, 561, 562, 563, 565—572, 574—576, 578, 581, 582, 585, 603, 618, 622, 623, 634—636, 639—653, 677—679, 681, 683—685, 687, 688, 690, 692, 693, 697, 698, 706, 721, 726, 730, 783, 792, 800, 801, 803), Olaru Petre (1625, 628, 672—674, 681, 684, 685, 688, 689, 693, 694, 697, 726, 730, 737, 768, 800), Popovici Radu (1641, 655—657, 694, 695, 697, 717, 730, 759).

Şcoala medie de băieţi nr. 1, clasa V-a. Cristea Nicolae (E: 638, 640, 641, 643, 647, 650, 652, 653, 672, 680); clasa VIII-a. Popa Mircea (1730, 733, 742, 774, 775, 786, 787, 800, 803, 822); clasa IX-a. Cristea Paul (1621, 635, 638, 640, 642, 643, 646, 648, 650, 655, 667, 725—

727, 730, 731, 733—736, 738, 739, 743—745), Urmă D. Radu (1655, 656, 658, 668, 670—674, 681, 684, 685, 687—690, 697, 706, 707, 726, 728, 730, 733, 734, 747, 774,800); clasa X-a. Rabinovici Silviu (17—728, 730, 731, 733, 735, 736, 738, 772, 814), Schileru I. Dinu (1760, 781, 782, 784, 786, 792, 799, 800, 803, 814, 822).

Şcoala medie de băieţi nr. 2. Clasa IX-a. *Teodorescu Nicolae* (1620, 628, 629, 635, 640, 642, 648, 654, 655, 667, 668, 672—675, 678, 681, 684, 688, 692, 696—698, 700, 701, 705, 711, 719, 721), Tureanu Aurel (1628, 640, 641, 646, 647, 650—653, 688, 696, 697, 706).

Şcoala medie de băieţi nr. 4 « Aurel Vlaicu », clasa VIII-a. Dinescu Mircea (E: 672—674, 676, 680, 684, 700, 701, 707, 730), Dobre Cornel (E: 679, 681, 683, 691, 708, 709, 713, 714, 716, 718, 729), Iliescu Nicolae (1678, 705, 706, 718, 781—784, 799, 800), Măinescu Gabriel (1730, 733, 851, E: 672, 674, 680, 682, 700, 703, 707, 709, 718), Marmara Gheorghe (1784, 816, E: 688, 692—694, 701, 703, 707), Mincu Horst (1705, 706, 718, 724, 783, 784, 799, 800, 850), Mînzatu Aurelian (E: 687, 693, 694, 703, 704, 707, 709, 714, 718, 721), *Nicolau Gh. Cornel* (1640, 730, 733, 800, 813, 848, 851, 867, 872, E: 640, 641, 644, 647, 649, 653, 656, 669, 672, 676, 678, 680, 682, 684, 688—691, 695, 696, 698—704, 707, 708, 714, 716, 718, 721, 722), Popa Gh. Nicolae (1730, E: 672—674, 676, 680, 684, 700, 701, 707), Stoenescu M. Florin (1851, 867, E: 687, 694—696, 700, 710, 714, 715), Toader M. Gheorghe (1803, 838, 851, 867, E: 678, 679, 708—710, 713, 718, 721, 722), Zaharnic Dan (1851, E: 682, 684, 702, 707, 708, 714, 718, 72^); clasa IX-a. Bancu I. Ioan (1666, 668, 674, 697, 699, 701, 706, 727, 730), Bejan Ilie (1786, 800, 816, 828, 830, 831, 834, 851, 867), Ciuntu Florin (1786, 803, 816, 830, 831, 838, 844, 851, 867), Dinu N. Vasile (1786, 816, 830, 831, 834, 838, 844, 851, 867), *Draica Constantin* (1566, 571, 579, 647, 650—653, 656, 657, 663, 666, 668, 669, 672—674, 678, 688, 701, 714, 720, 721, 726, 730, 734, 738, 782, 786), Feliu Constantin (1786, 1800, 820, 828, 830, 834, 838, 844, 851), Imbăruş Horia (1786, 816, 830, 831, 834, 838, 844, 851, 867), Ionescu Dumitru (1678, 706, 718, 781—784, 800, 820, 851), Ionescu Mircea (1779, 786, 800, 816, 830, 831, 834, 838, 842, 844, 847, 851, 861, 862, 867, 875, 882), Oanea Const. (1655, 786, 800, 820, 830, 834, 835, 838, 851). Schwartz Arnold (1784, 800, 830, 831, 842, 844, 847, 851, 858), Ţăranu (1784, 800, 828, 830, 834, 838, 851, 867), Teodorescu Ioan (1655, 668, 669, 673, 674, 688, 689, 694, 730, 800), Zamfirescu Gheorghe (1786, 800, 807, 820, 830, 838, 844, 851); *clasa X-a. Cristache Aurel* (1654, 667, 673, 674, 681, 683, 685, 686, 689, 693, 695, 697—699, 701, 706, 721, 726—728, 733, 737—739, 747, 759, 786, 799, 800), Işfan Eugen (1727, 728, 730, 733, 734, 740, 742, 747, P), Pătraşcu Sorin (1814, 831, 833, 835, 841, 842, 844, 848, 851, 866), Popa Gheorghe (1681, 683—690, 693), Russo S. Dan (1830, 831, 833, 835, 837, 838 841, 851, 866), Tănăsescu Ştefan (1804, 807—809, 812, 814, 816, 823, 825, 831, 841, 844, 863 866), Tuduc Gh. (1814, 821, 830, 833, 835, 838, 844, 848, 866), Vrînceanu E. Cezar (1640 649, 681, 683, 689, 692, 701, 706, 724, 759).

Şcoala medie de fete nr. 5. Clasa X-a. *Cîmpu Demetra* (1727, 728, 730, 733, 736, 747, 752, 768, 800, 814).

Şcoala medie de băieţi nr. 7. Clasa VIII. *Grofşoreanu Gelu Tudor* (E: 605, 654, 661, 669, 670, 672—680, 683, 685, 689, 693, 694, 697—704, 706, 707, P); clasa IX-a. *Constantinescu Dan* (1674, 688, 696, 701, 707, 724, 726, 730, 733, 760, 762, 774).

Şcoala medie de fete nr. 8. Clasa VI-a. Mazilu Gabriela (E: 659, 670, 676, 679, 680, 683, 685, 689, 690, 692—696, 698, 700, 701, 703, 704, 716, 724, 727, 729, 731, 733).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa VII-a. Predoescu Marieta (E: 652—654, 658—660, 662, 664, 665, 669, 680, 689); clasa VIII-a. Repciuc Rodica (E: 654, 662, 671—674, 676, 677, 689).

Şcoala medie de băieţi nr. 11. Clasa VIII-a. Schiopulescu Dan (1730, 733, 735, 738, E: 638, 640, 643, 647, 650—653, 655, 656, 658, 669); clasa X-a. Corbu Ion (1726, 732, 735, 738, 744, 747, 750, 751, 762, 783, 800, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 12. Clasa X-a. Zissu Silviu (1635, 640—642, 646—649, 657, 664, 672, 674, 681, 685, 687—689, 692, 693, 697).

Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa VII-a. Petrică Nicolae (E: 640, 642, 644, 647, 649 651, 652, 659, 660, 662); clasa VIII. Chirică L. Mircea (1702, 721, 814, E: 658, 660, 663—665 693, 694, 697, 701, 703); clasa X-a. Dobre Ion (1616, 621, 622, 623, 655, 673, 677, 698, 706, 707, 726, 728, 730, 734), *Flueraşu Cezar* (1634, 641, 663, 666, 667, 672, 681, 686, 688, 698, 699, 701, 705—707, 714, 719, 724, 730—738, 745, 747, 768, 772, 774).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa IX-a. *Delcescu Rodica* (1641, 650, 672, 673, 688, 706 728, 730, 733, 734), Enescu Cornelia (1625, 650, 655, 656, 660, 663, 665, 666, 668—670, 673, 674, 681, 688, 690, 692, 694, 696, 697, 718, 721, E: 641, 652, 657, 660, 662—665, 668, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 17. Clasa VIII-a. Paşa Florin (E: 669, 670, 672, 675—677, 679, 680, 682, 689, 695, 700); clasa IX-a. Bizineanu Benu (1562, 565, 566, 568—570, 577, 688), Elian Dinu (1654, 672, 688, 701, 724, 726, 730, 733, 734, 736, 744, 768), Ludiran Ion (1655, 705, 707, 714. 717, 724, 733, 760, 761, 772, 774, 816), Lustgarten George (1640, 663, 666, 672, 678, 705, 726, 733, 739, 749, 786, 788); clasa X-a. *Duduica Radu* (1725—728, 730, 733, 734, 736, 740, 744—746' 748, 749, 753, 754, 762, 766, 768, 770, 772, 781, 784, 789, 800, P), Nacev I. (1727, 730, 733—735, 738, 740, 742, 747, 753, 775, 819), Păunescu I. Luchian (1655, 656, 658, 668, 679, 682, 692, 697, 706, 714, 726—728, 730, 747), Prună Gheorghe (1727, 728, 730, 732—735, 747, 750, 759).

Şcoala medie de băieţi nr. 18. Clasa VII-a. Enişteanu N. Nicolae (E: 654, 655, 667, 681, 682, 686, 688—690, 697, 698, 701, 704); clasa VIII-a. Tohăneanu Florin (E: 614, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 653, 655, 663); clasa IX-a. Filotti Ion (1672, 727, 736, 738, 753, 760, 769, 774, 814, 820, 822).

Şcoala medie de fete nr. 19. Clasa VIII-a. Poenaru Marilena (E: 653, 655—657, 676, 679, 682—685); clasa X-a. Nicolau Ileana (1673, 677, 726—728, 730, 733, 739, 740, 775, 777, 786, 787).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. Clasa IX-a. Zorapapel Tiberiu (1621, 634, 643, 654, 655, 673, 674, 697, P); clasa X-a. Ene Ion (1635, 640, 642, 644, 646, 647, 649—653, 656, 657, 666, 681, 683, 685—689, 694, 697, 698); *Iorgulescu Alexandru* (1655, 672, 674, 685—689, 695—697, 701, 706, 721, 727, 728, 730, 733, 734, 736, 738, 744, 747, 748, 752, 768, 800), Necula D. Aurel (1681, 685, 697, 727, 728, 730, 733—735, 738, 747, 752).

Şcoala medie de fete nr. 21. Clasa VIII-a. Demayo Adriana (1800, 814, E: 669, 673, 678—680, 682—685, 689, 690, 698, 703, 707).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa VIII-a. Butoi Mihaela (1656, 673, 674, 688, 714, 721, E: 654—656, 659, 660, 663—665, 667, 668), Ivănceanu Tatiana (1688, E: 654—656, 659, 660, 663—665, 667, 673, 674).

BUZĂU. Clasa IX-a. Suciu A. Tita (1674, 681, 688, 726, 730, 739, 800); clasa X-a. Bătireanu Gheorghe (1567, 574, 580, 614, 631, 635, 640, 641, 643, 646, 681, 686, 692, 706), Petreanu Aristide (1565—570, 574, 580); anul II Mecan. Agriculturii. Nae Nicolae (1567, 681, 686, 688, 692, 697, 699, 702, 706).

CĂLĂRAŞI. Clasa IX-a. *Nicolescu Dan* (1560—569, 574, 580, 588, 621, 628, 635, 640—642, 644, 649, 652, 655, 656, 673, 679, 681, 683—685, 688, 689, 697, 698, 705—707, 726—728, 730, 734, 736, 738, 740), Strătescu Ion (1655, 664, 667, 714, 717, 730, 734, 736, 738, 739, 760 774); clasa X-a. Bragadiru Lascăr (1727, 728, 730, 733, 734, 740, 759, 760, 774, 775, 786, 793, 803, 818), Simionescu Dumitru (1562, 565, 568, 580, 646, 673, 727, 730, 733, 736).

CÎMPINA. Clasa X-a. Liess Gerhard (1727, 730, 733, 736, 738, 740, 742, 744, 747).

CÎMPULUNG Muscel. Clasa V-a. Savin Alexandru (E: 624, 625, 627, 630, 652, 653, 655—657, 668).

CÎMPULUNG Moldovenesc. Şcoala medie mixtă c.f.r. *Boloca Ion* (1610, 627, 628, 654, 656—660, 664, 668, 670, 672—675, 700, 701, 705—707, 711—714, 717—719, 721, 724, P)

CARACAL. Clasa X-a. Fulga Dumitru (1649—653, 670, 673, 685, 687, 730, 733, 740).

CARANSEBEŞ. Absolvent Serdeşnic Aurel (1638, 641, 642, 645, 648, 650, 653, 706, 707, 730).

CERNA-VODĂ. Clasa IX-a. Preda Ion (1726, 730, 733, 735, 738, 750, 760, 774, 786, 788, 820); clasa X-a. Tănase V. Vasile (1666, 681, 697, 706, 727, 730, 740, 747, 752, 775, 787, 788, 803).

CLUJ. Şcoala mixtă de 7 ani nr. 23. Clasa VI-a. Cimpeiu Mariana (E: 624, 638, 640, 647, 653, 655, 668, 679, 680, 683, 685); clasa VII-a. Braşoveanu Alexandru (E: 638, 653—655, 657, 668, 679, 680, 682, 685), Ciceiu Elena (E: 638, 653—655, 657, 668, 679, 680, 682, 685), Trifan Gh. (E: 638, 653—655, 657, 668, 679, 680, 682, 685, 692); clasa IX-a. Bîrzan Romanel (1663, 673, 698, 726, 735, 745, 751, 754, 772, 800, 814, 816); clasa X-a. Rican Gavrilă (1621, 622, 635, 636, 640, 641, 643, 644, 647, 649-653, P), absolvent Pirău Marius (1635, 640, 644, 647, 653, E: 638, 640, 643, 647, 650); *studenţi*: Cotîrlea Ioan (1618, 622, 623, 628, 635, 636, 639, 640—644, 646—648, 651—653), Pop Ludovic (1621, 622, 635, 636, 640, 641, 644, 647, 649, 651), Rus A. Ioan (1711, 721, 730, 733—740, 742, 743, 747—749, 752, 755, 762, 799, 800, P).

CODLEA (reg. Stalin). *Tofan Liliana* (1560—575, 577—581, 635, 640, 642, 673, 684, 688, 726, 730, 797).

CONSTANŢA. Clasa VIII-a. Anghel Constantin (1621, 640, 655, 656, 666, 667, 669, 672, 674, 681, 688, 694, 696, 697, 724, E: 638—641, 643, 646, 647, 649, 650); clasa IX-a. *Ianuş I. Stere* (1631, 654—656, 666, 667, 669, 672—674, 681, 694, 696—698, 701, 714, 715, 724, 726, 730, 734, 735, 738, 745, 750, 760, 768, 774, 786), absolvent Lambă Stelian (P).

CORABIA. Clasa X-a. *Delu Ştefan* (1655, 656, 666, 667, 670, 672—674, 677, 679, 681, 684, 687, 688—690, 695, 697, 699, 706, 707, 714, 717, 721, 726—728, 730, 733—736, 738, 740, 742, 744, 747, 752, 760, 774, 775, 787, 788, 803), Florescu Mihai (1640, 641, 643, 646, 655, 669, 673, 681, 697, 706, 727, 730, 733, 735), Şarpe I. Dumitru (1662, 668, 674, 688, 697, 698, 701, 705, 706, 721, 726—728, 730, 732—738, 740, 744—746, 749), absolvent Dăbuleanu C. Iulian (1618, 622, 623, 635, 640, 655, 730, 733, 737, 768, P).

CRAIOVA. Studenta *Cetăţeanu Cecilia* (1654—657, 666, 668, 670, 673, 674, 677, 681, 682, 684—687, 689, 690, 693, 695, 697—699, 701, 706, 707, 714, 715, 718, 720, 721), student electrotehnică Ţenescu Virgil (1677, 681, 685, 687—689, 693, 695, 706, 710, 714, 715), absolvent Truţă Coriolan (1561, 560, 565, 568, 570, 574, 575, 577—580).

Şcoala medie de băieţi nr. 1. Clasa VIII-a. Roşca Valentin (1772, E: 669, 671—674, 678—680, 682, 685, 690); clasa IX-a. Codreş Iulian (1677, 681, 688, 689, 692, 698, 721, 724); clasa X-a. *Bărbuică C. Nicolae* (1609, 614—618, 620—623, 625—628, 632, 634—653, P), Căluţoiu Ion (1727, 728, 730, 760, 775, 786, 787, 792, 803, 819, 820, 822), *Hulubei Valeriu* (1614, 616, 621, 625, 634, 636, 706, 725—728, 730, 736, 754, 758, 760—763, 783, 786—788, 799, 800, 803, P), Rădulescu V. Paraschiv (1727, 730, 733, 775, 786, 787, 792, 803, 819, 820, 822), Stănculescu A. Adrian (1621, 628, 631, 658, 677, 714, 721, 760, 762, 774, 775, 786, 787), Voinea I. Alexandru (1667, 725, 729, 735, 739, 740, 742, 747, 752—754, 768, 775, 783—788, 799, 800, P), absolvent Cojocaru Gr. Ion (1648, 649, 655, 683, 685, 686, 689, 697, 728, 730, 733, 736, 737, 743, 746, 747, 752, 754, 759, P). *Şcoala medie de băieţi nr. 2.* Clasa X-a. *Voinea Dorin* (1655—658, 663, 665, 666, 668—670, 674, 677, 681—691, 695, 697—699, 701, 706, 707, 718, 721).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VIII-a. Simion Gheorghe (1730, 736, 738, 740, 742, 750, 775, E: 680, 672, 674).

DEJ. Clasa X-a. Mangu Ileana (1649, 674, 681, 684, 687, 695, 696); Platon Livia (1664, 665, 673, 681, 714, 716, 719), Săplăcan Angela (1664, 673, 674, 681, 683, 716, 730, 787), Tamassy Carol (1562, 564, 565, 568—570, 574, 578—580, 582), absolvent Mecea Petru (1677, 681, 683, 689, 691, 693, 695, 728, 730, 865).

DEVA (Hunedoara). Clasa VIII-a. Laslău Stela (E: 663, 669, 672, 673, 679, 682, 689, 693, 696, 703).

FOCȘANI. Școala de 7 ani Suraia. Clasa VII-a. Chiriac Gelu (E: 638, 640, 643—647, 649, 650, 652, 654, 657, 665, 667, 668, 679, 680, 682, 684, 685, 689). Școala de 7 ani. Clasa V-a. Pantelimon Anton (1663, 733, E: 638, 640, 641, 643, 647, 650, 653, 665, 669, 673); clasa VII-a. Pantelimon Marcela (1730, 773, E: 640, 643, 647, 670, 672, 676, 682); clasa X-a. Atanasiu Costică (1560, 568, 578, 580, 634, 642, 647, 650—652, 655, 681, 683, 697), Partenie Marcel (1568—570, 640, 642, 644, 650, 653, 657, 674, 688, 689, 697), absolvenți: Arghir B. George (1655, 660, 665, 666, 668—671, 673, 674, 676.680, 683—685, 688, 703, 706, 707, 710, 714, 717, 721, 724, P), *Manolache V. Dumitru* (1562, 567, 574, 609, 610, 613, 614, 616, 618, 621—623, 627, 6 8, 631, 632, 635, 640—642, 644, 646.649, 651—657, 672, 688, 701, 715, 719, P), Petrovici Radu (1583, 585, 628, 701, 706, 711, 719, 721, 770, 784, P).

GĂEȘTI. Clasa VII-a. Păun N. Ioana (1827; E: 682, 684, 689, 691, 694, 700, 701, 703, 707).

GALAȚI. Clasa VIII-a. Pintilie Constanța (1673, 674, 697, E: 682, 684, 685, 689, 691, 694, 700, 701, 703); clasa X-a. Ceanga Emil (1726—728, 730, 733, 734, 736, 737, 744, 752—754), Gherasim Lucian (1655, 681, 687, 689, 690, 693, 697, 728, 730′ 747, 752, 787, P), *Grosu Gh. Florin* (1609, 610, 612—616, 618—629, 631—642, 648, 649), Neago Pișta (1656, 669, 673, 674, 687—689, 693, 697, 698, 728—730, 736, 747, 752), absolvent Bușilă Gheorghe (1615, 618, 621—623, 628, 632, 635, 636, 640—644, 646, 647, 649—653, 657, 674, 681, 683—689, 697, 706, 707, 715, 721).

GHEORGHENI. Clasa X-a. Mîndru Traian (1655—657, 666, 668, 673, 674, 681, 685, 688, 689, 706, 719, 728, 730, 733, 752, 759).

GIURGIU. Clasa VI-a. Popescu Gh. Adina (E: 638, 640, 643, 653, 672, 679, 680); clasa VIII-a. Mustățea Florin (1577, 635, 672, 733, E: 626, 638, 640, 643, 647, 650, 654—656, 665); clasa IX-a. *Panaitopol V. Laurențiu* (1613, 625, 628, 637, 644, 645, 650—653, 657, 658, 667, 668, 675, 686, 687, 692, 694, 699, 705, 711, 713, 718, 719, 721, 726—728, 730, 734—736, 738, 739, 743, 745, 746, 751, 754, 758, 760, 762, 763, 768, 772, 774, 775, 778, 781, 783, 786, 799, 800, P); clasa X-a. *Botoran I. Petre* (1655—658, 660, 663, 666, 668—670, 672—674, 677, 681, 682, 685—690, 693—695, 697, 699, 706, 707, 713, 715, 718, 720, 776, 763), *Stăncescu M. Emil* (1565, 616, 651, 652, 653, 655, 656—658, 663, 666, 668—670, 672 673, 674, 677, 681—687, 689, 690, 693—695, 697, 699, 707, 726, 730, 740, 763, 776), Stăncescu St. N. (1618, 623, 628, 634, 643, 653, 671, 674, 688, 698, 706, 728, 737, 742, 760, 766, 778, 787, 789, 819, P).

HÎRLĂU. Clasa VIII-a. *Țibuleac Florin* (1562, 565—568, 570, 575, 580, 582, E: 624—631, 636—640, 643, 644, 646, 647, 649—652, 655, 656, 660, 663, 665, 668).

IAȘI. Școala medie nr. 1. Clasa IX-a. Țibuleac Florin (1622, 627, 635, 640, 666, 681, 688, 696, 697, 706); clasa X-a. Lazanu Georgeta (1681—683, 685—699); absolvenți: Abramovici Renée (1520, 525, 562, 565, 568, 574, 603, 635, 645, 649, 651, 652, 685, 689, 730, 737, 738, 747, 750), *Segal Zigu* (1561, 564, 566, 567, 569, 574, 580, 582, 622, 625, 635, 636, 640, 642, 643, 649, 651, 656, 657, 668, 670, 673, 674, 684, 686, 688, 695, 697, 699, 706, 707, 715, 726, 728, 730, 733, 734); student Porțeanu Mircea (1655, 668, 677, 690, 698, 699, 726, 793, 794, 801, 810, 821).

LUGOJ. Clasa VI-a. Sarmeș Dan (E: 638, 647, 648, 657, 658, 640, 643, 65é, 668, 680, 683, 685); clasa IX-a. Daba Dumitru (1635, 640, 643, 646, 650, 674, 726, 730, 744, 752, 786, 788), Florea Dorel (1616, 628, 635, 640, 6ò2, 646, 674, 688, 724, 730, 733, 762), Păpușoiu Gh. (1727, 733, 768, 781, 798, 809, 814—816, 820, 822, 827); clasa X-a. Porumbaru Silviu (1612, 617, 619, 622—624, 629, 641, 644, 647, 649, 651, 652, 706, 707, 721, 724, 779, 783, 789, 795, 800).

LUPENI (Hunedoara). Clasa X-a. Nistor Anghel (1759, 760, 762, 763, 765, 768, 770, 774—776).

MOINEŞTI. Clasa X-a. Perlman Maier. (1562, 565, 567, 568, 570, 578—580, 621, 635, 640, 641, 643, 646).

NĂSĂUD (Cluj). Rodna. Domide Leontin (generalizarea noţiunii de număr, istoric).

ODOBEŞTI (Bîrlad). Clasa X-a. Bratoşin Elena (1646, 683, 685, 686, 701, 706, 763, 798—800), Chitic Angela (1647, 683, 685, 687, 701, 706, 713, 721, 779, 799), Savin Maria (1640, 644, 646—649, 683, 701, 730, 763, 798), Tibnea T. Aurica (1646, 648, 683, 685, 687, 701, 706, 763, 798—800).

ORADEA. Clasa VI-a. Leghezeu Ana (E: 638, 640, 642, 650, 653, 655); clasa X-a. Buciuman Cornel (1562, 566—570, 575, 579, 580, 614, 621, 635, 638, 640, 644, 646, 647, 651).

ORAŞUL STALIN. Clasa VIII-a. Dragomir Adrian (1654, 655, 656, 681, 688, 694, 696.698, 713, 718, 721, E: 654, 660, 663, 665); clasa IX-a. Mesaroş C. (1562, 565—570, 574, 577, 578); clasa X-a. Brînduş D. Lucian (1670, 673, 681, 688, 689, 707, 726—728, 730, 733, 736—738, 742, 746, 760, 774, 775, 786, 787, 792), Corbu Gheorghe (1640, 706, 733, 740, 742, 744, 754, 775, 787, 792, 803), Podeanu Cornel (1560, 561, 563, 564, 566—570, 574, 575, 578—580, 582, 606); anul IV c.f.r. Ariton I. Vasile (1560, 563, 566, 568—572, 575, 656, 658, 662, 664, 672, 677, 678, 680, 684, 689, 696, 699). Student (Mecanică) Teodorescu I. Ştefan (1609, 612, 614, 616, 618, 620—623, 625, 626, 631, 632, 635, 636, 638—653, P).

PANCIU. Clasa X-a. Popovici Nicolae (1605, 640, 646, 648, 651—653, 657, 669, 688, 692, 694, 728, 730).

PETROŞANI. Student *Dan Savin* (1560—572, 574, 575, 580, 726—754, 756, 758—763, 765,—768, 770, 772, 774—778), student (Fac. Mine) *Pleniceanu Ion* (1618, 622, 623, 640, 644, 646, 647, 650—653, 670, 673, 715, 728, 730, 738, 741, 743' 775, 779, 783, 785, 786, 793, 794, 803, 804, 808, 810, 816).

PITEŞTI. Clasa X-a. Marin Ion (1565—569, 635, 640—642, 644—647, 649, 651, 652), Matei Ion (1628, 635, 640, 641, 645—652, 685, 686, 697).

PLOIEŞTI. Clasa VIII-a. Boiangiu Nicolae (1635, 640, 673, 674, 681, 688, 697, 726, 730, 733, 774, E: 682), *Căsăndroiu C. Tudor* (1654, 663, 666, 667, 669, 672, 674, 681, 688, 697, 714, 726, 730, 733, 734, 736, 738, 751, 760, 774, E: 653, 656, 657, 663, 664, 666, 676, 678), Tudor Florin (1640, 655, 688, 697, 730, 733, E: 656, 665, 669, 680, 685, 694); clasa IX-a. Baltag Vasile (1656, 673, 688, 697, 701, 714, 725, 726, 730, 739, 774, P), Cioltei Anca (1643, 655, 673, 679, 688, 697, 706, 727, 730, 740), Constantinescu Dan (1635, 640, 646, 673, 681, 688, 724, 726, 730, 733), Delibas Constantin (1641, 647, 648, 650—655, 657, 658, 672—674, 677, 683—685, 688, 689, 697, 699, 706, 724, 725, 726, 730), Paraschiv Veniamin (1635, 640, 643, 646, 649, 673, 674, 681, 685, 688, 689); clasa X-a. Damian Şerban (1561, 562, 565—568, 570, 574, 577, 579, 580, 635, 636, 640, 644, 653), Dinescu Sorin (1562, 566, 569, 574, 640, 673, 681, 727, 728, 730, 733, 738), Drăgan Letiţia (1574, 635, 636, 640, 641, 643, 644, 646, 651, 786), Ilioiu Smaranda (1574, 635, 636, 640, 641, 643, 644, 646, 786), Mezincescu Anca (1650, 651, 653, 673, 679, 688, 697, 728, 730, 740, 792, 803), Petrescu M. Răzvan (1561, 564—569, 574, 580, 582), Radu Silvia (1574, 614, 635, 640, 643, 644, 646, 652, 787, 788, 792), Teodorescu Victor (1561—572, 574—576, 578—580, 582, 618, 622, 630, 632, 635, 638, 640, 641, 643, 644, 646, 648); absolvenţi: David Vasile (1561, 565—570, 572, 574, 578, 582, 588, 589, 602, 604, 635, 640, 642—644, 646), *Lupuţiu Ioan* (1618, 622, 634, 655, 661, 670, 671, 673, 674, 677, 681, 683—691, 693, 699, 701, 706, 707, 715, 721, 724, 726, 728—730, 733, 736, 740, 742, 749, 751, 753, 754), Popovici Gh. Iulian (1610, 612—619, 621—623, 626, 627, 629, 630, 632, 633, 700, 701, 703, 705—707, 709, 710, 714, 715, 717—720, P).

PUCIOASA (Ploieşti). Clasa X-a. *Bucur Gheorghe* (1620, 624, 627, 644, 651, 654—659, 663, 665—670, 672—675, 677—679, 681, 682—690, 692, 694—699, 701, 705—707, 711, 714, 718, 719, 721, 724, 726—728, 730, 734, 736, 740), Stan Dumitru (1560, 562, 565—567, 569, 570, 578, 580, 635, 636, 640—642, 648, 655, 656, 674, 685, 688, 689, 695, 697).

RÎMNICU SARAT. Clasa X-a. Tudor Ionel (1562, 566, 568—570, 574, 578, 580, 628, 635, 635, 640, 641, 650, 653, 672, 674, 688, 690, 697, 717); absolvent Romeo N. Mărgărit (1621, 635, E: 638—641, 643, 644, 647, 650, 665).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa VIII-a. Bulucea Constanţa (1568, 635, 655, 663, 681, 688, 697, 725, 726, 730, 734, 73); clasa IX-a. Ancuţoiu I. Gheorghe (1663, 667, 672, 696, 701, 735, 753, 768, 782, 786, 788); clasa X-a. Băiaşu D. Nicolae (1566, 569, 580, 642, 643, 646, 650, 653, 665, 667, 730, 733, 734, 738, 753), Enescu I. Nicolae (1668, 673, 674, 681, 683, 686, 688, 697, 706, 726, 730, 740, 752, 768, 800), Grigorescu D. Ion (1616, 618, 621—623, 626, 634, 636, 641—644, 649—653, 673, 677, 681, 683, 685, 686, 688, 693, 696, 697, 699, 706, P), Miu I. Ion (1640, 650, 686, 688, 697, 730, 746, 747, 768, 800), Mităr Corneliu (1681, 686, 688, 726—728, 730, 733, 737, 747, 787, 800), Paulescu N. Dan (1650, 655, 657, 666, 673, 674, 681, 683, 685, 686, 688, 693, 696, 697, 706, 707, 725—727, 730, 733, 736, 745, 747, 768, 800), Pojoagă N. Const. (1618, 621, 622, 632, 635, 636, 639, 640, 642—644, 646, 649, 652), Popescu C. Dumitru (1640, 681, 683, 686, 688, 730, 768, 800), Sarion I. Virgil (1701, 706, 726, 733, 736, 740, 742, 746, 747, 800, 819, 822), Ţugulea Eugen (1635, 640, 650—652, 657, 673, 674, 677, 681, 686, 688, 693, 696, 697, 699, 706, 727, 728, 730, 733, 735, 747, 768, 800).

REŞIŢA. Clasa X-a. Marchiş Felix Ioan (1654, 655, 657, 658, 664, 666, 669, 673, 674, 677, 683, 685, 689, 695, 698, 706, 721, 724, 730, 733).

ROMAN. Clasa X-a. Huţanu Cornel (1522, 526, 532, 566, 567, 569, 635, 640, 644, 645, 649, 650—653, 688, 689), absolvent *Ursoiu Vasile* (1561, 562, 564—570, 572, 574—576, 578, 582, 609, 617, 621, 622, 634—637, 639, 640, 644, 649, 668, 674, 683, 685, 687—691, 693, 695, 697, 699).

SALONTA (Oradea). Şcoala de 7 ani Inand. Clasa VI-a. Baş Floare (E: 614, 625, 630, 640, 643, 649, 650, 652, 657, 665, 668), Gherman Ecaterina (E: 611, 625, 638, 640, 644, 647, 649, 650, 652, 653, 655, 663).

SIBIU. Anul III Energie Electrică, Butnaru Damian (1618, 636, 658, 668, 669, 673, 681, 684, 706); clasa X-a. Dordea Ioan (1616, 629, 667, 672, 679, 701, 713, 721, 724, 760, 768, 786, 800, 803), absolvenţi *Alexa Ioan* (1562, 577, 610, 618, 622, 628, 632, 636, 639—642, 645, 646, 649—658, 670, 672—674, 677, 681, 682.685, 689, 690, 693, 695—698, 700, 701, 705—707, 711, 724, 727, 730, 734, 744, 745, 747, 749, 753, 766, 768, 769, 772, 780, 795, 796, 805, 810, 814—816, 827, P), *Pupăzan V. Nicolae* (1722, 726—734, 736—738, 740, 744, 745, 747, 749, 751—754, 758, 762, 763, 766, 768—771, 775, 780, 783, 785, 786, 795, 796, 799, 800, 803, 809, 810, 814—816, 822, 827).

SIGHET. Clasa VII-a. Tomoioagă Doru (1666, 803, E: 658, 663—665, 680—682, 689, 700, 703).

SIGHIŞOARA. Clasa IX-a. Bukowski Peter (1642, 646, 648, 655, 674, 681, 684, 688, 697, 726, 730).

SLATINA. Clasa X-a. Creoleanu Nicolae (1667, 681, 701, 706, 724, 727, 728, 730, 733, 738, 747, 752, 757, 775, P), Gottesmann Ianus (1560, 561, 563—566, 681, 683—693, 695—697, 699, 706, 707), Şerbănescu N. Tiberiu (1655, 672, 674, 681, 684, 688, 693, 696—698, 701, 706), *Voicu I. Traian* (1635, 636, 640—644, 646, 647, 649—652, 656, 668, 670, 672—674, 677, 681, 682, 684, 685, 687—693, 695, 697—699, 701, 706, 707, 721, 726, 728, 730, 733, 736, 743, 744, 747, 748, 799, 800).

TÎRNĂVENI. Şcoala medie de 10 ani. Clasa IX-a. Piso Pompiliu (1705, 726, 727, 730, 734, 744—747, 751, 752, 754, 760, 762, 768, 770, 772, 774).

TÎRGOVIŞTE. Clasa IX-a. *Stănciulescu M. Mihai* (1635, 637—641, 643, 644, 646, 648—652, 666—670, 672—680, 682—699, 714, 715, 717, 718, 725—731, 733, 735, 737—740, 742—744, P).

TÎRGU-JIU. Clasa VII. Velicescu Mircea (1635, 640, 642, E: 638—641, 643, 644, 646—650). Clasa VIII-a. *Aniţescu N. Nicolae* (1628, 635, 636, 638, 642, 645, 646, 650, 673,

674, 681, 684, 685, 688, 690, 693—695, 697, 698, 699, 701, 706, 707, 718, E: 638—641, 643, 644, 646—653, 655, 656, 659, 662, 664, 666, 668), Popescu T. Mihai (1653, E: 638, 640, 643, 647, P), Clasa X-a. Amzulescu Liana (1681, 683, 689, 727, 728, 730, 747, 768, 770, 793, 814, 842), Popescu Iuliana (1727, 728, 730, 733, 744, 747, 748, 752, 754, 759, P).

TÎRGU MUREŞ. Clasa VIII-a. Matei Didina (E: 625, 634, 636, 638—644, 646, 647, 650, 652, 653, 655, 661, 663, 668), Nichescu Elena (1513, 515, 560, 563, 566, 569, 640, E: 601, 608, 636, 638—640, 643, 644, 646, 647, 649).

TELEAJEN (Ploieşti). Absolvent David Vasile (1647, 649—653, 664, 672—674, 681, 685, 688, 693, 695, 697, 706, 720, 721).

TÎRGU MUREŞ. Clasa VIII-a. Matei Didina (E: 625, 634, 636, 638—644, 646, 647, 650, 652, 653, 655, 661, 663, 668), Nichescu Elena (1513, 515, 560, 563, 566, 569, 640, E: 601, 608, 636, 638—640, 643, 644, 646, 647, 649).

TELEAJEN (Ploieşti). Absolvent David Vasile (1647, 649—653, 664, 672—674, 681, 685, 688, 693, 695, 697, 706, 720, 721).

TECUCI. Clasa VIII-a. Sulugiuc Silvia (E: 669, 672, 674, 677, 679, 680, 688, 692, 693, 695, 703), Vidraşcu Traian (E: 653, 656—658, 663, 680, 683, 685, 698); clasa IX-a. Vasilică Const. (1730, 733, 736, 760, 774, 786, 788, 818, 820, 822, 827); clasa X-a. *Goldstein Alexandra* (1640, 665, 673, 674, 681, 685, 687, 688, 697, 706, 724, 727, 728, 730, 733, 734, 742, 746, 747, 759, 760, 772, 774, 775, 783, 786—788, 792, 793, 803, 816, 819, 820, 827), Ilea Valeriu (1640, 646, 655, 664, 665, 685, 697, 730), Niţă Fănică (1638, 647, 664, 665, 727, 730, 734, 740, 772, P), *Pîrvănescu Iulius* (1640, 664, 665, 673, 674, 681, 685, 688, 697, 699, 727, 728, 730, 733—736, 742, 744, 747, 752, 759, 775, 783, 787, 788, 792, 793, 803, 816, 818—820, 827, P), Rudich Sebastian (1727, 734, 740, 759, 772, 775, 787, 792, 793, 803, 819, 827).

TIMIŞOARA. Clasa IX-a. Cismariu Ionica (1681, 683, 685, 687—689, 693, 697, 721, 775); clasa X-a. *Arsenovici Tiberiu* (1655—660, 666, 668—670, 672, 673, 676, 677, 684, 685, 688—690, 693, 695, 698, 701, 707, 714, 715, 717, 724), Bărglăzan Mircea (1635—638, 640, 642—645, 647—653), Popa Laurenţiu (1638—641, 643, 645—647, 649—653, 655, 656, 664, 670, 672, 673, 677, 681, 683, 685—691, 693, 695, 698, 699, 701, 706, 724). Studenţi: Dragoescu I. (1701, 705—707, 724, 728, 766, 768, 770, 772, 800, P), Melencu Dumitru (1726—728, 730, 759, 762, 768, 772, 783, 793, 798).

TULCEA. Absolvent Slavov Leonid (1666, 667, 669, 670, 674, 681, 683, 692, 694, 695, 701).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa X-a. Focşeneanu I. Ioan (1614, 622, 623, 626, 630—634, 639—653, 656, 663, 666, 670, 673, 674, 681, 688).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Cojocaru N. (1643, 645, 646, 648, 655, 714, 717, 730, 733, 734); clasa X-a. Dragomirescu Elena (1643, 644, 646, 649, 653, 685, 688, 693, 730,

TURNU SEVERIN. Clasa VIII-a. Strugaru N. Crişan (1564, 580, 592, 600, 618, 627, 630, 631, 634, 639, 640, 643, 646, 652, 681, 688, 693, 697—699); clasa X-a. Ionescu Radu (1647, 650, 653, 706, 727, 728, 730, 733, 740, 752, 783, 787, 803, P).

URZICENI. Absolvent Turiga M. Constantin (1655—657, 670, 672, 674, 677, 681, 684—690, 692—698, 706, 707, 721, 724, 727, 728, 730, 733, 734, 736, 737, 744, 746, 747, 754, 783, 799).

ZALĂU. Clasa X-a. Farcaş V. Beniamin (1655, 673, 681, 688, 698, 714, 727, 728, 730, 733 — 735, 739 739, 747, 752, 760, 766, 774, 787, 788, 792, 803, 820).

ZIMNICEA. Clasa VIII-a. Gheorghief Petre (E: 669, 670, 672, 673, 676, 678, 680—682, 684, 685, 689—691), absolvent Pietreanu C. Petre (1636, 640, 641, 644—649, 651—658, 667, 669, 670, 672, 681, 683—785, 687—689, 691, 695—699).

Országos Mészöly Könyvtár

POȘTA REDACȚIEI

Tov. prof. Drulea Mihai. Vișeul-de-sus (Baia Mare). Articolul prezentat nu are caracterul specific al unui articol de revistă, ci de paragraf al unui tratat de fizică. Nivelul de asemenea depășește cunoștințele elevilor.

Elev Chircu Mugur. Ianca (Galați). La întrebările 1—5, aveți răspunsul în articolul «Clasificarea elementelor» care va apare în G.M.F.B. La întrebarea 6: Distanța dintre nucleu și orbită este de $0{,}55.10^{-8}$. Corespunde această cifră tuturor elementelor? Distanța dintre nucleu și orbită nu este aceiași pentru toate elementele. La întrebările 7, 8, 9 vă răspundem că nu radioactivitatea, ci izotopii radioactivi sînt folosiți. Pentru documentare vă recomandăm consultarea lucrării: Aplicațiile pașnice ale energiei atomice, din Editura Academiei R.P.R.

Elev Băieșu M., R. Vîlcea. Problema propusă este greșită din punct de vedere al corespondenții ei cu realitatea: NaCl nu hidrolizează.

Elev Cristea Aurel. Focșani. Problema ce ați propus este greșită ca rezolvare.

Elev Stănciulescu Mihai. Tîrgoviște. Trimiteți-ne probleme de fizică sau de chimie, însă alegeți numere cu mai puține zecimale; în problema propusă se dă atmosfera folosind patru zecimale, iar volumul unui gaz folosind șapte zecimale, partea întreagă fiind un litru!

Mai multor corespondenți. Abonamentele se fac prin oficiile poștale locale. Pentru numere mai vechi sau broșuri din biblioteca Gazeta Matematică și Fizică, seria B, vă puteți adresa la «Librăria Academiei», București, Calea Victoriei Nr. 27, Serviciul *Cartea prin poștă.*

E R A T Ă.

— La problema 1773 în loc de tg $2x$ + tg $2x$ se va scrie tg $2y$ + tg $3x$.

— La problema E: 718 în loc de $y - x - x$ se va scrie $y + z - x$.

— La problema 1819 în loc de 30.000 kcal/kg se va scrie 3000 kcal/kg.

— La problema E: 712 în loc de BD se va scrie $CD + DA$.

— Problemele cu numerele de ordine 1992—2004 propuse în nr. precedent pag. 85, din luna februarie 1956, la rubrica chestiuni de examen, vor purta numerele de ordine respectiv dela 1992 bis—2004 bis.

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceia i foaie, iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa ș școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate în *ordinea lor numerică*, iar pe adresă menționați *Redacției G.M.F.* seria *B*.

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute și la problemele: 1762, 1769, 1773, 1783, 1804, 1805, 1807, 1819, 1825, 1853, 1854, 1859 1861, 1872, 1873, 1900, 1902, 1903, 1906, 1910, 1929, 1932, 1933, 1936, 1938, 1946, 1960, 1965 și următoarele. *Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului* 1956, *se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul* 1956.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, *însoțit de soluții*, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste, este rugat să arate precis volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *În redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra *modului de desfășurare a «Olimpiadei matematice și fizice* 1956», pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile de neprimirea revistei și propuneri sau sugestii în legătură cu tirajul sau întîrzierea revistei se vor face *Oficiului poștal local* sau Centrului de *Difuzare a Presei din București*, Piața Scînteii, Nr. 1.

— Fiecare cititor al G.M.F. seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și altora și să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— La exercițiile și problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc rezolvări numai de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a și a VIII-a, de la elevii anului I ai școlilor tehnice de maiștri sau din anul I și II ai școlilor profesionale sau pedagogice de învățători.

Rezolvitorii de probleme sînt rugați să nu trimită plicuri cu mai puțin de zece soluții. Din problemele primite nu se anunță cele incomplect rezolvate, cele care conțin greșeli, cele neglijent redactate, cele care au greșeli de calcul, desene neîngrijit făcute, sau sînt copiate după altele.

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1956

SE FAC LA OFICIILE POȘTALE SAU PRIN FACTORI POȘTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII.

C. 115. Întreprinderea Poligrafică Nr. 4.

Prețul Lei 1 exemplarul

E 1426

BUCUREȘTI
SCHIMB - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - СМЕНА

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

Országos Idegennyelvű Könyvtár
Könyvtár
TULAJDONA

SERIA B

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VII — aprilie 1956

4

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII. Nr. 4 — aprilie 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *Microfonul de Ing. P. Demilano* 169
2. *Un exemplu de generare a teoremelor de geometrie de Gh. Buicliu* 180
3. *O problemă practică de maxime şi minime rezolvată pe cale geometrică de Eugen Ţimpoc* 182
4. *Determinarea distanţei focale la o lentilă divergentă de N. Rădulescu* 185
5. *Note matematice (7—8)* 187
6. *Noutăţi din ştiinţă şi tehnică (1—3)* 190
7. *Probleme rezolvate (1503, 1550, 1583, 1593, 1602, 1606, 1624, 1628, 1654, 1658, 1672, 1700, 1705, 1709, 1711, 1713, 1724, 1762)* 193
8. *Chestiuni de examen (2109—2138)* 207
9. *Probleme propuse (2139—2161)* 211
10. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E : 791 — E : 805)* 214
11. *Poşta redacţiei* 215
12. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 217

ANUL VII 4 APRILIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VII • Nr. 4 aprilie 1956

MICROFONUL

Ing. P. DEMILANO

MICROFONUL este unul dintre aparatele electroacustice care, ca şi difuzorul, este foarte mult folosit. Astfel, îl găsim la aparatele telefonice, la instalaţiile de radioficare, la aproape toate staţiile de amplificare, în studiourile de radiodifuziune, de cinematografie şi de televiziune, ca anexă la magnetofoane etc.

Avînd în vedere marea importanţă a acestor aparate, vom da în cele ce urmează o descriere a microfoanelor, insistînd în special, asupra realizării practice şi utilizărilor acestora.

microfonul este un aparat electroacustic care transformă undele sonore care întîlnesc membrana lui într-un curent alternativ modulat, cu o frecvenţă şi intensitate corespunzătoare undelor sonore recepţionate. Curentul electric poate fi transmis prin conductori, amplificat cu ajutorul amplificatoarelor electrice şi apoi transmis în difuzoare, care îl transformă din nou în unde sonore. Denumirea de microfon, care înseamnă în greceşte sunet slab, s-a dat acestui aparat, deoarece iniţial era folosit pentru ascultarea undelor slabe. În prezent majoritatea microfoanelor servesc la transmiterea sunetelor la distanţă.

1. Clasificarea şi principiul de funcţionare al microfoanelor

Din punct de vedere al curentului debitat microfoanele se împart în două mari categorii :

— microfoane fără alimentare, la care curentul electric este produs de diferenţa de potenţial ce apare în ele, cînd asupra membranei cad undele sonore, şi

— microfoane cu alimentare, la care vibraţiile membranei determină numai o variaţie a curentului sau energiei de alimentare a microfonului.

Microfoanele fără alimentare se împart în :

— microfoane piezoelectrice sau cu cristal
— microfoane electromagnetice
— microfoane electrodinamice: { cu bobină de inducţie / cu bandă

Microfoanele cu alimentare se împart în :

— microfoane cu cărbune sau cu contact
— microfoane cu condensator sau cu capacitate

Să studiem acum, principiul pe care se bazează fiecare din aceste tipuri de microfoane.

a) Microfoanele cu cristal sînt numite şi piezoelectrice, deoarece se bazează pe proprietatea cristalelor piezoelectrice din sare Seignette, de a se încărca cu electricitate statică de semn contrar pe cele două feţe, cînd sînt deformate. Practic pentru a se obţine la un moment dat electricitate de sens contrar pe cele două feţe ale cristalului se grupează cîte două cristale similare lipite la un loc, astfel încît polarităţile lor să fie opuse (fig. 1 *a*).

Pe cele două feţe ale cristalului, încastrat în capsula microfonului, se află cîte o foiţă de aluminiu, care sînt puse în legătură, printr-un conductor, cu bornele microfonului. În felul acesta diferenţa de tensiune dintre cele două feţe ale elementului de cristal variază după intensitatea şi în ritmul undelor sonore perpendiculare pe suprafaţa cristalului. În general, pentru a se obţine o diferenţă de potenţial mai mare la bornele microfonului, deci o sensibilitate mai mare a acestuia, microfonul este prevăzut cu o membrană elastică (fig. 1 *b*) încastrată pe margine, care transmite vibraţiile sonore cristalului.

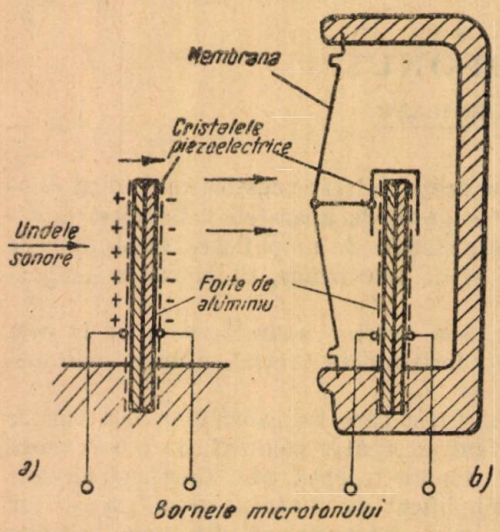


Fig. 1. Principiul microfonului cu cristal.

Se construiesc şi microfoane piezoelectrice cu mai multe celule sonore, avînd fiecare cîte un element de cristal.

Microfoanele cu cristal nu sînt prea sensibile, adică nu recepţionează undele slabe, însă distorsiunea la frecvenţele ridicate este mică, ceea ce permite transmiterea sunetelor înalte.

Impedanţa acestui tip de microfon este ridicată, variind între cca 100 000 Ω şi 1 MΩ. Un dezavantaj al microfoanelor cu cristale din sare Seignette este faptul că aceasta se topeşte la 63°C, deci nu poate funcţiona la temperaturi de peste 40°C. În al doilea rînd, cristalele sînt sensibile la umiditate şi trebuie bine protejate împotriva acesteia. De asemenea şocurile puternice pot determina spargerea cristalelor, deci defectarea microfonului.

b) Microfoanele electromagnetice sînt formate dintr-un magnet, ale cărui piese polare sînt înfăşurate cu o bobină. Membrana microfonului, construită dintr-un material feromagnetic şi aşezată în faţa pieselor polare, modifică prin vibraţia sa interferul dintre ea şi poli, producînd o variaţie a fluxului magnetic. În felul acesta se induce în bobină o tensiune, care variază după oscilaţiile membranei. Acest tip de microfon nu se mai foloseşte actualmente în practică, deoarece are mari distorsiuni de frecvenţă.

c) Microfoanele electrodinamice se bazează pe principiul inducţiei, prin mişcarea într-un cîmp magnetic constant a unui conductor în formă de bobină sau de bandă, care vibrează sub influenţa undelor sonore. După natura conductorului care vibrează deosebim două tipuri distincte de microfoane electrodinamice: microfoane cu bobină mobilă (fig. 2 *a*) şi microfoane cu bandă (fig. 2 *b*).

La microfoanele cu bobină mobilă undele sonore produc vibraţia unei membrane din material sintetic (polivinil), care este legată solidar cu o bobină mobilă foarte uşoară. Prin mişcarea acesteia în cîmpul magnetului se induce în bobinajul ei o forţă electromotoare, deci o diferenţă de potenţial, care variază corespunzător cu frecvenţa şi intensitatea undelor sonore. Tensiunea obţinută la bornele bobinei mobile este foarte mică şi de aceea este mărită de obicei cu ajutorul unui transformator de adaptare, montat în carcasa microfonului.

În cazul microfoanelor cu bandă, undele sonore produc direct vibraţia unei benzi de aluminiu groasă de cîţiva microni şi lată de cîţiva milimetri,

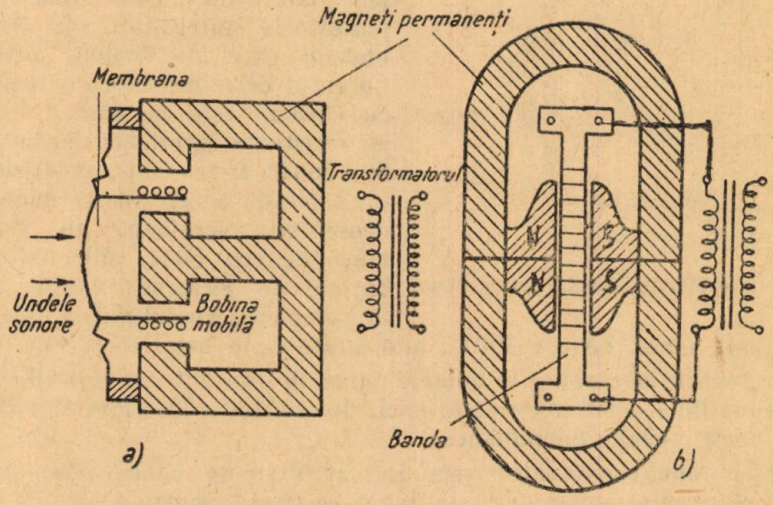


Fig. 2. Principiul microfoanelor electrodinamice.

ondulată transversal şi fixată la cele două capete. Prin deplasarea acestei benzi în cîmpul magnetului se produce în ea o forţă electromotoare, deci o diferenţă de potenţial, variabilă cu frecvenţa şi intensitatea undelor sonore care acţionează asupra ei. Armăturile magnetului sînt aplatisate în dreptul benzii, pentru a se obţine o concentrare a cîmpului magnetic. Ca şi în cazul microfoanelor cu bobină mobilă, diferenţa de potenţial este mărită cu ajutorul unui transformator ridicător de tensiune. Se construiesc şi microfoane dinamice, la care magnetul permanent este înlocuit cu un electromagnet, al cărui bobinaj este parcurs de un curent continuu. În acest caz este necesar deci un curent de excitaţie. De asemenea se construiesc microfoane speciale pentru studio, combinate dintr-un microfon cu bobină mobilă şi unul cu bandă; aceste microfoane prezintă calităţi superioare.

Microfoanele electrodinamice sînt mai puţin sensibile decît cele cu cristal însă au o distorsiune de frecvenţă mică pentru toată banda de frecvenţă de la 50 pînă la 10.000 Hz, fiind calitativ mult superioare celor de cristal.

Impedanţa bobinei mobile este de 50—60 Ω.

Acest tip de microfon, şi în special cel cu bobină mobilă, este solid, rezistent la şocuri şi folosit mult la transmiterea vorbirii şi muzicii.

d) Microfonul cu cărbune se bazează pe variaţia rezistenţei electrice a unei mase de granule de cărbune, sub influenţa presiunii variabile, exercitate de

undele sonore (fig. 3). Curentul de alimentare, produs de baterie, trece prin circuitul primar al transformatorului, parcurge masa de granule de cărbune şi apoi prin membrana elastică a microfonului ajunge înapoi la baterie. Cînd undele sonore întîlnesc membrana, granulele de cărbune sînt presate în ritmul undelor sonore şi produc variaţia rezistenţei de contact între granule şi prin aceasta variaţia intensităţii curentului debitat de baterie. La trecerea acestui curent de intensitate variabilă prin înfăşurarea circuitului primar al transformatorului se obţine în înfăşurarea lui secundară o tensiune alternativă corespunzătoare intensităţii şi frecvenţei undelor care au întîlnit membrana. Curentul de alimentare a microfoanelor cu cărbune este de cca 20—40 mA, iar rezistenţa interioară medie este de 50—500 Ω. În telefonie, unde este foarte mult folosit acest tip de microfon, se deosebesc microfoane cu rezistenţă mică de cca 50 Ω, alimentate de o baterie de elemente uscate, aşezată în apropierea aparatului, şi microfoane cu rezistenţă mare, de cca 500 Ω, alimentate de o baterie centrală.

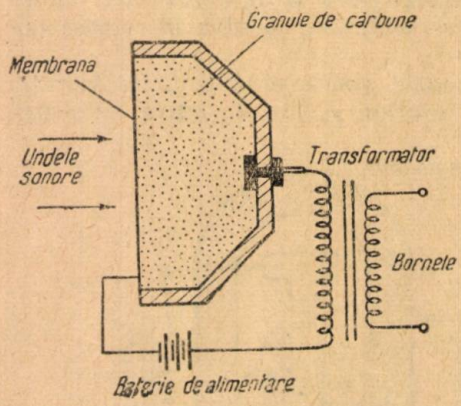


Fig. 3.—Principiul microfonului cu cărbune.

Microfoanele cu cărbune se folosesc numai la transmiterea vorbirii, deoarece nu reproduc fidel decît frecvenţele mici, de cca 180—3500 Hz; sînt însă mai sensibile decît celelalte microfoane.

e) Microfonul-condensator este format dintr-un condensator cu două armături plane, dintre care una este fixă şi perforată, pentru a permite trecerea aerului, iar cealaltă, construită dintr-o membrană foarte subţire de aluminiu sau oţel, bine întinsă, poate vibra sub influenţa undelor sonore (fig. 4). Prin vibraţiile membranei se modifică distanţa dintre armături, adică grosimea dielectricului, deci şi capacitatea condensatorului. Trecerea de la variaţiile de capacitate la variaţiile de tensiune se realizează prin montarea în serie în circuitul microfonului, a unei surse de curent continuu şi a unei rezistenţe R_1, la bornele căreia se ia tensiunea care variază în ritmul frecvenţei undelor sonore.

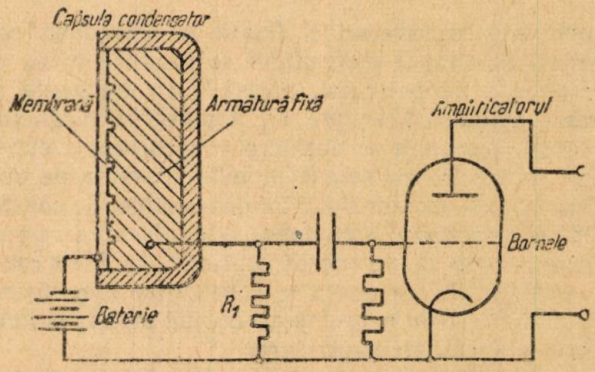


Fig. 4.—Principiul microfonului-condensator.

Fenomenul se petrece astfel: creşterea capacităţii atrage după sine o încărcare suplimentară a microfonului, iar bateria debitează un curent de încărcare; micşorarea capacităţii determină descărcarea parţială a condensatorului, adică curentul merge în sens invers, de la microfon spre baterie; tensiunea alternativă obţinută la bornele rezistenţei R_1 este foarte mică şi de aceea

este amplificată de un amplificator electronic, montat în majoritatea cazurilor chiar în carcasa ecranată a microfonului, care are o formă cilindrică.

Microfonul cu condensator este foarte sensibil pentru toată banda de frecvență a sunetelor auzibile, 30—15 000 Hz; el dă distorsiuni mici, poate avea diferite caracteristici polare, după cum vom vedea mai jos, însă deoarece este expus la defectări, necesită o construcție foarte precisă și o întreținere deosebită.

Se construiesc și microfoane-condensator cu mai multe capsule-condensatori pentru diferite caracteristici polare, care se pot schimba după nevoie. Acest tip de microfon este de calitate superioară, fiind întrebuințat în special în studiourile de radio, cinematograf, teatre, săli de concert etc., unde se cere o reproducere impecabilă a sunetelor. El necesită un aparat anexă pentru producerea tensiunii continue de alimentare în cazul alimentării de la rețea, iar în lipsa rețelei necesită și o sursă de alimentare de curent continuu, formată dintr-o baterie de acumulatoare. Același aparat furnizează și tensiunile necesare alimentării amplificatorului microfonului.

2. Caracteristicile electroacustice ale microfoanelor

Fiecare microfon este caracterizat, în general prin patru mărimi esențiale, care indică atît calitatea lui cît și posibilitățile lui de utilizare.

Aceste caracteristici sînt:

— sensibilitatea microfonului, care dă valoarea forței electromotoare dezvoltată de microfon sub acțiunea presiunii sonore,

— caracteristica de frecvență, care arată variația sensibilității microfonului în funcție de frecvența undelor sonore,

— caracteristica polară a microfonului, care ne indică sensibilitatea microfonului în diferite direcții,

— impedanța de ieșire.

Să studiem pe rînd aceste caracteristici.

a) sensibilitatea microfonului se exprimă prin valoarea forței electromotoare dezvoltată de microfon, dacă asupra acestuia acționează o presiune sonoră de 1 microbar. Unitatea de sensibilitate este 1 mV/μbar, iar un microbar este egal cu presiunea unei forțe de 1 dyn/cm^2.

La microfoanele electrodinamice sensibilitatea medie este de ordinul 0,1—2 mV/μbar, la cele de cristal 1—5 mV/μbar, iar la cele condensator 1—2 mV/μbar.

În general se consideră sensibilitate medie sensibilitatea la 1000 Hz, care se ia drept referință la trasarea curbei caracteristice de frecvență.

Microfoanele cu sensibilitate redusă necesită un amplificator microfonic, în special cînd microfonul este așezat la o distanță mare de la instalația pe care o deservește.

b) Caracteristica de frecvențe. După cum am văzut mai sus, sensibilitatea microfonului nu este aceeași pentru toate frecvențele recepționate. Curba care indică variația sensibilității în funcție de frecvență se numește caracteristica de frecvență. Banda de frecvență reprodusă fidel de un microfon este un factor care arată calitatea microfonului.

Un microfon ideal reproduce cu intensitate egală toată banda de frecvențe de la tonurile cele mai joase pînă la cele mai înalte, adică curba caracteristică de frecvență care dă atenuarea pentru diferite frecvențe este o

dreaptă (fig. 5*a*). Aceasta înseamnă că sunetul transmis printr-un microfon perfect este redat identic, adică nu se aude nici mai gros, prin favorizarea frecvenţelor joase, nici mai subţire, prin favorizarea celor înalte, decît sunetul iniţial.

Microfoanele reale prezintă distorsiuni de frecvenţă, adică reproduc mai slab frecvenţele cuprinse între 30-100 Hz şi cele mai mari de 8 000Hz care sînt atenuate, şi reproduc mai puternic sunetele cu frecvenţe cuprinse între 4—5000 Hz. În acest caz caracteristica reală de frecvenţă a unui microfon se prezintă după cum se vede în fig 5 *b*.

Abaterile curbei reale faţă de cea ideală, adică abaterea sensibilităţii măsurată în decibeli, faţă de sensibilitatea medie, nu trebuie să depăşească însă o anumită limită, pentru ca distorsiunile sunetului să nu devină supărătoare. In general se admite o abatere de ±5 dB pentru microfoanele

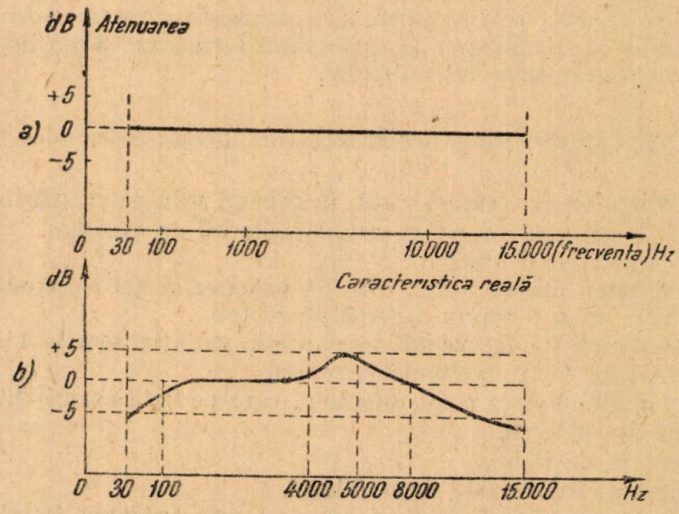


Fig. 5. Caracteristica de frecvenţă a microfonului.

obişnuite, iar pentru microfoanele perfecţionate de studio, cum sînt cele cu bandă, microfoanele-condensator sau combinate, abaterea scade pînă la ± 2dB. In cazul microfoanelor-condensator etalon abaterea ajunge pînă la ± 1 dB.

Banda de frecvenţe reprodusă în bune condiţii de un microfon este cu atît mai mare mare, cu cît abaterile caracteristicii de frecvenţă faţă de sensibilitatea medie sînt mai mici. Astfel la microfoanele comune această bandă se întinde de la 80-100 Hz pînă la 8 000 Hz, în timp ce microfoanele de calitate superioară, cum sînt cele condensator ajung de la 30 pînă la 12 000 şi chiar 15 000 Hz, fără ca distorsiunile să depăşească valorile indicate mai sus.

c) Caracteristica polară a unui microfon este o curbă polară care indică sensibilitatea microfonului în diferite direcţii. Cunoaşterea acestei curbe arată posibilităţile de folosire a microfonului respectiv în diferite cazuri. Ea poate avea patru forme principale, între care se pot intercala diferite caracteristici intermediare. În fig. 6 *a* este indicată caracteristica polară circulară sau sferică a unui microfon care recepţionează deopotrivă sunetele venite din toate direcţiile, adică are aceiaşi sensibilitate pentru orice direcţie. Se construiesc microfoane cu astfel de caracteristică polară, bazate pe principiul

electrodinamic cu bobină mobilă sau condensator şi mai rar pe principiul piezoelectric cu celule multiple. Se construiesc în general microfoane cu stativ pe podea, sau suspendate şi mai rar cu stativ pe masă.

— Caracteristica bidirecţională, numită şi «în formă de 8» reprezentată în fig. 6 *b*, aparţine unui microfon care recepţionează sunetele venite din două sensuri opuse, cum este cazul microfoanelor electrodinamice cu bandă, sensibile numai pentru undele sonore care cad aproximativ perpendicular pe suprafaţa benzii şi nu recepţionează sunetele venite din părţile laterale. Se construiesc microfoane cu această caracteristică şi bazate pe principiul microfoanelor — condensator.

—Caracteristica denumită cardioidă, deoarece are formă de inimă, reprezentată în fig. 6 *c*, aparţine unui microfon sensibil pentru undele sonore venite din faţa microfonului, acesta fiind insensibil pentru sunetele sau zgomotele produse în partea opusă. Aceste tipuri de microfoane se mai numesc şi unidirecţionale, fiind destinate în special pentru retransmiterea vorbirii.

—Caracteristica reprezentată în fig. 6 *d*, denumită hipercardioidă, aparţine unui microfon care recepţionează bine sunetele din faţa microfonului şi slab pe cele venite din spatele lui. Aceste microfoane, ca şi cele cu caracteristică cardioidă, se pot construi ca microfoane cu cristal, electrodinamice, cu bobină mobilă, cu bandă sau condensator.

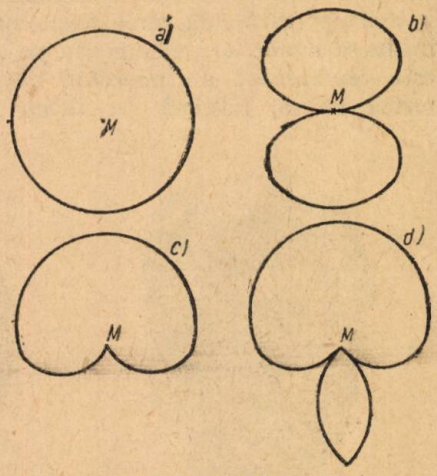


Fig. 6. — Caracteristicile polare principale ale microfoanelor.

Menţionăm că există microfoane, aşa numitele microfoane cu polară variabilă, care pot avea toate caracteristicile polare indicate mai sus; trecerea de la o polară la alta se face prin comutarea unui buton. Această construcţie, bazată pe principiul microfoanelor combinate, expusă mai sus, sau pe acela al microfoanelor-condensator, este foarte avantajoasă, deoarece se poate folosi un singur microfon în diferite cazuri, după caracteristica polară dorită. Însă aceste tipuri sînt mult mai scumpe; ele se folosesc în special în studiouri.

d) Impedanţa de ieşire a unui microfon este importantă, întrucît cunoaşterea ei dă posibilitatea unei bune adaptări a microfonului la instalaţia electroacustică respectivă, ceea ce garantează transmiterea ireproşabilă a sunetelor. Ea variază cu construcţia microfonului. Marea majoritate a microfoanelor au impedanţă de ieşire normalizată la 200 Ω, însă se construiesc şi microfoane cu impedanţe care se pot adapta la instalaţia respectivă prin intermediul unui transformator, numit de adaptare. La unele microfoane este montat chiar în carcasă transformatorul, care dă mai multe impedanţe de ieşire, comutabile printr-un comutator.

3. Formele de construcţie ale microfoanelor

În general la un microfon obişnuit deosebim două părţi:

— Microfonul propriu-zis constînd din carcasă, în care sînt montate capsula microfonică, transformatorul ridicător de tensiune, iar în cazul microfonului condensator, şi amplificatorul microfonului.

— Stativul microfonului pe care se fixează microfonul propriu-zis. După cum vom vedea mai jos, există microfoane care nu au stativ, acesta este înlocuit cu diferite dispozitive de fixare sau de suspensie.

a) Forma microfonului propriu-zis poate fi foarte variată, însă în general depinde de caracteristica polară a acestuia. Astfel, în cazul microfoanelor cu caracteristică circulară partea superioară a carcasei microfonului are o formă cilindrică sau sferică, prevăzută cu zăbrele sau rețea de sîrmă, prin care trec undele sonore, ca să ajungă la membrană. La microfoanele cu caracteristică în formă de 8, cum sînt microfoanele cu bandă, sau la cele cu polară hipercardioidă, carcasa este construită așa încît undele sonore întîlnesc banda sau membrana pe cele două fețe ale ei. În fig. 7 este reprezentat un microfon cu cristal, cu caracteristică în formă de 8, fabricat de firma Tesla din R. Cehoslovacă.

Fig. 7. — Microfon cu cristal, cu caracteristică polară în formă de 8.

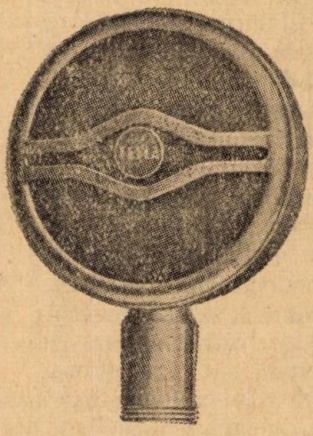


Fig. 8. — Microfon cu cristal cu caracteristică polară cardioidă,

Fig. 9, — Microfon-condensator.

În cazul caracteristicii cardioide, microfonul trebuie să recepționeze numai sunetele venite dintr-un singur sens, deci carcasa are deschiderea într-o singură parte. În fig.8 se poate vedea un asemenea microfon cu cristal, construit pentru transmiterea vorbirii.

La microfoanele-condensator la partea superioară a carcasei este montat condensatorul microfonic, care recepționează vibrațiile sonore, iar la partea inferioară, de formă cilindrică, este montat amplificatorul microfonic și transformatorul de ieșire. În fig. 9 se poate vedea un microfon-condensator fabricat în R.D.G.

b) Din punct de vedere al modului de fixare, microfoanele obișnuite se construiesc: — fără stativ, — cu mîner, — cu stativ de masă, — cu stativ de podea, — cu suspensie rigidă sau mobilă.

Natural, există și microfoane care pot fi fixate în mai multe feluri. Astfel, majoritatea microfoanelor se construiesc atît pentru montare la un stativ de masă, cît și la un stativ de podea. De asemenea se construiesc microfoane care se pot fie fixa pe un stativ, fie suspenda.

Să studiem pe rînd fiecare din aceste tipuri de microfoane.

— Microfoanele fără stativ sînt în general microfoane simple cu cristal sau dinamice, care se ţin în mînă sau se aşează pe masă. Ele sînt folosite în special ca microfoane de reportaj pentru retransmiteri sau înregistrări pe bandă de magnetofon, în care caz se ţin în mînă la o distanţă de 20-30 cm. de gură. De asemenea se folosesc astfel de microfoane -capsulă, la posturile de radio emisie -recepţie portabile.

— Microfoanele cu mîner se folosesc în special pentru reportaje şi sînt de asemenea microfoane uşoare.

Menţionăm totodată că marea majoritate a microfoanelor cu cărbune, adică cele folosite la aparatele telefonice, sînt montate în microreceptor, care de asemenea se ţine în mînă în timpul vorbirii.

— Stativele de masă se construiesc de diferite forme, în general din fontă turnată, pentru ca microfonul să aibă stabilitate. Aproape toate microfoanele cu stativ de masă sînt microfoane pentru transmiterea vorbirii, avînd polară cardioidă. Stativele de masă pot fi de două feluri : stative cu înălţime mică, în care caz cel care vorbeşte la microfon trebuie să stea pe scaun, şi stative de masă, înalte de cca 30 cm, cum sînt cele fabricate în U.R.S.S. pentru microfoanele tip R.D.M, în faţa cărora vorbitorul stă în picioare.

Microfonul propriu-zis se fixează pe stativ rigid, prin articulaţie sau prin intermediul unui tub flexibil de 20-40 cm lungime, similar celor folosite la lămpile de masă, denumit « gît de lebădă » datorită formei sale. In unele studiouri de radio se utilizează microfoane fixate printr-un astfel de tub flexibil pe pupitrul de comandă.

— Stativele de podea se construiesc cu trei picioare, cum sînt cele sovietice pentru microfoanele tip SDM, sau cu placă de bază circulară, din fontă, pe care se fixează o tije verticală. Aceasta este construită de obicei din două tuburi concentrice, care permit modificarea lungimei tijei, deci şi a înălţimii la care rămîne microfonul, între 1,20 şi 1,80 m.

— In unele cazuri, de exemplu la transmiterea pieselor de teatru, se folosesc microfoane suspendate în faţa scenei de un cablu prin intermediul unui dispozitiv de suspensie, în formă de furcă, care permite rotirea microfonului în plan vertical.

În studiourile cinematografice, pe lîngă stativele descrise mai sus, se folosesc şi microfoane mobile, al căror stativ în formă de cumpănă este fixat pe un cărucior, care poate fi deplasat după voie, în timpul turnării scenelor. În felul acesta microfonul poate fi suspendat în faţa artiştilor şi recepţionează sunetele fără a fi cinematografiat.

4. Anexele microfoanelor

Microfoanele pot avea diferite anexe, dintre care unele obligatorii, cum este cablul microfonic şi mufele de conectare, iar altele se întrebuinţează numai în cazuri speciale sau la anumite tipuri de microfoane.

a) Cablul microfonic serveşte la conectarea microfonului la amplificatorul microfonic sau direct la instalaţia electroacustică respectivă. El este format din două conductoare izolate cu cauciuc şi învelite apoi cu încă un strat de cauciuc. Pentru a se evita influenţa cîmpurilor electromagnetice, produse de instalaţiile de lumină sau de forţă, asupra curentului microfonic, cablul microfonic este de obicei ecranat cu o tresă formată dintr-o împletitură de fire metalice, care culege curenţii paraziţi produşi prin inducţie şi-i conduce la pămînt prin

cablul de punere la pămînt al tresei de ecranare. Peste această tresă se suprapune încă un strat exterior de cauciuc.

La microfoanele-condensator se folosesc cabluri microfonice cu cinci conductoare, dintre care două pentru curentul modulat, două pentru curentul de alimentare şi un conductor de rezervă.

b) Mufele de conectare servesc pentru legarea cablului microfonic la microfon şi la instalaţie, iar în caz de nevoie, şi pentru prelungirea cablului. După felul cablului folosit se întrebuinţează mufe tripolare sau hexapolare (cu şase poli). Al treilea, respectiv al şaselea pol serveşte pentru conectarea în continuare a tresei metalice de ecranaj.

c) Amplificatorul microfonic. Cînd microfonul produce la borne o tensiune prea mică, cum este cazul unora dintre microfoanele piezoelectrice sau dinamice, sau cînd acestea sînt aşezate la distanţă prea mare, ceea ce provoacă pierderi pe conductoare, este necesar un amplificator, pentru ridicarea tensiunii microfonice. Acest amplificator, numit amplificator microfonic sau preamplificator, este alimentat de la reţea şi amplifică tensiunea de ieşire a microfonului de 50 — 100 ori. Din punct de vedere al construcţiei acesta poate fi portabil sau de construcţie specială pentru a fi fixat pe stelaj, cum este cazul microfoanelor de studio.

d) Alte anexe ale microfoanelor sînt aparatele de alimentare, necesare — după cum am arătat mai sus — pentru producerea curentului continuu la microfoanele-condensator.

5. Microfoane speciale

În afară de microfoanele descrise mai sus există microfoane de construcţie deosebită, destinate unor scopuri speciale. Ele se bazează de asemenea pe principiul microfoanelor cu cristal sau electrodinamice, descrise mai sus.

a) Microfoanele-brăţară sînt microfoane de mărimea şi forma unui ceas de mînă, care se fixează ca şi acesta la mînă cu o curea de piele. Ele se folosesc cînd persoana care vorbeşte trebuie să aibă mîinile libere, cum este cazul conducătorilor de autovehicule. Microfoanele-brăţară se construiesc pe principiul piezoelectric.

b) Microfoanele de contact, pentru instrumente muzicale, folosesc la amplificarea sunetului produs de acestea, prin intermediul unui amplificator. Construcţia acestora se bazează de asemenea pe principiul piezoelectric şi poate avea dimensiuni foarte reduse. Microfonul se aşează chiar pe cutia de rezonanţă a instrumentului, care-i comunică direct vibraţiile. Se construiesc două tipuri de microfoane de contact: pentru instrumente cu registru înalt, de exemplu vioara, ghitara sau violoncelul, avînd diametrul de circa 30 mm şi grosimea de 15 cm, şi microfoane pentru instrumente cu registru grav, de exemplu pianul sau contrabasul, în care cazuri au dimensiuni mai mari. Aceste microfoane sînt folosite în special pentru amplificarea instrumentului solist la orchestrele de muzică uşoară.

c) Laringofoanele sînt de asemenea microfoane de contact, de dimensiuni reduse, care după cum arată şi denumirea se fixează la gît în dreptul laringelui, cu ajutorul unei cureluşe. Ele se construiesc fie pe principiul piezoelectric, fie pe cel electrodinamic sau cu cărbune. De obicei se folosesc perechi de capsule identice, care fixate pe cureluşa respectivă formează laringofonul. Vibraţiile sînt transmise de la laringe direct la membrana capsulei, care este

lipită de gît. Laringofoanele sînt folosite în special în aviație, unde radiotelegrafistul de bord nu ar putea folosi microfoanele obișnuite din cauza zgomotului produs de motor, precum și în toate cazurile cînd microfoanele obișnuite nu pot fi folosite din cauza zgomotului foarte mare.

d) Microfoanele de butonieră sînt microfoane miniatură cu cristal, montate într-o capsulă mică de aluminiu, care poate fi fixată la butoniera hainei printr-uu dispozitiv de agățat. Asemenea microfoane sînt folosite de reporteri și sînt practice în toate cazurile cînd nu se poate folosi un microfon de mărime și greutate obișnuită.

e) Microfoanele submarine sînt microfoane de construcție specială montate într-o carcasă metalică rezistentă, perfect etanșă contra pătrunderii apei, care pot fi scufundate în apă pînă la adîncimea de 100 m. Ele sînt construite pe principiul electrodinamic, fiind prevăzute cu un dispozitiv de compensare a presiunii apei, pentru a se preveni spargerea membranei. Ele pot fi ținute în mînă de scafandru sau coborîte în apă cu un cablu. Aceste microfoane sînt de un mare folos pentru cercetările tehnice și biologice.

f) Microfoane pentru controlul ceasurilor sînt microfoane de construcție specială, bazată pe principiul piezoelectric ; ele sînt prevăzute cu un dispozitiv de fixare, prin intermediul căruia ceasul de controlat se fixează deasupra membranei. Prin amplificarea tic-tacului ceasului și reproducerea lui într-un difuzor se poate controla ușor în serie ceasurile atît la uzină cît și la magazinul de desfacere.

g) Microfoane cu reflector sînt microfoane electrodinamice, plasate în interiorul unui reflector parabolic cu sistemul mobil în focarul paraboloidului. Energia sonoră, căzînd asupra reflectorului, este concentrată asupra microfonului, care recepționează undele sonore dintr-un unghi solid de cca 20°. Aceste microfoane sînt utilizate în special pentru restransmisiile de pe scenă, unde plasarea microfonului în apropierea artiștilor ar incomoda. De obicei se folosesc mai multe microfoane cu reflector așezate în dreapta și în stînga scenei, orientate așa încît să recepționeze toate sunetele produse pe scenă în oricare punct.

h) Microfoanele de măsură, numite și microfoane etalon, construite pe principiul microfonului-condensator, servesc la măsurarea intensității cîmpului acustic, a reverberației, și la etalonarea altor microfoane. Ele au o construcție specială, cu o caracteristică de frecvență foarte liniară, de la 30 pînă la 15 000 Hz cu distorsiuni sub $\pm$ 1 dB.

La noi în țară se folosesc numeroase microfoane în studiourile de radio difuziune, în sălile de concerte, în teatre, la stațiile de radioficare și sonorizare, precum și în toate cazurile unde este necesară retransmiterea sunetului. Microfoanele sînt indispensabile și la înregistrarea sunetului, atît pe cale optică, cît și pe cale magnetică.

În R.P.R. se fabrică numai microfoane cu cristal și microfoane cu cărbune pentru aparatele telefonice. Celelalte tipuri se importă, în special din URSS, unde se fabrică numeroase tipuri de microfoane, dintre care menționăm microfoanele tip RDM pentru transmiterea vorbirii, microfoanele tip SDM pentru muzică și microfoanele tip 10—A. 1 combinate, cu polară variabilă, speciale pentru studiourile de radiodifuziune.

Din cele expuse mai sus rezultă importanța practică a microfoanelor, precum și numeroasele aplicații pe care le pot avea în diferitele domenii ale tehnicii actuale.

UN EXEMPLU DE GENERARE A TEOREMELOR DE GEOMETRIE

GH. BUICLIU

RĂSFOIND « Gazeta Matematică » cu prilejul aniversării a 60 de ani de la apariţia primului său număr, am găsit că în 1900, pe cînd eram elev în clasa a V-a a Liceului internat din Iaşi, am trimis o soluţie la următoarea problemă, 481, propusă de Ion Ionescu:

Să se afle locul geometric al mijloacelor distanţelor dintre picioarele perpendicularelor coborîte din punctele unei drepte date pe alte două drepte date.

La pagina 257, volumul din iulie 1901, s-a publicat soluţia dată de fostul profesor şi mare matematician Traian Lalescu, pe atunci elev în anul I al fostei Şcoale naţionale de Poduri şi Şosele. La finele soluţiei sale se găseşte o notiţă — cu petit — în care se află şi numele meu printre cei 9 rezolvitori ai problemei.

Reluînd acum, studiul acestei probleme interesante am găsit că în soluţia lui Traian Lalescu nu se face de loc uz de perpendicularitatea dreptelor din enunţ, deci problema este susceptibilă de o generalizare. Mai mult decît atît, această problemă conduce la foarte interesante teoreme care cred că sînt inedite. Din cele ce urmează se poate vedea cum din studierea atentă a unei figuri geometrice sau dintr-o generalizare pot genera noi teoreme de geometrie.

Fie ABC triunghiul format de trei drepte prelungite la infinit şi M un punct mobil pe dreapta BC. Din M se duc două drepte de direcţii date, care întîlnesc pe AC şi AB în N şi P. Locul geometric al mijlocului segmentului NP este dreapta B_1C_1 care uneşte mijloacele segmentelor BB', CC', B' şi C' fiind intersecţiile dreptelor AC şi AB cu paralelele din B şi C la MN şi MP.

Acesta este enunţul generalizat al problemei citate 481. Iată şi soluţia elementară a acestei generalizări.

Fie N' şi P' intersecţiile (CB_1, MN), $(BC_1\ MP)$ şi O intersecţia dreptei B_1C_1 cu paralela din N la CC_1. Punctele N' şi P' sînt evident, mijloacele segmentelor MN şi MP. În triunghiul B_1C_1C tăiat de $NO \parallel CC_1$, în triunghiul B_1CB tăiat de $N'M \parallel B_1B$ şi în triunghiul CBC_1 tăiat de $MP' \parallel CC_1$, avem:

$$\frac{C_1O}{OB_1} = \frac{CN'}{N'B_1} = \frac{CM}{MB} = \frac{C_1P'}{P'B}.$$

Primul şi ultimul raport arată că $OP' \parallel B_1B$, deci $ON'MP'$ este paralelogram şi prin urmare,

$$OP' \parallel = MN' = \tfrac{1}{2}\,MN \text{ şi } ON' \parallel = MP' = \tfrac{1}{2}\,MP,$$

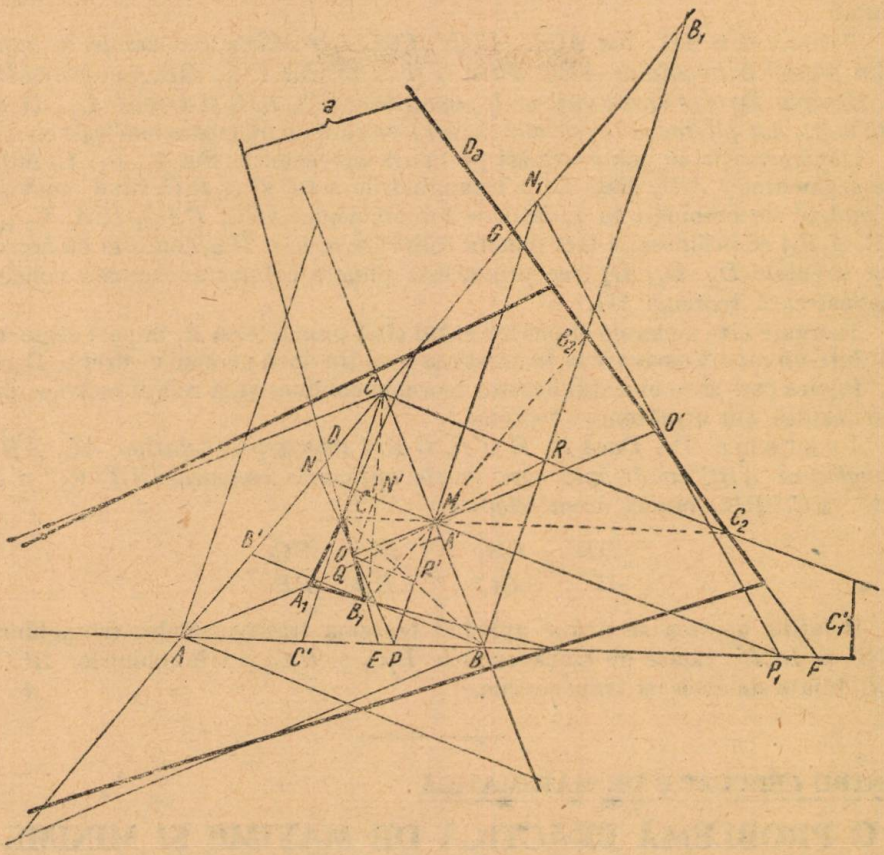
ceea ce arată că P, O, N sînt colineare şi că O de pe B_1C_1 este mijlocul lui PN. Prin urmare, *mijlocul segmentului PN se mişcă pe dreapta B_1C_1 cînd M se mişcă pe BC, prelungită la infinit.*

Această generalizare se poate extinde în felul următor: *locul geometric al punctelor O care împart segmentul NP într-un raport k, este format din două drepte B_iC_i care unesc punctele B_i, C_i ce împart segmentele CC', BB' în raportul k.*

Demonstrarea acestei generalizări se face urmînd cuvînt cu cuvînt, demonstrarea precedentă, numai că, de exemplu, N' în loc să fie mijlocul lui MN va fi unul din punctele care împart pe MN în raportul k.

Problema, fie cea particulară, fie cea generală, are o consecință imediată care se deduce din prelungirea unor linii ale figurii și pe care o enunțăm astfel, sub formă de teoremă:

Teorema I. — *Fie punctul M mobil pe latura BC prelungită la infinit, a triunghiului ABC. Paralelele din M la direcțiile fixe BB', CC' și CC_1', BB_1' întîlnesc laturile AC, AB ale triunghiului respectiv în N, P_1 și N_1, P. Punctul O, mijlocul segmentului NP, se află pe dreapta B_1C_1, iar O' mijlocul segmentului N_1P_1 se află pe dreapta C_2B_2 care unește mijloacele segmentelor CC_1', BB_1'.*



Demonstrarea pentru *O'* se face la fel ca cea pentru *O*. De asemenea, generalizarea este valabilă și pentru cele două puncte *O'* care împart segmentul C_2B_2 în raportul *k*.

Trăgînd pe desenul corespunzător acestei teoreme, dreptele B_1C_1, B_2C_2 am observat că ele par a se întîlni pe *BC*. Verificarea acestei bănueli m-a condus la o teoremă, care cred că este nouă:

Teorema II. — *Fie BB', CC' două ceviene în triunghiul ABC, și $CC_1' \parallel BB'$, $BB_1' \parallel CC'$. Dreptele B_1C_1 și B_2C_2 care unesc mijloacele celor două grupe de ceviene se întîlnesc într-un punct a pe latura BC.*

Fie *Q* și *R* intersecțiile (BB', CC') și (BB_1', CC_1'). Figura *BQCR* fiind un paralelogram, diagonala *QR* trece prin mijlocul *M* al laturei *BC*. Dar tot prin *M* trece și C_1C_2 care unește mijloacele laturilor CC', CC_1' în triunghiul $C'CC_1'$,

precum și B_1B_2 din triunghiul $B'BB_1'$. Triunghiurile B_1C_1Q și B_2C_2R avînd dreptele C_1C_2, B_1B_2, QR concurente în M sînt omologice și prin urmare, laturile lor omoloage (B_1Q, B_2R), (C_1Q, C_2R), (B_1C_1, B_2C_2) se întîlnesc în trei puncte coliniare dintre care primele două fiind B și C al treilea a se află tot pe BC.

Notă. — Dacă în loc de mijloacele (B_1, C_1), (B_2, C_2) se consideră cele două perechi de puncte care împart segmentele CC', BB' și CC_1', BB_1' în același raport k, se obțin două puncte a, a' pe BC.

Teorema II duce la o nouă teoremă foarte interesantă în geometria triunghiului.

Teorema III. *Fie AQA', BQB', CQC' trei ceviene concurente în punctul I din planul triunghiului ABC. Prin C și B se duc CC_1', BB_1' paralele cu BQ și CQ. Dreapta D_a care unește mijloacele segmentelor CC_1', BB_1' și dreptele D_b, D_c obținute la fel, dar plecînd de la celelalte vîrfuri formează un triunghiu omologic cu ABC.*

Demonstrația se poate urmări pe figura precedentă. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor AA', BB', CC'. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ fiind omologice, cu centrul de omologie în I, laturile lor omologice (BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1) și (AB, A_1B_1) se întîlnesc în trei puncte coliniare a, b, c. Dar conform cu teorema II și dreptele D_a, D_b, D_c trec prin aceste puncte coliniare. Această concluzie demonstrează teorema III.

Teorema este generală și pentru cazul cînd punctele ca A_1 împart segmentul AA' într-un raport oarecare k. În acest caz se obțin două perechi de drepte D_a, etc.

Figura care face obiectul acestor teoreme conduce și la relații metrice, după cum rezultă din următoarea teoremă.

Teorema IV. *Dacă D, E și F, G sînt intersecțiile laturilor AC, AB ale triunghiului ABC cu dreapta care unește mijloacele cevienelor BB', CC' și BB_1' $\| CC'$, $CC_1' \| BB'$, atunci avem relațiile:*

$$\frac{DB'}{DC} = \frac{GB_1'}{GC} \quad \text{și} \quad \frac{EC'}{EB} = \frac{FC_1'}{FB}.$$

Relațiile acestea se deduc aplicînd teorema transversalelor triunghiurilor BCB' și BCB_1' tăiate de transversalele B_1C_1 și B_2C_2 și triunghiurilor BCC' și BCC_1' tăiate de aceleași transversale.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

O PROBLEMĂ PRACTICĂ DE MAXIME ȘI MINIME REZOLVATĂ PE CALE GEOMETRICĂ

prof. **EUGEN ȚIMPOC**

școala medie « Mihail Sadoveanu », Iași

În revista « Matemativa v școle » nr. 4 din 1954, este propusă spre rezolvare problema nr. 36, cu următorul enunț:

« Dintr-un canal larg de a metri sub un unghi drept se trece într-un canal de lărgime b metri. Să se afle lungimea maximă a unei plute largă de c metri care transportînd lemne să nu se împotmolească la întorsătură ».

REZOLVAREA acestei probleme a apărut în nr. 1/1955 al respective reviste; tratarea maximului cerut s-a făcut prin considerații algebrice și trigonometrice cu ajutorul calculului derivatelor, depășind astfel, nivelul de

cunoştinţe al elevilor din cursul mediu. Problema m-a preocupat în mod deosebit cu atît mai mult, cu cît elevii fruntaşi din clasa X-a B, cetind revista « Matematica *v* şcole » n-au înţeles soluţia prin derivate, publicată în revistă. Impreună cu elevii fruntaşi *Mitelman Iosif* şi *Valache Alexandru*, am rezolvat problema numai prin consideraţii geometrice şi trigonometrice elementare accesibile tuturor elevilor din cl. X-a. Am prezentat soluţia găsită colegilor mei întruniţi în şedinţa pe secţiuni a consfătuirilor raionale din august a. c. Luînd parte la această şedinţă tov. conf. *A. Şaichin*, ca reprezentant al « Gazetei Matematice şi Fizice », d-sa m-a invitat să comunic soluţia problemei în G.M.F.—(B) pentru a fi cunoscută de cititorii ei. Iată această soluţie.

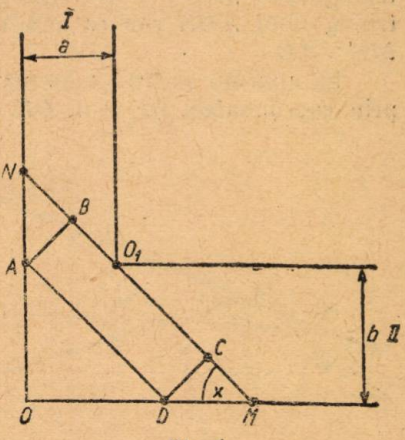


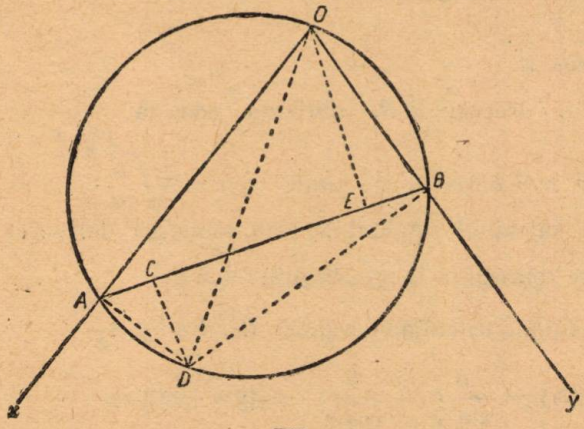
Fig. 1

Pentru a determina lungimea celei mai mari plute de lărgime *c*, care să poată trece din canalul *I* în canal *II*, va trebui să determinăm cea mai mare lungime a unei drepte *MN* care să poartă trece din calul *I* în canalul *II*, ceeace corespunde cu minimul dreptei ce se poate duce prin punctul *O* de coordonate *a*, *b* limitată de pereţii perpendiculari ai canalului.

Problema revine la un minim geometric rezolvat de Newton.

Fiind dat un unghi $\widehat{xoy}$ şi un punct *C* situat între laturile lui, să se găsească poziţia unei drepte ce trece prin *C* astfel ca segmentul *AB* determinat de laturile unghiului să fie minim.

Newton a demonstrat următoarea teoremă: dreapta cea mai scurtă ce se poate duce printr-un punct dat *C* situat în interiorul unghiului dat $\widehat{xoy}$ este definită prin condiţia ca perpendiculara *CD* la această dreaptă dusă prin *C* şi perpendicularele *AD* şi *BD* la laturile unghiului duse prin extremităţile dreptei *ABC* să se întîlnească în acelaşi punct.



Fi2. g

In poteza acestei teoreme, patrulaterul *AOBD* este inscriptibil avînd *OD* ca diametru, şi se demonstrează uşor că laturile opuse, *AD* şi *OB*, au proiecţiile *AC* şi *BE* egale (fig. 2).

Teorema aceasta conduce la următoarea teoremă: dreapta cea mai scurtă ce se poate duce printr-un punct *C* situat într-un unghi dat $\widehat{xoy}$ este dreapta *ACB* astfel ca segmentul *AC* să fie egal cu proiecţia *BE* a lui *OB*.

Demostraţie. — Prin punctul *C* se duce o altă dreaptă *MN*; să arătăm că $MN > AB$. Construcţie ajutătoare: $DC \perp AB$, $DC = OE$, $DF \perp MN$.

Figura $OADB$ este un paralelogram. Cum $BN \| AD$ triunghiurile ABD şi AND sînt echivalente. Paralela AG la DN este situată în interiorul unghiului $\widehat{MAD}$, căci DN este situată în interiorul unghiului egal ADB. Punctul G este situat între M şi D. Triunghiul AND este echivalent cu triunghiul GND, deci aria triunghiului $MND >$ aria triunghiului GND şi aria triunghiului $MND >$ aria triunghiului ADN sau ca aria triunghiului ABD. Cum $DF < DC$, rezultă că $MN > AB$.

Să aplicăm această teoremă problemei date. Pe fig. 4, punctul C este dat prin coordonatele $OF = a$, $OE = b$, iar $AD = BC$. Exprimînd în funcţie de

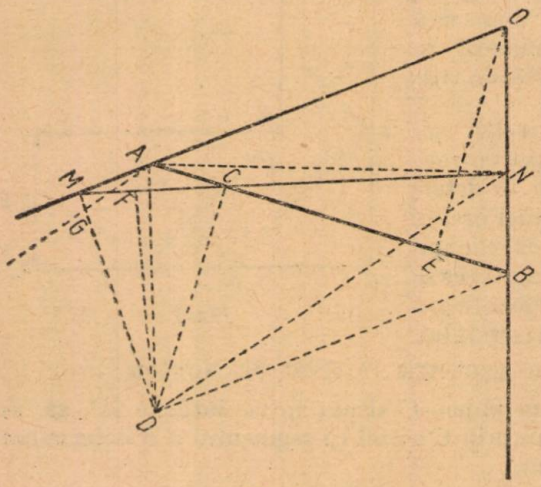


Fig. 3

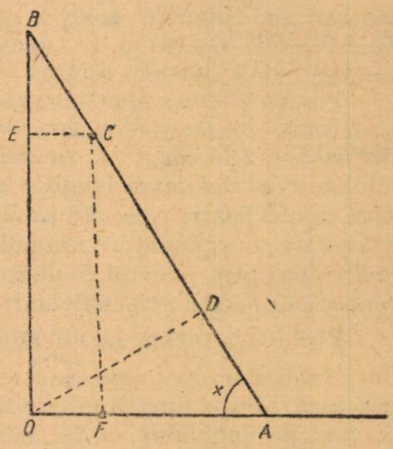


Fig. 4

unghiul $\widehat{BAO} = x$ obţinem $AF = b \operatorname{ctg} x$, $AO = a + b \operatorname{ctg} x$, $AD = (a + b \operatorname{ctg} x) \cos x$, $BC = \dfrac{a}{\cos x}$.

Scriind condiţia minimului dreptei AB, obţinem ecuaţia $\dfrac{a}{\cos x} = (a + b \operatorname{ctg} x) \cos x$ sau $a \sin^3 x = b \cos^3 x$, de unde $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$.

Acelaşi rezultat se obţine calculînd unghiul x prin anularea derivatei funcţiei $l = \dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{\sin x}$ care reprezintă lungimea dreptei AB.

Restul problemei se rezolvă simplu calculînd lungimea BC din fig. 1.

$$BC = MN - (CM + BN) = \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} - c(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$$

Calculăm pe $\sin x$ şi $\cos x$ în funcţie de x şi b:

$$\sin x = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}, \quad \cos x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}}.$$

Obţinem:

$$BC = \frac{a\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{b}} + \frac{b\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[3]{a}} - c\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right).$$

Dacă $a = b$ şi $x = 45°$, $BC = 2(\sqrt{2a} - c)$.

Problema aceasta este analoagă cu următoarea: un turn circular are diametru a metri şi o uşă înaltă de b metri. Să se calculeze lungimea celei mai mari scări ce se poate introduce în turn.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII
MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

MONTAJ PENTRU DETERMINAREA DISTANŢEI FOCALE LA O LENTILĂ DIVERGENTĂ

N. RĂDULESCU,
Prof. ş. m. b. nr. 1, Bucureşti

LENTILA divergentă transformă fasciculul incident de raze, paralele între ele şi paralele cu axul principal al lentilei, în fascicul de raze divergente,

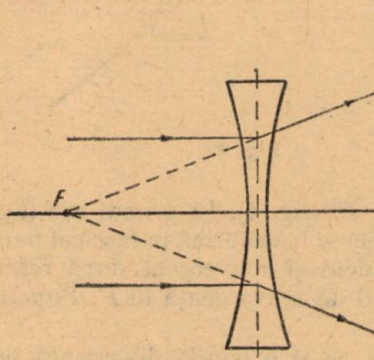


Fig. 1

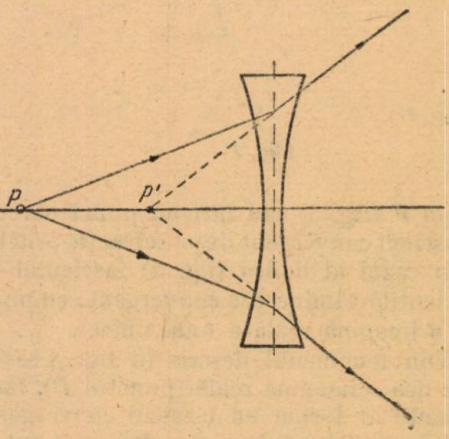


Fig. 2

iar prelungirile înapoi ale acestor raze divergente se vor întîlni într-un punct F aşezat pe axul principal numit focarul principal virtual al lentilei (fig. 1). Distanţa de la focarul principal F la lentilă se numeşte după cum se ştie, distanţă focală şi o notăm cu f. Dacă fasciculul incident nu vine de la infinit, adică razele nu sînt paralele, ci vin dintr-un punct luminos P aşezat pe axul principal al lentilei şi apropiat de lentilă (fig. 2), atunci fasciculul divergent după refracţie în lentilă la intrare şi apoi la eşire devine mai mult divergent, de

unde rezultă că prelungirile fasciculului emergent înapoi vor întîlni axul principal într-un punct P', care va fi mai aproape de lentilă decît focarul F (fig. 1)

In acest caz, punctul P' este o imagină virtuală a unui obiect real (P) ca şi focarul F, care după cum se ştie, este imaginea virtuală a obiectului aşezat la infinit (spre exemplu, soarele).

Formula fundamentală stabilită în cazul lentilelor convergente este valabilă şi pentru lentilele divergente, cu singura deosebire că distanţa focală şi distanţa de la imagine la lentilă p', pentru motivul că F şi P' sînt vîrtuali, se iau negative; în acest caz formula lentilei divergente devine:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f}.$$

Presupunem acum că mersul razelor de lumină ar fi în sens invers, adică fasciculul de raze de lumină este convergent, avînd punctul de convergenţă în focarul

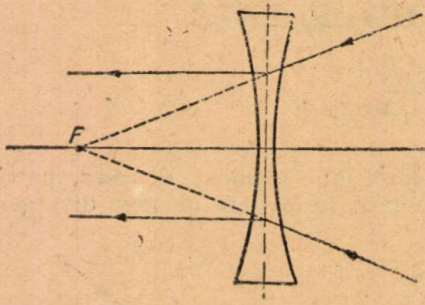


Fig. 3

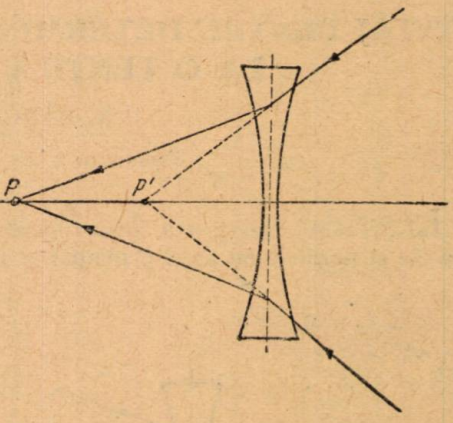


Fig. 4

virtual F (fig. 3) sau într-un punct oarecare P' (fig. 4). In primul caz (fig. 3) un fascicul convergent după refracţie prin lentilă se transformă în fascicul paralel, iar în cazul al doilea (fig. 4) fasciculul incident şi convergent, după refracţie prin lentilă rămîne tot convergent, cu punctul de convergenţă în P. Punctul P este o imagină reală a unui obiect.

Din fenomenul descris în fig. 4 se vede că şi o lentilă divergentă poate să ne dea o imagină reală (punctul P), însă numai atunci cînd razele de lumină incidente ar forma un fascicul convergent cu punctul de convergenţă (vîrful) în P', aşezat după cum s-a spus mai sus între lentilă şi focarul său virtual, şi deci *putem numi punctul P' obiect virtual a cărei imagină reală este punctul P.*

Pe baza celor arătate mai sus putem, folosind o lentilă convergentă, să determinăm distanţa focală la o lentilă divergentă procedînd astfel.

Pe o riglă gradată adaptăm 4 cursori de lemn, astfel ca aceştia să poată aluneca pe ea. Pe cursori se fixează o lampă electrică, o lentilă convergentă, o lentilă divergentă şi un paravan. Aparatul astfel construit constituie aşa numitul banc optic pe care obişnuit îl găsim în laboratoare (fig. 5).

Prindem pe paravan imaginea mică a lămpii dată de lentila convergentă şi fie această imagină I. Citim pe banc dinstanţa « a » de la izvorul luminos S

la imaginea I formată pe paravanul P. Așezăm între lentila convergentă și paravanul P (imaginea I) lentila divergentă căreia dorim să-i determinăm distanța focală. În acest caz imaginea I devine imediat confuză.

Mișcăm apoi, paravanul P depărtîndu-l de lentila divergentă pînă ce pe el prindem din nou imaginea clară a izvorului luminos S, și fie această nouă imagină I'.

Conform celor spuse, noua imagină I' nu este altceva decît imaginea reală produsă de lentila divergentă luînd ca obiect virtual imaginea I (imaginea reală dată de lentila convergentă). Măsurăm distanța de la izvorul luminos la lentila

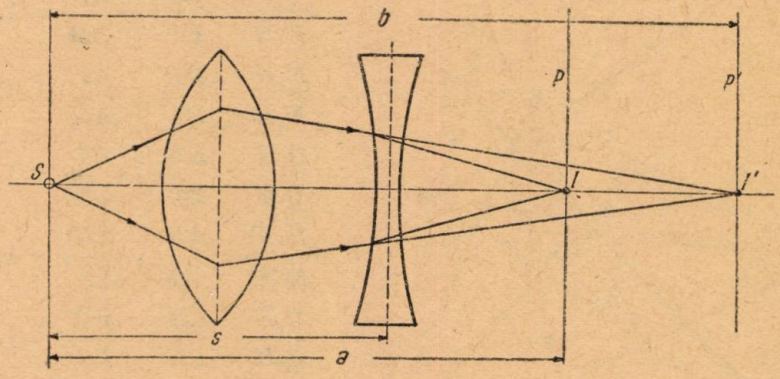


Fig. 5

divergentă (o citim pe banc) și o notăm cu « s ». Măsurăm distanța de la izvorul luminos la imaginea I' și o notăm cu « b ». Distanța de la I la lentila divergentă o notăm cu « p ». Din figură se vede că $p = (a - s)$. Distanța de la I' la lentila divergentă, o notăm cu « p' » și din figură se vede că $p' = (b - s)$. Înlocuind aceste valori în formula lentilei divergente vom avea:

$$\frac{1}{a-s} - \frac{1}{b-s} = -\frac{1}{f},$$

relație din care deducem că $f = \dfrac{(a-s)(b-s)}{a-b}$.

NOTE MATEMATICE

7. Generalizarea problemei 1712

Pe diagonala AC a unui patrulater complet ABCDEF sau pe prelungirile ei, se ia un punct oarecare H. Latura AB taie dreptele HD, HF în punctele M_1, M_2; DA pe HB, HE în N_1, N_2; BC pe HD, HE în P_1, P_2; CD pe HB, HF în Q_1, Q_2. Să se arate că dreptele M_1N_1, P_1Q_1, M_2N_2, P_2Q_2 trec prin intersecția L a diagonalelor BD, EF.

* * *

Soluție. Fie I, K intersecțiile diagonalei AC cu diagonalele BD, EF. Conform teoremei lui Menelaus, în:

triunghiul DHI cu transversalele AB, BC;
triunghiul DHI » » DA, CD;
triunghiul FHK » » AB, CD;
triunghiul EHK » » DA, BC, avem:

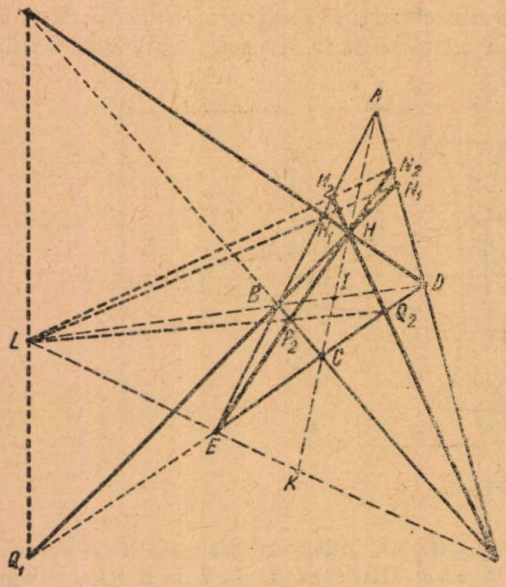


Fig. 1

$$\frac{M_1D}{M_1H}\cdot\frac{AH}{AI}\cdot\frac{BI}{BD}=1, \quad (1)$$

$$\frac{P_1D}{P_1H}\cdot\frac{CH}{CI}\cdot\frac{BI}{BD}=1, \quad (2)$$

$$\frac{N_1H}{N_1B}\cdot\frac{DB}{DI}\cdot\frac{AI}{AH}=1, \quad (3)$$

$$\frac{Q_1H}{Q_1B}\cdot\frac{DB}{DI}\cdot\frac{CI}{CH}=1, \quad (4)$$

$$\frac{M_2F}{M_2H}\cdot\frac{AH}{AK}\cdot\frac{EK}{EF}=1, \quad (5)$$

$$\frac{Q_2F}{Q_2H}\cdot\frac{CH}{CK}\cdot\frac{EK}{EF}=1, \quad (6)$$

$$\frac{E_2N}{N_2H}\cdot\frac{FE}{FK}\cdot\frac{AK}{HN}=1, \quad (7)$$

$$\frac{P_2H}{P_2E}\cdot\frac{FE}{FK}\cdot\frac{CK}{CH}=1. \quad (8)$$

Înmulțind (1) cu (3), (2) cu (4), (5) cu (7), (6) cu (8) și ținînd seama că

$$\frac{BI}{DI}=\frac{LB}{LD} \quad \text{și} \quad \frac{EK}{FK}=\frac{LE}{LF},$$

întrucît într-un patrulater complet două diagonale divid armonic pe a treia, obținem:

$$\frac{M_1D}{M_1H}\cdot\frac{N_1H}{N_1B}\cdot\frac{LB}{LD}=1; \quad \frac{P_1D}{P_1H}\cdot\frac{Q_1H}{Q_1B}\cdot\frac{LB}{LD}=1;$$

$$\frac{M_2F}{M_2H}\cdot\frac{N_2H}{N_2E}\cdot\frac{LE}{LF}=1; \quad \frac{Q_2F}{Q_2H}\cdot\frac{P_2H}{P_2E}\cdot\frac{LE}{LF}=1;$$

ceeace ne arată, confom reciprocei teoremei lui Menelaus, că dreptele M_1N_1, P_1Q_1, M_2N_2, P_2Q_2 trec prin punctul L.

8. Generalizarea problemei 1768

Pe laturile BC, AC ale unui triunghi oarecare ABC sau pe prelungirile lor, se consideră respectiv punctele M, N. Paralela dusă prin N la BC întîlnește pe AB în D, iar paralela dusă tot prin N la AM întîlnește pe BC în E. Dreptele AM, DE se întîlnesc în L.

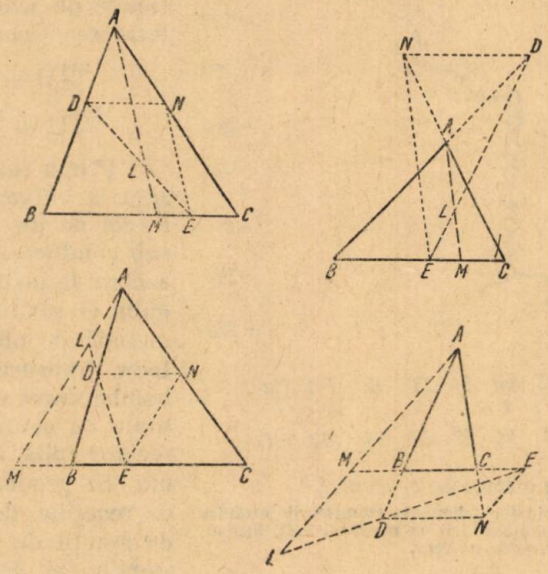
Se notează: $\frac{BM}{MC} = m$ *și* $\frac{AN}{NC} = n$. *Să se stabilească relația:*

$$\frac{AL}{LM} = m + n + mn,$$

în care m și n sînt pozitive sau negative după cum segmentele BM, MC respectiv AN, NC au același sens sau sensuri diferite.

* * *

Soluție. În virtutea teoremei lui Menelaus, în triunghiul ABM tăiat de transversala DE, avem:



$$\frac{LA}{LM} \cdot \frac{EM}{EB} \cdot \frac{DB}{DA} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{AL}{LM} = \frac{BE}{ME} \cdot \frac{AD}{DB}. \tag{1}$$

Apoi:

$$\frac{BE}{ME} = \frac{BM + ME}{ME} = m \cdot \frac{MC}{ME} + 1 = m \cdot \frac{AC}{AN} + 1 = m \cdot \frac{AN + NC}{AN} + 1 =$$

$$= m\left(1 + \frac{NC}{AN}\right) + 1 = m\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = m + \frac{m}{n} + 1$$

și

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NC} = n.$$

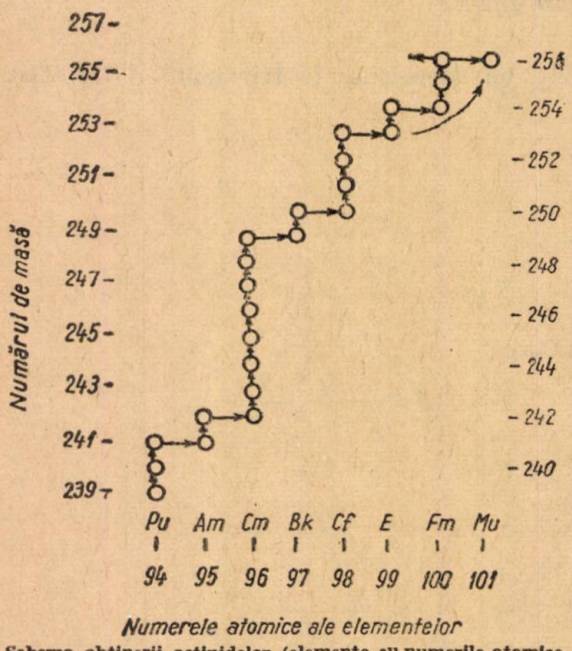
Înlocuim în (1):

$$\frac{AL}{LM} = \left(m + \frac{m}{n} + 1\right) n = m + n + mn.$$

Dan C. Panu, Galați

1. Despre elementul nr. 101 — mendeleviu

La începutul anului 1954 au fost publicate mai multe comunicări despre obținerea artificială a două noi elemente transuraniene, care ocupă locurile 99 și 100 în tabloul lui D. I. Mendeleev. Aceste elemente au căpătat numirea de einsteiniu E și fermiu Fm (în onoarea lui Einstein și Fermi)*) și au fost obținute bombardînd o țintă de uraniu cu nuclee rapide de azot și oxigen conform reacțiilor:



Schema obținerii actinidelor (elemente cu numerile atomice 89—103) prin metoda bombardării cu neutroni lenți într-un reactor nuclear.

$$^{238}_{92}U + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}_{99}E;$$

$$^{238}_{92}U + {}^{16}_{8}O \rightarrow {}_{100}Fm.$$

Prima reacție a fost realizată la universitatea din California de un grup de savanți sub conducerea lui Seaborg, iar a doua la institutul din Stockholm de savanți suedezi. O altă metodă de obținere a elementelor transuraniene constă în bombardarea unei ținte de plutoniu cu neutroni lenți într-un reactor (pilă atomică) cu uraniu. Se produc atunci (în afară de reacțiile de fisiune) un șir de reacții de absorbție a neutronului și de dezintegrare β^- (emisie a electronului), obținîndu-se elementele transuraniene:

$$^{239}_{94}Pu + n \rightarrow {}^{240}_{94}Pu + \gamma \text{ (radiație } \gamma),$$

$$^{240}_{94}Pu + n \rightarrow {}^{241}_{94}Pu + \gamma; \quad {}^{241}_{94}Pu \rightarrow {}^{241}_{95}Am \text{ (americiu)} + e^- \text{ (electron)}$$

[cînd un nucleu se dezintegrează emițînd un electron (particulă β^-), sarcina lui crește cu o unitate (conservarea sarcinii)],

$$^{241}_{95}Am + n \rightarrow {}^{242}_{95}Am \rightarrow {}^{242}_{96}Cm \text{ (curiu)} + e^-.$$

Pentru a mări probabilitatea acestor reacții (captura neutronului) trebuie mărită intensitatea fluxului de neutroni, de aceea ele se fac în reactori nucleari, unde fluxurile de electroni pot atinge 10^{14} neutroni/cm². s. Mai departe, acest tip de reacții se poate urmări după figură; transformările după linia verticală corespund captării neutronului, deci obținerii unui izotop: transformările după linia orizontală, corespund dezintegrării β^- (emisia unui electron), deci obținerii elementului următor (sarcina nucleului crește cu o unitate).

*) Elementul 99 a fost numit inițial ateneu, iar elementul 100, centuriu.

In acest mod, din curiu (Cm) se obţine berckeliu (Bk), apoi californiu (Cf), einsteiniu (E) şi fermiu (Fm). Elementele de la 89 (actiniu) la 103 formează grupul actinidelor (15 elemente), analog prin proprietăţile lui chimice cu grupul lantanidelor, de la 57 (lantan) la 71 (luteţiu) (15 elemente).

57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tu	Yb	Lu
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101		
Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	E	Fm	Mv		

Incercarea de a obţine din Fm prin bombardare cu neutroni elemente cu numere atomice mai mari a întîmpinat o dificultate neaşteptată. Izotopul ^{256}Fm are o mare probabilitate de fisiune spontană şi nu are loc o dezintegrare β a acestui izotop, astfel încît obţinerea izotopului ^{256}101 prin bombardare cu neutroni este practic imposibilă. De aceea a fost elaborată o nouă metodă originală (de grupul lui Seaborg) şi anume, s-au bombardat nuclee de ^{253}E într-un ciclotron cu particule α (nuclee de heliu) de o energie de 41 MeV. O mică parte din particulele α intră în reacţia:

$$^{253}_{99}\mathrm{E} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{256}101 + \mathrm{n} \quad \text{(neutron)}.$$

Numai datorită sensibilităţii mari a metodei elaborate, efectuării rapide a operaţiilor chimice şi prezicerii corecte a proprietăţilor chimice ale elementului 101 pe baza tabelei lui Mendeleev, a putut fi identificat cu certitudine un izotop al acestui element. În cinstea lui D. I. Mendeleev autorii au propus denumirea de mendeleviu (Mv) pentru acest element. Prin captarea unui electron el trece în Fm.

$$^{256}\mathrm{Mv} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow {}^{256}_{100}\mathrm{Fm}$$

(timpul de înjumătăţire: 0, 5 ore). Nu s-au obţinut decît 17 nuclee ale atomilor acestui element.

Astăzi se fac încercări de a obţine elementele 102 şi 103, ultimele din grupul actinidelor.

(după «Priroda», 11, 1955)

2. Anul geofizic internaţional

Cele mai variate procese geofizice care se produc pe Pămînt sînt interdependente şi cuprind de obicei, întreaga noastră planetă. Aceste procese sînt condiţionate în mare parte de activitatea solară. Pentru a coordona şi îmbunătăţi vechile legi geofizice şi a descoperi noi legi geofizice, este necesară o muncă coordonată a învăţaţilor din toate părţile globului pămîntesc. Numai prin colaborarea ştiinţifică internaţională în studiul Pămîntului nostru se pot obţine progrese însemnate în diferite domenii ale geofizicii Pămîntului.

Această necesitate a fost sezisată mai de mult. Astfel, Congresul Meteorologic Internaţional (Roma, 1877) a hotărît realizarea primului an internaţional pentru problemele polare (1882—1883), la care au luat parte 12 ţări, fixîndu-se un program obligator pentru toate staţiile (rezultatele observaţiilor au fost publicate în 36 volume).

Un al doilea an internațional pentru problemele polare a avut loc între 1932 și 1933 și s-a desfășurat pe baza unui program mult mai vast decît primul. La aceste cercetări a luat o parte activă U.R.S.S. (cu 92 stații). Cercetările din timpul celui de-al doilea an internațional au dat noi rezultate științifice esențiale privind procesele geofizice din regiunea polară. Experiența celui de-al doilea an internațional a arătat cît de mare este importanța colaborării internaționale în organizarea cercetărilor geofizice, efectuate în mod sincronic după un program unic.

De aceea a apărut în mod firesc, necesitatea unui al treilea an geofizic, organizîndu-se pentru aceasta (1951) un Comitet Special pentru Anul Geofizic Internațional (CSAGI). În afară de studiul regiunilor polare s-a fixat și studiul regiunilor ecuatoriale, de aceea noua organizare a cercetărilor s-a numit An Geofizic Internațional (AGI). El este fixat pentru 18 luni (1 iulie 1957—31 decembrie 1958). Această perioadă corespunde activității solare maxime (cel de-al doilea An Geofizic Internațional a avut loc în condițiile minimului activității solare). Amploarea cercetărilor științifice fixate pentru AGI este mult mai mare decît altădată, atît prin teritoriu, cît și prin volumul și metodele cercetărilor geofizice. Rezultatele acestor observații vor permite rezolvarea unor importante probleme geofizice (în special, Antarctica și regiunile ecuatoriale). În afară de observații standard, se fixează anumite intervale de observații intense (3 zile speciale pe lună ; zile speciale legate de fenomene geofizice ca eclipsele de soare și ploile de meteoriți ; cîte 10 zile meteorologice la fiecare 3 luni).

Domeniile principale ale cercetărilor geofizice din AGI vor fi: meteorologia, fizica ionosferei, geomagnetism, aurore boreale, luminozitatea cerului în timpul nopții și razele cosmice. De asemenea, se vor face observații privind soarele, oceanografia, glaciologia, seismologia și gravimetria. Se vor folosi cele mai perfecționate metode și aparate, metode telemetrice de observație (legătura prin radio), aparate cu înregistrare automată, cercetări cu rachete ce se vor putea ridica la o altitudine de peste 100 km. De asemenea, se pregătește lansarea unui satelit artificial al Pămîntului, prevăzut cu aparate de măsură, care vor transmite automat informații pe Pămînt.

Îndeplinirea programului propus va depinde de activitatea pe care o vor depune toate țările participante la această organizare internațională, foarte amplă, a cercetărilor. De pe acum se poate spune că rezultatele AGI vor fi excepțional de importante, atît pentru geofizica teoretică, cît și pentru cea practică.

(După « Priroda », 12, 1955)

3. Televiziunea submarină

Cercetările din ultimul timp au arătat că televiziunea submarină deschide perspective pentru cunoașterea adîncimilor.

Televiziunea submarină ușurează mult descoperirea epavelor, stabilirea poziției lor pe fundul mărilor, îngăduind executarea lucrărilor de ridicare la suprafață. Datorită televiziunii submarine se pot efectua observații amănunțite, de lungă durată, la adîncimi unde staționarea îndelungată a scafandrilor este imposibilă. Televiziunea submarină permite efectuarea lucrărilor de reparație în părțile submarine ale navelor, examinarea de revizie a digurilor și a altor construcții hidrotehnice.

Un alt domeniu important de aplicare a televiziunii submarine este stabilirea structurii geologice a fundului marin şi observarea faunei marine.

Instalaţiile de televiziune submarine se bazează pe aceleaşi principii ca şi instalaţiile obişnuite, însă datorită condiţiilor specifice şi construcţia lor implică anumite particularităţi.

Astfel, datorită absorbţiei mai mari a luminii în apă decît în aer, tubul catodic este mult mai sensibil.

Laboratorul de electronică marină al Institutului de oceanologie al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. a construit cîteva tipuri de instalaţii de televiziune submarină. Unele din aceste tipuri folosesc iluminarea în ultraviolet, care prezintă avantajul că permite observarea peştilor fără a-i speria, spre deosebire de iluminatul cu lumină vizibilă.

Rezultatele favorabile obţinute justifică presupunerea că într-un viitor destul de apropiat, instalaţiile de televiziune submarină vor constitui un mijloc obişnuit de explorare submarină.

(După Vestnik Akademii Nauk SSSR, nr. 11/1955)

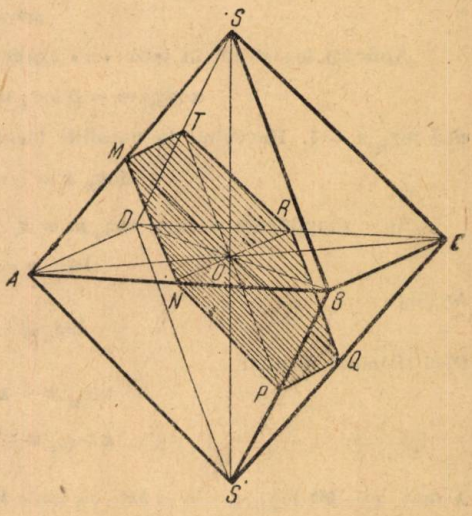
PROBLEME REZOLVATE

Problema 1503

Se consideră corpul format din două piramide cu baza comună patrată şi feţele triunghiuri echilaterale.

a) *Să se arate că acest corp este un poliedru regulat.*

b) *Prin mijlocul uneia din muchiile corpului se duce un plan paralel cu una din feţele ce au un vîrf (şi numai unul) comun cu acea muchie. Ce formă are poligonul de secţiune obţinut?*



Soluţie. a) Fie $SABCD$ şi $S'ABCD$ cele două piramide cu această bază comună patratul $ABCD$ care corespund problemei.

Poliedrul format $SABCDS'$ are evident toate muchiile egale şi toate feţele egale (triunghiuri echilaterale). Pentru a arăta că acest poliedru este regulat, trebuie să arătăm că el are şi unghiurile egale (atît cele diedre, cît şi cele triedre şi tetraedre), dar e suficient să demonstrăm că planele secţionale diagonale (ce unesc două muchii opuse, de exemplu, SA şi $S'C$) sînt egale între ele. Un astfel de plan ($SAS'C$, de exemplu) este un romb căci are laturile egale ($SA = AS' = S'C = CS$), iar diagonalele perpendiculare ($AC \perp SS'$). Dar, datorită faptului că $AC = AB \cdot \sqrt{2} = AS \cdot \sqrt{2}$, iar $AC^2 = AS^2 + SC^2 = 2 \cdot AS^2$, triunghiul ASC fiind dreptunghic isoscel, $SA \perp SC$, rezultă că rombul $SAS'C$ este un patrat egal cu patratul $ABCD$ (patratele $SAS'C$ şi $ABCD$ au diagonala AC comună). Analog, rombul $SBS'D$ este un patrat egal cu patratul $ABCD$. Deci secţiunile diagonale $ABCD$, $SAS'C$, $SBS'D$ fiind egale, poliedrul $SABCDS'$ este un poliedru regulat.

b) Luăm punctul M în mijlocul muchiei SA. Ducînd prin M planul paralel cu fețele paralele SBC și $S'AD$ care n-au decît un singur punct comun cu muchia SA se obține secțiunea $MNPQRT$, unde punctele N, P, Q, R, T sînt chiar mijloacele muchiilor AB, $S'B$, $S'C'$, CD, SD.

Considerînd piramida $ASBC$, secțiunea MNO e paralelă cu fața SBC și deci asemenea cu ea, iar prin faptul că M, N, O sînt mijloacele lui SA, AB, AC, triunghiul MNO este un sfert din triunghiul echilateral SBC.

$$\frac{S(MNO)}{S(SBC)} = \left(\frac{AM}{AS}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Deci triunghiul MNO este echilateral și egal cu un sfert din triunghiul SBC.

Analog, triunghiurile NPO, PQO, QRO, RTO, TMO sînt echilaterale și egale cu un sfert din fețele egale ADS', SBC. Deci, toate triunghiurile formate prin unirea punctelor M, N, P, Q, R, T între ele și apoi, pe fiecare cu punctul O, sînt echilaterale și egale. Înseamnă că figura $MNPQRT$ de secțiune este un exagon regulat avînd toate laturile egale și vîrfurile egal depărtate de punctul O.

Analog se întîmplă cu secțiunile analoage lui M, duse prin mijloacele celorlalte muchii. Au dat soluții bune: **I. I. Cristea** (Constanța), **D. Donescu** (Focșani) și **I. Soreseu** (Pitești)

Problema 1550

Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\log_m x + \log_n y = a,$$

$$\log_n x + \log_m y = b.$$

Simon St. Petre

Soluție. Notăm: $\log_m x = \alpha$ și $\log_n x = \beta$. Deci: $x = m^\alpha$ și $x = n^\beta$, de unde:

$$m^\alpha = n^\beta.$$

Aplicăm logaritmii în baza «n» egalității de mai sus:

$$\alpha \log_n m = \beta \log_n n, \text{ adică } \alpha \log_n m = \beta,$$

căci $\log_n n = 1$. Revenind la notațiile făcute, obținem:

$$\log_n x = \log_n m \cdot \log_m x.$$

Spre simplificare notăm: $\log_n m = k$, $\log_n m$ fiind un număr cunoscut. Deci avem:

$$\log_n x = k \log_m x.$$

Analog:

$$\log_n y = k \log_m y.$$

Deci sistemul devine:

$$\log_m x + k \log_m y = a,$$

$$k \log_m x + \log_m y = b.$$

Avem: $(1-k^2) \log_m x = a - bk$, de unde $\log_m x = \dfrac{a-bk}{1-k^2}$. Deci:

$$x = m^{\frac{a-bk}{1-k^2}}$$

și:

$$(1 - k^2) \log_m y = b - ak,$$

de unde:

$$\log_m y = \frac{b - ak}{1 - k^2}.$$

Deci:

$$J = m^{\frac{b-ak}{1-k^2}}, \text{ unde } k = \log_n m.$$

Soluţii bune au dat **I. I. Cristea** şi **Corneliu Ţurlea**.

Problema 1583

Să se demonstreze că

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

* * *

se împarte exact cu 26460.

Soluţie. Dacă 3 numere a, b, c satisfac relaţia $ab = Mc$, atunci, ţinînd seamă de formula binomului lui Newton, avem $(a + c)^m - (a + b)^m + b^m = Mc$. Dacă luăm: $a = 735$; $b = 10152$; $c = 26460$ şi $m = 8$ obţinem:

$$(735 + 26460)^8 - (735 + 10152)^8 + 10152^8 = M\,26460$$

sau

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8 = M\,26460.$$

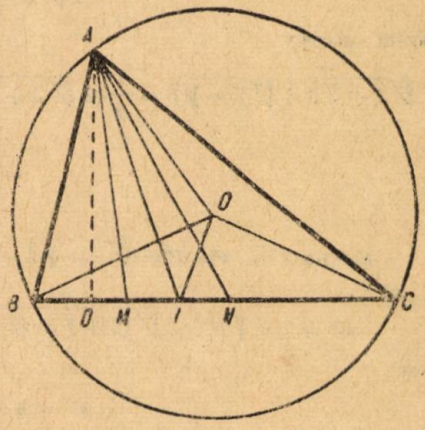
Problema 1593

Se dă un triunghi ABC. Cevienele AM şi AN împart unghiul A în trei părţi egale. Fie R şi R' cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor ABC şi AMN şi fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar I mijlocul segmentului MN. Să se stabilească relaţiile:

$$\frac{R}{R'} = \frac{BM \cdot CN}{MN^2},$$

$$MN\,(AB^2 + AC^2) + 2\,(AC^2 \cdot MB + AB^2 \cdot NC) = 2BC\,(R^2 + AI^2 - OI^2).$$

Nicolae Ţiţa, student, Bucureşti



Soluţie dată de **D. Donescu** Focşani. Aplicînd teorema bisectoarei interioare în triunghiul ABN, avem:

$$\frac{MB}{MN} = \frac{BA}{AN}. \qquad (1)$$

Analog în triunghiul AMC:

$$\frac{NC}{MN} = \frac{AC}{MA}. \qquad (2)$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2) şi ţinînd seamă că $BA \cdot AC = 2R \cdot AD$ şi $AM \cdot AN = 2R' \cdot AD$, unde AD este înălţimea din A pe BC, obţinem prima relaţie:

$$\frac{BM \cdot NC}{MN^2} = \frac{BA \cdot AC}{AN \cdot MA} = \frac{2R \cdot AD}{2R'AD} = \frac{R}{R'}.$$

Aplicînd relaţia lui Stewart în triunghiul ABC, considerînd ceviana AI, avem:

$$AB^2 \cdot IC + AC^2 \cdot IB = AI^2 \cdot BC + IB \cdot IC \cdot BC$$

sau

$$AB^2 \left(\frac{MN}{2} + NC\right) + AC^2 \left(\frac{MN}{2} + MB\right) = BC\,(AI^2 + IB \cdot IC)$$

sau

$$\frac{MN}{2}\,(AB^2 + AC^2) + (AC^2 \cdot MB + AB^2 \cdot NC) = BC\,(AI^2 + IB \cdot IC). \qquad (3)$$

Considerînd ceviana OI şi aplicînd relaţia lui Stewart în triunghiul OBC, obţinem:

$$OB^2 \cdot IC + OC^2 \cdot IB = OI^2 \cdot BC + IB \cdot IC \cdot BC$$

sau, deoarece $OB = OC = R$; $IC + IB = BC$, $R^2 = OI^2 + IB \cdot IC$, de unde $IB \cdot IC = R^2 - OI^2$ şi substituind în (3), obţinem relaţia a doua:

$$MN\,(AB^2 + AC^2) + 2\,(AC^2 \cdot MB + AB^2 \cdot NC) = 2BC\,(R^2 + AI^2 - OI^2).$$

Problema 1602

Să se verifice egalitatea:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1.$$

Gh. Stoian, Tîrgovişte

Soluţia I-a. Cum

$$2\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}} = \sqrt[3]{8\,(2 \pm \sqrt{5})} = \sqrt[3]{1 \pm 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5^2} \pm 5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1 \pm \sqrt{5})^3};$$

$$2\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}} = 1 \pm \sqrt{5},$$

avem succesiv

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = \frac{1}{2}\,(2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + 2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}) = \frac{1}{2}\,[(1 + \sqrt{5}) + (1 - \sqrt{5})] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(2) = 1.$$

Soluţia II-a. Fie $E = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$. Ridicînd la cub obţinem:

$$E^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})\,(2 - \sqrt{5})}\,(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}) + 2 - \sqrt{5}$$

sau:

$$E^3 = 4 + 3\sqrt[3]{4 - 5}\;(E),$$

$$E^3 + 3E - 4 = 0,$$

sau:

$$(E - 1)\,(E^2 + E + 4) = 0.$$

de unde $E - 1 = 0$; $E = 1$ (cealaltă paranteză dă rădăcini imaginare).

Problema 1606

Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}+\frac{x-c}{x+c}=3$$

și să se arate că oricare ar fi a, b, c numere reale și rădăcinile sînt tot reale.

Ion Cristea, elev, Constanța

Soluție dată de **D. Donescu** (Focșani). — Ecuația se mai scrie:

$$(x-a)(x+b)(x+c)+(x+a)(x-b)(x+c)+(x+a)(x+b)(x-c)=$$
$$=3(x+a)(x+b)(x+c)$$

sau efectuînd înmulțirile și reducînd termenii asemenea:

$$2(a+b+c)x^2+4(ab+bc+ca)x+6abc=0$$

sau:

$$(a+b+c)x^2+2(ab+bc+ca)x+3abc=0,$$

deci:

$$x=-(ab+bc+ca)\pm\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)}.$$

Pentru a arăta că dacă a, b, c sînt numere reale atunci și rădăcinile ecuației din enunț sînt tot reale, trebuie să avem:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$$

sau:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2. \tag{1}$$

Să considerăm cunoscută inegalitatea:

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx \tag{2}$$

(a se vedea de exemplu, R.M.F. vol. 1—V, pag. 21) și dacă substituim în (2) pe $x=ab$, $y=bc$, $z=ca$ obținem inegalitatea (1).

Observare. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, inegalitatea (1) devine:

$$2p\leqslant\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}. \tag{3}$$

Substituind în (3) $ab=\dfrac{2S}{\sin c}=\dfrac{4RS}{c}$, . . . obținem altă inegalitate.

Problema 1624

Cercul înscris într-un triunghi oarecare ABC atinge laturile BC, AC, AB respectiv în A'', B'', C''. Să se stabilească relația:

$$\frac{c''}{b''h_b''}+\frac{b''}{c''h_c''}=\frac{1}{h_a''}.$$

D. C. Panu

Soluție. Din A'' coborîm perpendicularele $A''M$ pe AC și $A''N$ pe AB; avem:

$$\frac{A''M}{h_b''}=\frac{A''C}{a''}\quad\text{și}\quad\frac{A''N}{h_c''}=\frac{BA''}{a''}.$$

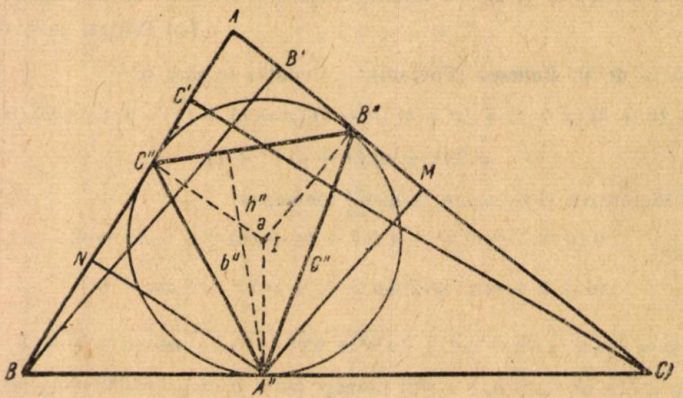
Adunînd obținem:

$$\frac{A''M}{h_b''}+\frac{A''N}{h_c''}=1. \tag{1}$$

Distanța de la un punct al unui cerc la punctul de contact al unei tangente fixe este medie proporțională între diametrul cercului și distanța de la punctul considerat la tangenta fixă.

Astfel, considerînd punctul A'' de pe cercul înscris $I(r)$ și tangenta AC, avem:

$$c''^2 = 2r \cdot A''M. \tag{2}$$



Produsul a 2 laturi dintr-un triunghi este egal cu produsul dintre diametrul cercului circumscris și înălțimea ce cade pe latura a 3-a:

$$b''c'' = 2r \cdot h_a''. \tag{3}$$

Din (2) și (3) obținem:

$$A''M = \frac{c''h_a''}{b''}.$$

În mod analog:

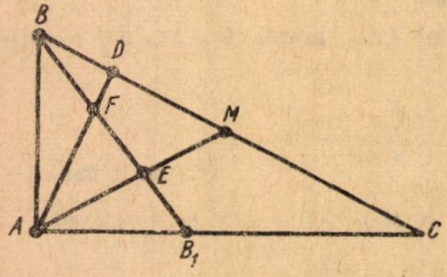
$$A''N = \frac{b''h_a''}{c''}.$$

Înlocuind în (1) obținem relația din enunț.

Problema 1628

Bisectoarea unghiului B a unui triunghi ABC dreptunghic în A întîlnește respectiv înălțimea AD și mediana AM în F și E. Să se stabilească relația $AE \cdot AF = 2\,EM \cdot DF$.

I. A. Rus, elev, Oradea



Soluția I-a. Din triunghiurile ABM și ABD, aplicînd teorema bisectoarei, obținem respectiv:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AE}{EM} \quad \text{și} \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AF}{FD}.$$

Înmulțind aceste relații și ținînd seama că $BC = 2\,BM$ și din triunghiul dreptunghic ABC, $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$, obținem relația din enunț $\overline{AE} \cdot \overline{AF} = 2\,\overline{EM} \cdot \overline{DF}$.

Soluția II-a. Fie B_1 piciorul bisectoarei din B. Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul AMC tăiat de transversala BEB_1, obținem:

$$\frac{EA}{EM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1, \text{ adică:} \qquad \frac{EA}{EM} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{BA} = 1. \tag{1}$$

În triunghiul ADC tăiat de transversala BFB_1, obținem:

$$\frac{FA}{FD} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1,$$

adică:

$$\frac{FA}{FD} \cdot \frac{AB^2}{BC^2} \cdot \frac{BC}{AB} = 1$$

sau:

$$\frac{FA}{FD} \cdot \frac{AB}{BC} = 1. \qquad (2)$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) membru cu membru, obținem:

$$\frac{AE \cdot AF \cdot AB \cdot BC}{2EM \cdot DF \cdot AB \cdot BC} = 1,$$

adică:

$$\frac{AE \cdot AF}{2\,EM \cdot DF} = 1$$

sau:

$$\overline{AE} \cdot \overline{AF} = 2\overline{EM} \cdot \overline{DF}.$$

Problema 1654

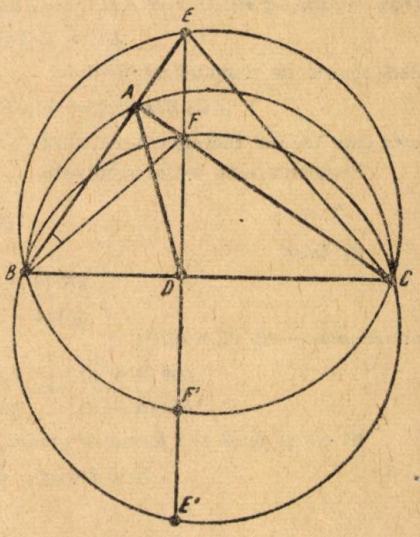
Într-un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, ducem bisectoarea AD, iar prin D ducem o perpendiculară pe BC care taie pe AB în E și pe AC în F.

a) *Să se demonstreze că $BD = DF$ și $CD = DE$.*

b) *Să se demonstreze că simetricul punctului E față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt egale între ele.*

c) *Să se arate că unghiurile EBF și ECF sînt egale și că $AE \cdot BF = AF \cdot CE$.*

* * *



a) *Soluția I-a.* Deoarece $FD \perp BD$ și $FA \perp AB$ patrulaterul $AFDB$ este inscriptibil, deci:

$$\sphericalangle FBD = \sphericalangle FAD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

adică triunghiul FBD este dreptunghic și isoscel, prin urmare $FD = BD$; analog $DE = CD$.

Soluția II-a. Din asemănarea triunghiurilor FDC și ABC avem:

$$\frac{FD}{DC} = \frac{AB}{AC}. \qquad (1)$$

Însă, conform teoremei bisectoarei interioare, (1) devine:

$$\frac{FD}{DC} = \frac{BD}{DC} \text{ sau } FD = BD.$$

La fel demonstrăm și că $CD = DE$.

Soluția III-a. — Avem: $FD = DC \operatorname{tg} C$, deci avem de arătat că:

$$BD = DC \operatorname{tg} C,$$

însă teorema bisectoarei dă:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}, \text{ de unde } BD = \frac{AB \cdot DC}{AC}.$$

Deci relația de demonstrat devine:

$$AB = AC \operatorname{tg} C,$$

adică o relație cunoscută.

Analog avem și $DE = CD$.

b) Fie E' și F' simetricele punctelor E și F față de BC. Deoarece $FD = BD$ și $FD \perp BD$, avem $FE' = BC$. Vom avea deci și $DC = DE'$. Însă $DC = ED$, deci și $ED = CD$, adică simetricul lui E față de BC se află pe cercul BCF. Analog simetricul lui F față de BC se află pe cercul BCE.

Centrele ambelor cercuri se află pe mediatoarea segmentului BC, la intersecția acestei mediatoare cu mediatoarele segmentelor BF și EC. Ori triunghiurile dreptunghice BFD și EDC sînt isoscele, deci mediatoarele segmentelor care sînt ipotenuzele lor taie mediatoarea segmentului BC la egală distanță de BC. Centrele celor două cercuri sînt la egală distanță, deci, de BC, prin urmare razele lor sînt egale.

c) Deoarece $AF \perp AB$ și $FD \perp BD$; $AE \perp AC$ și $ED \perp DC$, patrulaterele $AFDB$ și $AECD$ sînt inscritibile, deci:

$$\sphericalangle ABF = \sphericalangle EDA \quad \text{și} \quad \sphericalangle ECA = \sphericalangle EDA, \text{ de unde } \sphericalangle ECA = \sphericalangle ABF,$$

adică ceea ce aveam de demonstrat.

Ținem seamă că $BF = BD\sqrt{2}$ și $EC = DC\sqrt{2}$, relația de demonstrat se poate scrie:

$$AE \cdot BD\sqrt{2} = AF \cdot DC\sqrt{2} \quad \text{sau} \quad AE \cdot BD = AF \cdot DC.$$

Dacă notăm $\sphericalangle ECA = \sphericalangle ABF = \alpha$, avem:

$$AE = AC \operatorname{tg} \alpha \quad \text{și} \quad AF = AB \operatorname{tg} \alpha,$$

deci relația de demonstrat devine:

$$AC \cdot BD \operatorname{tg} \alpha = AB \cdot DC \operatorname{tg} \alpha \quad \text{sau} \quad AC \cdot BD = AB \cdot DC,$$

care este tocmai teorema bisectoarei.

Problema este astfel rezolvată.

Problema 1658

a) *Dacă*

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin(c+d)}{\sin(c-d)}.$$

atunci mai avem și relațiile:

$$\frac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)} = \frac{\cos(c+b)}{\cos(c-b)} \quad \text{și} \quad \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}.$$

b) *Să se pună sub formă de produs de factori expresia:*

$$E = \sin(a-b)\sin(a-c) - \cos b \cos c.$$

(Olimpiada 1955. Clasa IX-a)

Soluție. a) Relația dată se poate scrie:

$$\sin(a+b)\sin(c-d) = \sin(a-b)\sin(c+d)$$

sau dezvoltînd:

$$(\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\sin c \cos d - \sin d \cos c) =$$
$$= (\sin a \cos b - \sin b \cos a)(\sin c \cos d + \sin d \cos c)$$

sau:

$$\sin a \cos b \sin c \cos d - \sin a \cos b \sin d \cos c + \\ + \sin b \cos a \sin c \cos d - \sin b \cos a \sin d \cos c = \\ = \sin a \cos b \sin c \cos d + \sin a \cos b \sin d \cos c - \\ - \sin b \cos a \sin c \cos d - \sin b \cos a \sin d \cos c$$

și reducînd termenii asemenea obținem:

$$\sin b \cos a \sin c \cos d = \sin a \cos b \sin d \cos c. \qquad (1)$$

Acum avem de demonstrat că dacă există relația (1) avem și:

$$\frac{\cos (a + d)}{\cos (a - d)} = \frac{\cos (c + b)}{\cos (c - b)}$$

sau

$$\cos (a + d) \cos (c - b) = \cos (c + b) \cos (a - d),$$
$$(\cos a \cos d - \sin a \sin d)(\cos c \cos b + \sin b \sin c) = \\ = (\cos a \cos d + \sin a \sin d)(\cos c \cos b - \sin b \sin c)$$

sau dezvoltînd:

$$\cos a \cos d \cos c \cos b + \cos a \cos d \sin b \sin c - \\ - \sin a \sin d \cos c \cos b - \sin a \sin d \sin b \sin c = \\ = \cos a \cos d \cos c \cos b - \cos a \cos d \sin b \sin c + \\ + \sin a \sin d \cos c \cos b - \sin a \sin d \sin b \sin c$$

sau reducînd termenii asemenea:

$$\cos a \cos d \sin b \sin c = \sin a \sin d \cos c \cos b,$$

adică tocmai relația (1) care este adevărată. Deci:

$$\frac{\cos (a + d)}{\cos (a - d)} = \frac{\cos (c + b)}{\cos (c - b)}.$$

Relația (1) se poate scrie:

$$\frac{\sin b \cos a \sin c \cos d}{\sin a \cos b \sin d \cos c} = 1$$

sau

$$\operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} d = 1;$$

$$\operatorname{tg} b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} a} \cdot \operatorname{tg} c \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} d} = 1;$$

$$\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} d; \text{ sau}$$

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d},$$

adică ceea ce aveam de demonstrat.

b) Avem:

$$\sin (a - b) \sin (a - c) = (\sin a \cos b - \sin b \cos a)(\sin a \cos c - \sin c \cos a) = \\ = \sin^2 a \cos b \cos c - \sin a \cos a \sin c \cos b - \sin b \sin a \cos a \cos c + \sin b \sin c \cos^2 a = \\ = (1 - \cos^2 a) \cos b \cos c - \sin a \cos a (\sin c \cos b + \sin b \cos c) + \sin b \sin c \cos^2 a = \\ = \cos b \cos c - \sin a \cos a \sin (b + c) - \cos^2 a (\cos b \cos c - \sin b \sin c) = \\ = \cos b \cos c - \sin a \cos a \sin (b + c) - \cos^2 a \cos (b + c),$$

deci:

$$E = - \sin a \cos a \sin (b + c) - \cos^2 a \cos (b + c) = \\ = - \cos a [\sin a \sin (b + c) + \cos a \cos (b + c)] = - \cos a \cos (a - b - c)$$

și expresia este pusă astfel sub formă de produs.

Soluții analoge au dat: **Radu Stroe** (Ploești) și **Marcel Bădescu** (București).

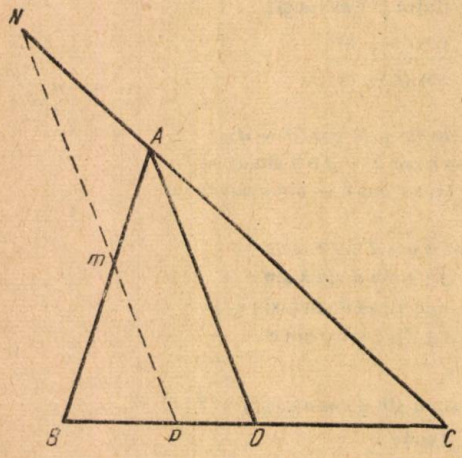
Problema 1672

Printr-un punct P al bazei BC a unui triunghi oarecare ABC se duce o paralelă cu mediana AD a triunghiului; ea taie dreapta AB în M și dreapta AC în N.

a) *Să se demonstreze relația* $AM.AC = AN.AB$.

b) $MP + NP = 2\ AD$.

(Olimpiada Matematică 1955
Anul I, Școli Medii Tehnice)



Soluție. a) Deoarece AD și NP sînt paralele conform teoremei lui Thales avem:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{PD}{DC} \text{ și } \frac{AM}{AB} = \frac{PD}{BD}.$$

Împărțim aceste două relații și obținem:

$$\frac{AN \cdot AB}{AC \cdot AM} = \frac{BD}{DC}, \text{ însă } BD = DC,$$

deci:

$$\frac{AN \cdot AB}{AC \cdot AM} = 1 \text{ sau } AN \cdot AB = AC \cdot AM.$$

b) Conform aceleiași teoreme:

$$\frac{MP}{BP} = \frac{AD}{BD} \text{ și } \frac{NP}{PC} = \frac{AD}{DC},$$

de unde:

$$MP = \frac{BP \cdot AD}{BD} \text{ și } NP = \frac{AD \cdot PC}{DC}$$

sau adunînd aceste relații:

$$MP + NP = \frac{2AD\,(BP + PC)}{BC} = \frac{2AD \cdot BC}{BC} = 2AD.$$

Problema 1700

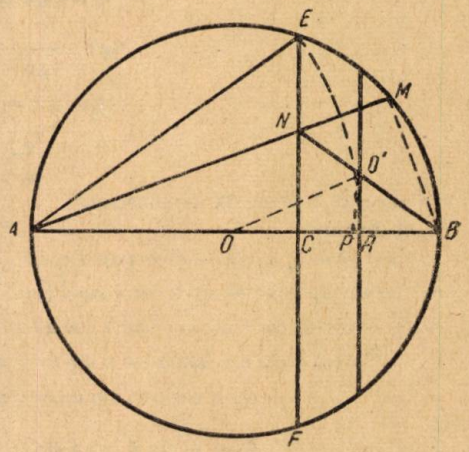
Fie un cerc O de diametru AB. Într-un punct C (fix) al acestui diametru ridicăm perpendiculara. Secanta variabilă ANM taie perpendiculara în N și cercul în M. Se cere:

a) *locul geometric al centrului cercului circumscris patrulaterului CNMB;*

b) *locul punctelor de contact ale tangentelor duse din A la aceste cercuri;*

c) *locurile a) și b) taie diametrul AB respectiv în R și P. Să se arate că segmentul PR este egal cu diferența dintre media aritmetică și cea geometrică a segmentelor AB și AC.*

Șt. Musta



Soluție. a) Patrulaterul $CNMB$ este evident inscriptibil și centrul său O' este mijlocul ipotenuzei comune NB. din O' coborîm perpendiculara $O'R$ pe AB. Triunghiurile $OO'R$ și ACN sînt asemenea și deci

$$\frac{OR}{AC} = \frac{OO'}{AN}. \qquad (1)$$

Dar $AN = 2\ OO'$; OO' fiind linie mijlocie în triunghiul ABN. Așa că (1) devine:

$$\frac{OR}{AC} = \frac{OO'}{2OO'} = \frac{1}{2};\ OR = \frac{AC}{2}.$$

Deci, OR este fix, așa că locul centrelor este perpendiculara din O' pe AB.

b) Fie E și F respectiv punctele unde perpendiculara în C taie cercul O. Dacă notăm cu T punctul de contact al tangentei, avem:

$$AT^2 = AB.AC; \text{ dar și } AE^2 = AC.AB$$

și deci $AT = AE =$ constant, așa că locul este cercul cu centrul în A și raza $AE = \sqrt{AB.AC}$.

c) Deci $AP = \sqrt{AB.AC}$, iar $AR = AO + OR = AO + \frac{AC}{2} = \frac{AB + AC}{2}$. Avem evident $AP < AR$, și prin urmare:

$$PR = AR - AP = \frac{AB + AC}{2} - \sqrt{AB.AC},$$

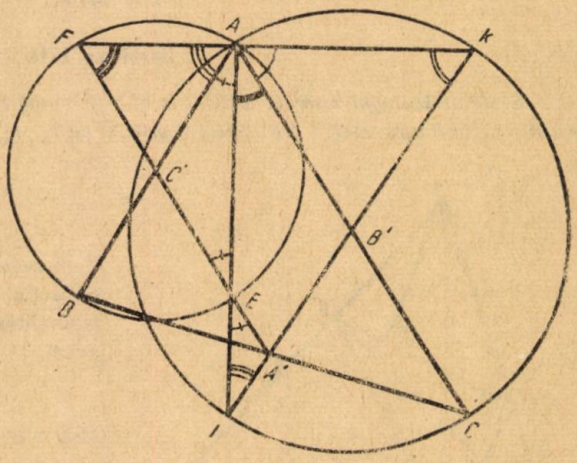
ceea ce s-a cerut.

Observare. Problema este valabilă și dacă punctul C este exterior pe diametrul AB. Se pot urmări exact aceleași raționamente ca mai sus.

Problema 1705

În triunghiul ABC notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor; cu E și F intersecțiile dreptei $A'C'$ cu cercul de diametru AB, iar cu I și K intersecțiile dreptei $A'B'$ cu cercul de diametru AC. Să se arate că punctele A, E, I sînt colineare, decsemenea și punctele A, F, K sînt colineare.

Al. Alexandrescu, București



Soluție. În triunghiul AKB' avem:

$$\sphericalangle KAB' = \frac{180 - \sphericalangle AB'K}{2},$$

deoarece triunghiul AKB' este isoscel.

$$\sphericalangle KAM' = 90° - \frac{\sphericalangle AB'K}{2} =$$

$$= 90 - \frac{\sphericalangle A'B'C'}{2} = 90° - \frac{A}{2}.$$

Analog în triunghiul $AC'F$ avem: $\sphericalangle FAC' = 90° - \frac{A}{2}$, deci:

$$\sphericalangle FAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAK = 90° - \frac{A}{2} + A + 90° - \frac{A}{2} = 180°,$$

adică punctele A, F, K sînt colineare.

Triunghiurile AFE și AKI sînt înscrise în semicercuri, deci ele sînt dreptunghice. Prin urmare $AE \perp AF$ și $AI \perp AK$.

Dar punctele A, K, F sînt colineare; deci și punctele A, E, I sînt colineare aflîndu-se pe o perpendiculară pe dreapta determinată de punctele A, F, K.

Problema 1709

Un circuit oscilant al unui post de radioemisie este alcătuit dintr-un condensator cu o capacitate de 1000 cm *și o bobină de autoinducție. Știind că bobina de* 1 m *lungime este formată din* 20 *spire cu diametrul de* 40 cm, *să se calculeze frecvența oscilațiilor produse și lungimea de undă a acestui post* ($\mu = 1$).

Cecilia Cetățeanu, studentă, Craiova

Soluție. Aflăm coeficientul de autoinducție

$$L = \frac{4\pi^2 r^2 N^2 \mu}{l\ 10^9} = \frac{4 \times 9{,}8596 + 400 \times 400 \times 1}{100 \times 10^9} = 0{,}631 \cdot 10^{-4}\ \text{H}.$$

Aflăm perioada oscilațiilor produse după formula lui Thomson:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

unde $C = 1000$ cm; $1\ F = 9.10^{11}$ cm; $C = \frac{1}{9 \cdot 10^8}\ F$; $T = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}631 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^8}} =$

$$= 6{,}28\ \frac{0{,}00795}{3 \times 10^4} = 1{,}67 \cdot 10^{-6}\ \text{s}.$$

$$\nu = \frac{1}{T}; \qquad \nu = \frac{1}{0{,}00000167} \cong 0{,}6 \cdot 10^6\ \text{Hz}.$$

Aflăm lungimea de undă a postului:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{300.000}{0{,}6.10^6} = 0{,}500\ \text{km}.$$

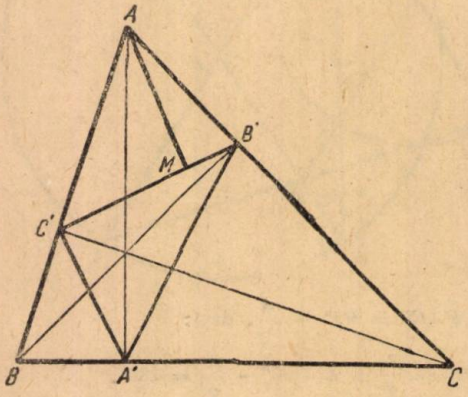
$$\lambda = 500\ \text{m}.$$

Problema 1711

Se dă un triunghi oarecare ABC. Fie $A'B'C'$ triunghiul său ortic. Dacă notăm cu l_a distanța vîrfului A la latura $B'C'$ a triunghiului ortic și cu l_b, l_c analoagele, să se arate că:

$$l_a + l_b + l_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R}.$$

Simon Șt. Petre



Soluție dată de **R. Stroe** (Ploești). Fie M proiecția lui A pe $B'C'$. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AMB' și ABA' avem

$$\frac{l_a}{AB'} = \frac{h_a}{c},$$

însă $AB' = AB \cos A = c \cos A$, deci:

$$l_a = h_a \cos A = \frac{2S}{a} \cdot \cos A = \frac{2S}{a} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{S(-a^2+b^2+c^2)}{abc}.$$

Analog, $\quad l_a = \frac{S(a^2 + c^2 - b^2)}{abc}$; $l_c = \frac{S(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$,

deci:

$$l_a + l_b + l_c = \frac{S}{abc}(bc\ (b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2) =$$

$$= \frac{S}{abc}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Însă $abc = 4\ RS$, deci:

$$l_a + l_b + l_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R}.$$

Problema 1713

Să se rezolve sistemul de ecuații.

$$xy(x + y - 2z) = c,$$
$$yz(y + z - 2x) = a,$$
$$zx(z + x - 2y) = b.$$

Ion I. Cristea, student, București

Soluție. Punînd $xyz = K$, sistemul se mai scrie:

$$K(x + y - 2z) = cz,$$
$$K(y + z - 2x) = ax,$$
$$K(z + x - 2y) = by,$$

sau:

$$K(x + y + z) = (c + 3K)z; \tag{1}$$
$$K(x + y + z) = (a + 3K)x; \tag{2}$$
$$K(x + y + z) = (b + 3K)y; \tag{3}$$

de unde:

$$(a + 3K)x = (b + 3K)y = (c + 3K)z. \tag{4}$$

Înmulțind ecuațiile (1), (2), (3) respectiv cu produsele:

$$(a + 3K)(b + 3K);\ (b + 3K)(c + 3K);\ (c + 3K)(a + 3K)$$

și apoi adunîndu-le, obținem:

$$K(x + y + z)[(a + 3K)(b + 3K) + (b + 3K)(c + 3K) + (c + 3K)(a + 3K)] =$$

$$= (x + y + z)(a + 3K)(b + 3K))(c + 3K)$$

sau simplificînd cu $x + y + z \neq 0$, avem:

$$K[(3K + a)(3K + b) + (3K + b)(3K + c)(3K + a)] =$$
$$= (3K + a)(3K + b)(3K + c)$$

care se reduce la:

$$3(a + b + c)K^2 + 2(ab + bc + ca)K + abc = 0,$$

de unde:

$$K_{1,2} = \frac{-(ab + bc + ca) \pm \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a + b + c)}}{3(a + b + c)}.$$

Deci valoarea lui $xyz = K$ se cunoaște.

Din (4) avem:

$$(a + 3K)^2x^2 = (b + 3K)(c + 3K)yz,$$
$$(b + 3K)^2y^2 = (c + 3K)(a + 3K)zx,$$
$$(c + 3K)^2z^2 = (a + 3K)(b + 3K)xy,$$

și cum $xyz = K$, rezultă:

$$(a + 3K)^2x^3 = K(b + 3K)(c + 3K),$$
$$(b + 3K)^2y^3 = K(c + 3K)(a + 3K),$$
$$(c + 3K)^2z^3 = K(a + 3K)(b + 3K),$$

de unde avem soluțiile reale:

$$x = \sqrt[3]{\frac{K(3K+b)(sK+c)}{(3K+a)^2}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{K(3K+c)(3K+a)}{(3K+b)^2}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{K(3K+a)(3K+b)}{(3K+c)^2}}$$

și soluțiile imaginare $x_1 = \varepsilon x$; $y_1 = \varepsilon y$, $z_1 = \varepsilon z$, unde ε este o rădăcină cubică primitivă a unității:

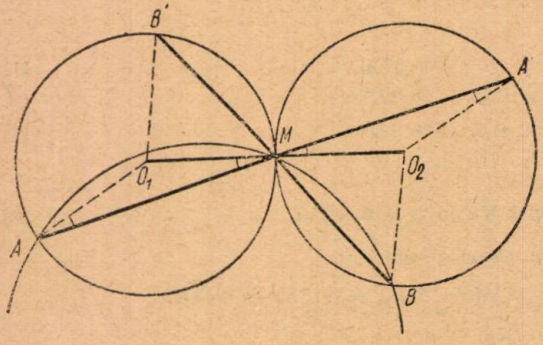
$$\varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 1724

Se dau cercurile O_1 și O_2 egale și tangente în M. Un cerc oarecare O trecînd prin M taie pe O_1 în A și pe O_2 în B. Dreapta MA întîlnește pe O_2 în A'; iar MB întîlnește pe O_1 în B'. Să se demonstreze că:

$$MB = MB' \text{ și } MA = MA'.$$

Gh. Buicliu



Soluție dată de **Radu Stroe**, student, București. Deoarece:

$AO_1 = O_1M = MO_2 = A'O_2$ și

$\sphericalangle O_1MA = \sphericalangle A'MO_2$ și deci

$\sphericalangle O_1AM = \sphericalangle O_2A'M$, vom avea:

$\sphericalangle AO_1M = \sphericalangle MO_2A'$,

deci triunghiurile MO_1A și $MA'O_2$ sînt egale, prin urmare $MA = MA'$.

Analog din asemănarea triunghiurilor $MB'O_1$ și MBO_2 deducem: $MB = MB'$.

Problema 1762

Se dă ecuația $x^2 - px + q - 1 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că ecuația $py^2 - 2qy + p = 0$ are o rădăcină

$$y_1 = \frac{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)} + \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}},$$

apoi să se exprime tot în funcție de x_1 și x_2 a doua rădăcină y_2.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Conform relațiilor dintre rădăcini și coeficienți, avem:

$$x_1 + x_2 = p \quad \text{și} \quad x_1x_2 = q - 1.$$

Să punem aceste relații în evidență în expresia lui y_1. Avem:

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2} - \sqrt{1 - x_1 - x_2 + x_1x_2}}{\sqrt{1 - x_1 - x_2 + x_1x_2} + \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_1x_2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + p + q - 1} - \sqrt{1 - p + q - 1}}{\sqrt{1 - p + q - 1} + \sqrt{1 + q - 1 + p}} = \frac{\sqrt{p+q} - \sqrt{q-p}}{\sqrt{p+q} + \sqrt{q-p}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{p+q} - \sqrt{q-p})^2}{(\sqrt{p+q} + \sqrt{q-p})(\sqrt{p+q} - \sqrt{q-p})} =$$

$$= \frac{p + q + q - p - 2\sqrt{q^2 - p^2}}{p + q - q + p} = \frac{q - \sqrt{q^2 - p^2}}{p}.$$

Într-adevăr, din ecuația:

$$py^2 - 2qy + p = 0$$

avem:

$$y_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - p^2}}{p},$$

deci

$$y_1 = \frac{q - \sqrt{q^2 - p^2}}{p},$$

adică ceea ce aveam de demonstrat. Aplicăm relațiil dintre rădăcini și coeficienți:

$$y_1 y_2 = \frac{p}{p} =$$

de altfel ecuația în y este reciprocă. Prin urmare:

$$y_2 = \frac{1}{y_1}.$$

adică:

$$y_2 = \frac{\sqrt{(1 - x_1)(1 - x_2}\quad \sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)}}{\sqrt{(1 + x_1)(1\quad x_2} - \sqrt{(1 - x_1)(1 - x_2)}}.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN *)

PROBLEME DATE LA OLIMPIADA MATEMATICĂ ETAPA II-a LOCALĂ DIN 4 MARTIE 1955

Clasa VIII-a

2109. Care sînt ecuațiile de gradul al II-lea de forma $x^2 + px + q = 0$, în care coeficienții p și q sînt chiar rădăcinile ecuației.

2110. Se dă un paralelogram $ABCD$ și se ia pe latura AB, de la B către A segmentul $BM = BC$, iar pe latura AD, de la D către A segmentul $DN = DC$.

Prin vîrful C al paralelogramului se duce o dreaptă variabilă, care taie dreptele AB și AD respectiv în P și Q. Să se demonstreze că:

a) punctele CNM sînt în linie dreaptă;

b) produsul $BP \times DQ$ este constant oricum s-ar roti dreapta PQ în jurul lui C;

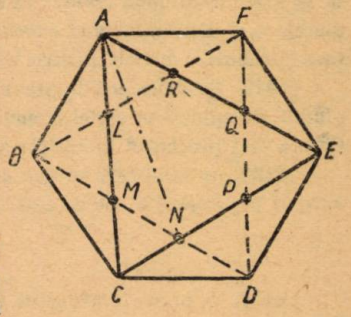
c) $\frac{CP}{CQ} = \frac{PM}{QN}$.

2111. Să se simplifice fracția:

$$\frac{2x^2 - (3a + b)x + a^2 + ab}{2x^2 - (a + 3b)x + ab + b^2}.$$

Clasa IX-a

2112. Se dă un exagon regulat $ABCDEF$ a cărui latură se notează cu l. Unind din două în două vîrfurile sale se obține un al doilea exagon regulat $LMNPQR$, ca în figură. Să se calculeze latura acestui exagon regulat precum și lungimea segmentului AN (punctul N fiind pe dreapta CE).

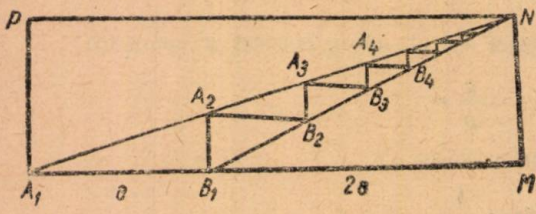


*) La problemele 2109—2161 se primesc soluții pînă la 1 august 1956.

2113. Să se exprime:

$$\frac{1}{3 \sin x \cos^3 x} + \frac{4}{3 \sin x \cos x} - \frac{5 \cos x}{\sin x}$$ în funcție de $\operatorname{tg} x$.

2114. Fie un dreptunghiu A_1NMP în care $A_1P = MN = a$ și $A_1M = PN = 3a$. Se consideră pe latura A_1M punctul B_1, așa fel încît $A_1B_1 = a$.



Se duc dreptele A_1N și B_1N. Paralela dusă prin B_1 la MN taie dreapta A_1N în A_2. Paralela dusă prin A_2 la A_1 taie dreapta B_1N în B_2. Paralela dusă prin B_2 la MN taie dreapta A_1N în A_3; paralela dusă prin A_3 la A_1M taie dreapta B_1N în B_3 și așa mai departe.

a) Să se arate că lungimile segmentelor A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,... etc., formează o progresie geometrică.

b) Să se afle suma acestei progresii geometrice considerată nelimitată atît prin aplicarea formulei cît și prin considerații geometrice.

Clasa X-a și Școli tehnice

2115. Să dă ecuația $x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$.

a) Considerînd pe y ca un parametru, să se afle ce valori putem da acestui parametru, pentru ca valorile lui x, deduse din ecuația dată, să fie reale.

b) Aceiași chestiune, considerînd pe x ca parametru, y să fie real.

c) Să se afle valoarea reală a lui x, pentru care y ia valoarea maximă precum și valoarea reală a lui x pentru care y ia valoarea minimă.

2116. Într-un patrulater $ABCD$ se dau laturile $AB = 15$ m, $BC = 13$ m, $CD = 7$ m, $DA = 3$ m și diagonala $AC = 8$ m. Să se calculeze unghiul A al patrulaterului și lungimea diagonalei BD.

2117. Un vas în formă de trunchi de con circular drept are ca fund baza mică cu raza de 4 dm așezată orizontal. Baza mare are raza de 7 dm, iar generatoarea de 5 dm. Să toarnă în vas 314 litri de lichid. Să se afle înălțimea apei din vas. Rezultatul se poate lăsa sub formă de radical.

Anul I Școli profesionale

2118. Un muncitor primește pentru ajustaj un număr de șuruburi, pe care trebuie să le execute în două tranșe. El ajustează într-o săptămînă 1/5 din numărul total, în următoarele trei săptămîni mai execută 7/8 din rest, și mai rămîn neexecutate încă 500 bucăți. Cîte șuruburi a primit pentru ajustaj?

2119. Se amestecă împreună 1,2 kg compoziție de lipit cu 0,5 kg cositor și 0,8 kg plumb, obținîndu-se astfel o nouă compoziție conținînd 50% cositor, respectiv 50% plumb. Care a fost procentul în cositor al primei compoziții?

2120. Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare AB și CD. Se ia un punct oarecare M pe arcul BD. Să se arate că unghiurile AMD și BMC sînt complimentare.

Anul II Școli profesionale

2121. O bară cilindrică de 60 cm lungime este alcătuită din două bare puse cap la cap și lipite: una de oțel cu greutatea specifică de 7,8 g/cm³ și cealaltă din zinc cu greutatea specifică 6,5 g/cm³. Toată bara este vopsită așa că nu se cunoaște secțiunea care separă oțelul de zinc. Bara cîntărește 1,4287 kg. Să se afle lungimea fiecărei părți știind că diametrul barei este de 2 cm.

2122. Într-o secție a unei fabrici s-a realizat 115% din planul de muncă, depășindu-se planul cu 150 t: iar în altă secție s-a depășit planul cu 6%.

Cît s-a programat și cît s-a realizat la fiecare secție, dacă depășirea realizată la cele două secții împreună a fost de 12%?

2123. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$ al cărui unghiu de la bază $A = 60°$. Să se determine volumul născut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari știind că linia mijlocie a trapezului $EM = 24$ cm și AE proiecția unei laturi neparalele pe bază, este 3 cm.

Anul I Școli tehnice de maistri

2124. Trei echipe de muncitori lucrînd împreună ar termina o lucrare în 10 zile. Lucrînd numai prima și a doua echipă împreună ar termina lucrarea în 12 zile. Iar a doua și a treia lucrînd împreună ar termina aceiași lucrare în 20 zile. În cîte zile ar termina lucrarea fiecare echipă lucrînd singură?

2125. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x+1}{2} - \frac{y}{6} + \frac{z-3}{4} = 0,$$

$$\frac{x+8}{2} = \frac{4y+3}{3} = z - 6.$$

2126. În triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$), în care $AB = 4$ dm și $AC = 3$ dm se duc bisectoarele interioară și exterioară ale unghiului C și se cere: *a)* raza cercului circumscris triunghiului ABC, *b)* distanța dintre picioarele bisectoarelor interioară și exterioară ale unghiului C.

Anul I Școli pedagogice

2127. Un oraș se află la o depărtare de 59 km de un sat. Un țăran muncitor întorcîndu-se în sat a plecat din oraș la ora 7 dimineața și a mers cu o viteză de 4 km pe oră. La ora 7 și 55 minute în întîmpinarea lui a fost trimis din sat un camion, care l-a întîlnit și l-a adus în sat la ora 10 și 50 minute dimineața. Pentru oprirea din timpul întîlnirii au fost folosite 5 minute. Cu ce viteză a mers camionul?

2128. Să se rezolve ecuația:

$$(a^2 + 4b^2)\, x^2 + 2\,(a^2 + 2b^3)\, x + a^4 - b^4 = 0.$$

Caz particular $a = 1$ și $b = 2$.

2129. Într-un trapez isoscel baza mare este de 600 m, unghiurile ascuțite de 30° și laturile neparalele de 250 m. Să se afle baza mică, înălțimea și diagonalele trapezului.

Anul II Școli pedagogice

2130. Care este cel mai mare număr cu care împărțind numerele $N_1 = 6351$, $N_2 = 1699$, $N_3 = 1273$ găsim respectiv resturile $R_1 = 51$, $R_2 = 19$, $R_3 = 13$.

Să se afle și cel mai mic număr cu care împărțind numerele N_1, N_2, N_3 obținem respectiv tot resturile R_1, R_2, R_3 de mai sus.

2131. Se dă fracția $\dfrac{2a^2 - a - 6}{2a^2 + 9a + 9}$.

a) Să se afle valorile lui a pentru care fracția se anulează și valorile pentru care devine infinită.

b) Pentru ce valori ale lui a fracția este egală cu $-\dfrac{7}{3}$.

Verificare.

2132. Într-un triunghi dreptunghic ABC se ia în prelungirea ipotenuzei BC segmentul $CD = \frac{BC}{2}$, apoi se unește D cu A și se ia în prelungire segmentul $AE = DA$. Să se demonstreze că triunghiul ABE este isoscel.

Anul III și IV Școli pedagogice

2133. Se dau două vase identice. Într-unul se pune ulei cu densitatea 0,9 pînă se umple, iar în al doilea o bucată de fier cu densitatea 7,8. În modul acesta al doilea vas cîntărește cu 5 kg mai mult. În al doilea vas s-ar putea turna 3 litri de apă pentru a se umple. Să se afle capacitatea acelor vase, greutatea și volumul bucății de fier.

2134. Două automobile au plecat în același timp unul spre altul din două puncte A și B situate la distanța de 48 km. Automobilul care a plecat din A ajunge în punctul B la 64 minute după ce s-au întîlnit, iar celălalt automobil sosește în punctul A la 16 minute după momentul întîlnirii.

Care este viteza fiecărui automobil? Verificare.

2135. Acoperișul unei construcții are baza în formă de dreptunghi cu dimensiunile de 6 m și 14 m. Știind că acoperișul pe toate cele patru fețe ale sale este cu aceiași înclinare de 30° față de planul orizontal, să se afle ariile părților de acoperiș care au formă de trapez și aria părților de acoperiș cu forma de triunghi. Să se afle și lungimile muchiilor acoperișului.

CHESTIUNI DATE LA «OLIMPIADA DE FIZICĂ» ETAPA A II-a LOCALĂ DIN 4 MARTIE 1956

Clasa VIII-a școli medii și anul I școli profesionale

— Studiul mișcării uniform variate.

2136. O forță constantă acționează asupra unui vagon de 4800 kg aflat în repaos. Vagonul atinge viteza de 9 m/s după ce a parcurs orizontal 0,72 km.

— Ce forță a acționat asupra vagonului?

— Cît lucru mecanic a cheltuit forța?

— Să se exprime rezultatele în unități M.K.S., M.Kf.S. și C.G.S.

Clasa IX-a

— Legea atracției universale și cum s-a ajuns la descoperirea ei.

2137. O locomotivă de 800 C.P. merge cu 38 km/h și are randamentul de 11%. Cît costă cărbunii necesari unei călătorii de 500 km știind că o tonă de cărbuni costă 150 lei, iar puterea lor calorifică este de 7000 kcal/kg?

Clasa X-a și școli tehnice

— Mișcarea ondulatorie și fenomenele ei caracteristice; aplicație la sunet (pentru clasa X-a).

— Legea Joule-Lenz. Aplicații tehnice (pentru școli tehnice).

2138. O sursă de curent electric este conectată într-un circuit care are rezistența exterioară formată dintr-un fir de fier cu secțiunea de 3 mm² și lungimea de 150 m. Sursa are f.e.m. de 3 V, iar tensiunea la bornele ei este de 2 V. Să se calculeze:

a) rezistența interioară a sursei;

b) cantitatea de electricitate ce trebuie să treacă prin circuitul exterior ca să dezvolte 240 kcal.

Se dă $\rho = 0{,}12 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$.

PROBLEME PROPUSE *)

2139. O eprubetă de secțiune interioară S, divizată în părți egale de capacitate, conține două lichide A și B nemiscibile (nu se amestecă). Lichidul mai greu A are densitatea D, iar lichidul mai ușor B are densitatea d. Se introduce în eprubetă o bucată de aluminiu cu densitatea $\rho = 2{,}68$ care plutește între cele două lichide ridicînd nivelul inițial al lichidului A cu a diviziuni. Știind că fiecare diviziune reprezintă 1 mm se cere:

1) numărul de diviziuni cu care se va ridica nivelul lichidului B;

2) greutatea bucății de aluminiu introdusă în eprubetă.

Aplicație: $S = 12{,}56$ cm^2; $D = 13{,}6$; $d = 1$ și $a = 2$ diviziuni.

Ing. Constantin Neeșoiu

2140. Se dă cercul O și punctele A, B exterioare lui. Fie AA_1, BB_1 tangentele din A și B la O. Fie deasemeni D, D' punctele care împart segmentul AB în raportul $\frac{AA_1}{BB_1}$ și E, E' acelea care împart același segment în raportul $\frac{BB_1}{AA_1}$. Unul din cercurile Γ de diametru DD' sau EE' taie pe O în general în punctele C, C'. Să se demonstreze că cercurile ACB, $AC'B$ sînt tangente cercului O.

Gh. Buiciu

2141. Să se afle bazele x, y, z ale sistemelor de numerație în care există relația:

$$1954_x + 1955_y + 1956_z = 1978_{20},$$

știind că $x + y + z = 39$.

Ion I. Cristea, elev, Constanța

2142. Centrele fețelor unui cub sînt vîrfuri ale unui octaedru regulat, iar centrele fețelor octaedrului regulat sînt vîrfurile unui alt cub. Dacă lungimea laturii octaedrului este m să se exprime lungimile muchiei celor două cuburi.

C. Ionescu-Țiu

2143. Înălțimea unei piramide patrulatere regulate este egală cu h, iar distanța de la un vîrf al bazei la una din fețele laterale este egală cu d. Să se exprime volumul piramidei. Există vreo relație între d și h pentru ca problema să fie posibilă?

Corneliu Georgescu, Craiova

2144. Să se elimine x din ecuațiile:

$$\sec x + \cos x = \sqrt{a^2 - 1},$$

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = \sqrt{b + 2}.$$

Valeriu Hulubei, elev, Craiova

2145. Pe o sferă de rază R sînt așezate n sfere egale, astfel că în orice grup de trei sfere exterioare vecine, sferele sînt tangente între ele și tangente sferei de rază R. Să se calculeze raportul $\frac{R}{r}$ în cazurile cînd n este 4; 8 sau 20, unde r este raza uneia din cele n sfere exterioare. Ce valori mai poate lua n în condițiile problemei?

C. Ionescu-Țiu

---

*) La problemele 2109—2161 se primesc soluții pînă la 1 august 1956.

2146. Din vîrful C al triunghiului oarecare ABC şi cu rază egală cu AB se duce un cerc, iar din A şi B se duc tangentele AA_1 şi BB_1 la cerc. Fie A_2 şi B_2 proiecţiile lui A_1 şi B_1 pe CA şi CB respectiv. Să se arate că există relaţia $AB \cdot A_2B_2 = CA_2 \cdot CB_2$.

C. Draica, elev, Bucureşti

2147. Să se discute sistemul:

$$x + y + z = a + b + c,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3,$$

$$ax + by + cz = ab + bc + ca.$$

* * *

2148. Se dă trapezul $ABCD$ de diagonale AC şi BD. Cercurile de diametre AC şi BD se intersectează în punctele M şi N, iar laturile neparalele ale trapezului se întîlnesc în punctul P. Să se arate că punctele M, N, P sînt colineare.

C. Păun, Cluj

2149. Să se rezolve ecuaţia:

$$x(x + 3)\ (x^2 - 1)\ (x^2 - 4) = 1001.$$

* * *

2150. Se dă un triunghi oarecare ABC şi un punct M fix pe latura AB. O paralelă la CM taie laturile AB, BC, CA sau prelungirile lor respective în punctele P, R, S.

Să se arate în ce caz suma $PR + PS$ este maximă.

Gh. I. Mitrofan, Caransebeş

2151. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[4]{x + 27} + \sqrt[4]{55 - x} = 4.$$

* * *

2152. Două semicercuri egale au diametrii AOB şi $A'O'B'$ paraleli şi sînt tangente în M. Segmentul OB' taie semicercul O' în C', tangenta în M o taie M', iar semicercul O îl taie în C. Să se stabilească relaţia $OC^2 = B'M' \cdot B'C'$.

Dacă semicercul $A'O'B'$ se rostogoleşte pe semicercul AOB, să se arate că tot timpul patrulaterul $AA'B'B$ este inscriptibil şi circumscriptibil şi să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris; să se afle valoarea maximă a ariei aceluiaşi patrulater.

Stelian G. Mărculescu, Oraşul Stalin

2153. Pentru ce valori întregi ale lui p şi q ecuaţia:

$$x^2 + px + q = 0$$

are rădăcini reale şi cuprinse între 1 şi 5?

Stănăşilă Octavian, student, Bucureşti

2154. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia punctul Q astfel ca $\frac{BQ}{QC} = k$. O dreaptă mobilă (Δ) taie laturile AC, respectiv în M şi N. Paralela din M la AQ taie pe BC în R. Pe segmentul BN se ia punctul S astfel ca $\frac{NS}{SB} = k$. Dreapta RS interesectează dreapta (Δ) în punctul Z. Se cere locul geometric al punctului Z.

Marian Ziguleseu, student, Bucureşti

2155. — Se consideră un triunghi isoscel BAC $(AB = AC)$. Se împarte latura BC în 5 părți egale: $BM = MN = NP = PR = RC$. Se notează unghiul $NAP = \beta_1$ și $MAR = \beta_2$. Să se demonstreze relația

$$\cos \beta_1 - \cos \beta_2 = \frac{100 \sin^2 A}{(13 + 12 \cos A)(17 + 8 \cos A)}.$$

C. V. Costăchescu

2156. Două aerostate se află la diferite înălțimi. Din aerostatul aflat la înălțimea mai mare se lasă să cadă liber un corp care trece pe lîngă al doilea aerostat cu viteza de 100 m/s. În momentul trecerii se lasă din al doilea aerostat, să cadă liber un alt corp. Unul din corpuri ajunge cu 5 s înaintea celuilalt corp.

Se întreabă: corpul cărui aerostat a ajuns primul pe pămînt și care este înălțimea la care sînt situate aerostatele? (se neglijează frecarea cu aerul).

Claudiu Orșivschi, profesor Tecuci

2157. În vîrfurile unui cub $ABCDA'B'C'D'$ se află sarcini electrice repartizate astfel: pe vîrfurile bazei superioare cîte o sarcină $+ q$ ues CGS, iar pe vîrfurile bazei inferioare cîte o sarcină $- q$ ues CGS. Muchia cubului fiind a, să se afle cu ce forță acționează aceste sarcini asupra unei alte sarcini $+ Q$ ues CGS, aflată în centrul cubului. Sistemul de sarcini se consideră situat în vid.

Claudiu Orșivschi, profesor Tecuci

2158. Să se determine raportul între viteza patratică mijlocie a moleculei de hidrogen și viteza de propagare a sunetului în hidrogen pentru aceiași temperatură.

Să se găsească numărul de molecule de gaz care la temperatura de 27°C să aibă o energie cinetică de translație egală cu 1 erg.

D. Grosu, asistent Facult. Matem. Fizică, Iași

2159. Într-un cilindru izolat termic se găsește o masă (m) de aer la 0° și presiunea normală 76 cm coloană mercur. Această masă de aer este închisă în cilindru printr-un piston mobil. În interiorul cilindrului se află o rezistență de 2 ohmi prin care trece un curent electric; aerul încălzindu-se se dilată și efectuiază un lucru mecanic exterior de 247 jouli. Știind că intensitatea curentului este $\frac{1}{2}$ A, căldura specifică a aerului este $\frac{1}{4}$, coeficientul de dilatare al aerului este $\frac{1}{273}$ și accelerația gravitației la locul experienței este 9,81 m/s, să se afle timpul în ore necesar trecerii curentului prin rezistență pentru a se realiza lucrul mecanic enunțat.

Virgil Atanasiu

2160. O bilă de plumb cu raza de 3 cm este lăsată să cadă liber prin apă într-un bazin adînc de 5 m. Aceiași bilă este lăsată să cadă liber, însă de la înălțimea de 2 m deasupra bazinului.

Care este timpul necesar pentru a ajunge la fundul bazinului în primul și al doilea caz? Se neglijează rezistența aerului. Experiența se face în București.

Virgil Atanasiu

2161. Un automobil mergînd cu 60 km/h are puterea medie de 40 CP. Pentru ce distanță îi ajunge rezerva de 50 l benzină dacă randamentul este de 25 %?

(Densitatea benzinei $\rho = 0{,}8$ g/cm; puterea calorifică $q = 11.000$ kcal/kg).

Achim Marinescu

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E: 791. Doi biciclişti pleacă din două localităţi A şi B în acelaşi timp şi se deplasează unul în întîlnirea celuilalt. Primul sosind în B se întoarce imediat şi merge spre A, al doilea sosind în A se întoarce imediat şi merge spre B. Prima oară bicicliştii s-au întîlnit la 5 km de localitatea A, a doua oară, la 3 km de B. Să se găsească distanţa de la A la B.

(clasa VII, Olimpiada matematică, Kiew 1955)

E: 792. Să se găsească patru numere întregi pozitive şi inegale, ştiind că suma lor este egală cu produsul celui mai mic cu cel mai mare dintre ele, adunat cu produsul celorlalte două.

(clasa VII, Olimpiada matematică, Kiew 1955)

E: 793. Să se arate că dacă: $\frac{x^4 + y^4}{a^4 + b^4} = \frac{(x - y)^4}{(a - b)^4}$,

atunci avem şi $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ sau $\frac{x}{y} = -\frac{a}{b}$.

Nicolae Teodorescu, absolvent, Bucureşti

E: 794. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{(a^2 - 4bc)(x^2 - 4zy) - (2bz + 2cy - ax)^2}{(bx - ay)(az - cx) - (bz - cy)^2} = 4.$$

Gheorghe Andricioaiei, elev, Botoşani

E: 795. Să se determine numărul de trei cifre egal cu suma numerelor de cîte două cifre formate din prima şi a doua cifră, din a doua şi ultima cifră, din ultima şi prima cifră.

Istodor Valentin, student, Bucureşti

E: 796. Pe un cerc O se iau punctele A şi B fixe şi punctul C mobil. Fie D mijlocul segmentului AB. Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului CD cînd C se mişcă pe cerc.

* * *

E: 797. În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$), EF este linie mijlocie şi se prelungeşte cu segmentul FG. Se uneşte C cu G, şi fie H punctul de intersecţie al dreptelor CG şi AD. Ştiind că $3FG = EG = AD = 3a$:

1) să se calculeze în funcţie de a mărimea segmentelor BC şi DH.

2) Să se arate că dreapta BF trece prin mijlocul segmentului DH.

Gh. Călugăriţa

E: 798. Doi zidari au zidit, primul lucrînd 8 ore, iar al doilea lucrînd 6 ore, un număr de 3900 cărămizi; ştiind că primul zideşte în 5 ore acelaş număr de cărămizi pe care le zideşte al doilea în 6 ore, să se afle cîte cărămizi zideşte fiecare în 7 ore.

* * *

---

*) V: E: 791, 798, 800, 804; VI: E: 792, 795, 799, 801, 803, 805; VII: E: 796, 794, 1796, 797). La aceste probleme se primesc soluţii dela elevii claselor V—VIII pînă la august 1956.

E: 799. Greutăţile specifice a două corpuri sînt în raport de $\frac{5}{7}$. Să se afle greutăţile lor specifice ştiind că 6 dm^3 din primul corp şi 8 dm^3 din al doilea corp cîntăresc împreună 86 kg.

C.I.Ţ.

E: 800. Ce suprafaţă de pămînt va produce pîinea necesară pe timp de un an unui oraş de 580.000 locuitori, cu o consumaţie de 7 pîini la 12 locuitori, dacă 1 hl grîu cîntăreşte 61 kg, dacă din 150 kg grîu se extrage 115 kg făină şi dacă din 70 kg făină se fac 92 pîini.

* * *

E: 801. La prima reducere de preţuri s-a făcut unui costum o reducere de 20 %, iar la a doua reducere s-a făcut o reducere de 30% şi astfel preţul costumului a devenit 420 lei. Să se afle cît a costat costumul înainte de prima reducere de preţuri.

* * *

E: 802. Să se dea cel puţin cinci definiţii ale paralelogramului, apoi mai arătaţi şi alte proprietăţi într-un paralelogram, pe care nu le-aţi trecut în nici una din definiţiile date.

C.I.Ţ.

E: 803. O bancă populară de stat avînd în cassă suma de lei 15.000.000 plasează ţăranilor săraci o parte din această sumă, astfel: *a)* $\frac{1}{2}$ din ea pentru diferite însămînţări cu 5 % şi b) o treime din ea pentru replantarea viilor cu viţă nobilă cu 4 %.

Ştiind că banca a obţinut un venit anual de lei 345.000, să se afle:

a) venitul obţinut din 5 %, b) venitul obţinut din 4 % şi c) sumele plasate cu 5 % şi 4 %.

B. I. Baieră

E: 804. Într-un cerc unghiurile la centru sînt proporţionale cu 2, 3, 5, 7, 15. Să se calculeze unghiurile în grade, minute şi secunde. Verificare.

* * *

E: 805. Să se împartă numărul 1956 în părţi invers proporţionale cu 3, 4 şi 6. Verificare.

* * *

POŞTA REDACŢIEI

— Tov. *Grigore Ştefan*, clasa X liceul militar Iaşi. — Pînă la apariţia fiecărui număr al G.M.F.—B puteţi trimite rezolvări din ultimele trei numere apărute; însă nu din problemele pentru şcoala de 7 ani, care sînt propuse pentru elevii din şcoala elementară, pentru elevii din classa VIII-a, şcoli profesionale, de maiştri sau pedagogice.

— Tov. *Bogdan Alecu*, clasa VIII S. m. 20 Bucureşti. — Inainte de a compune probleme originale trebuie să deveniţi un activ rezolvitor de cît mai multe probleme propuse. Este bine că aţi remarcat unele erori de tipar, însă le-aţi comunicat prea tîrziu redacţiei pentru a fi rectificate la erată în numerele următoare. Un elev de clasa VIII-a nu poate participa la Olimpiadele claselor, V, VI, VII; însă poate trimite soluţii la problemele propuse pentru şcoala de 7 ani în ultimele trei numere apărute ale G.M.F.—B. Unele numere din G.M.F.—B din anii I—V sînt epuizate, de asemenea şi unele broşuri apărute în Biblioteca Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice, sînt epuizate. Pentru procurare de numere răsleţe din G.M.F.—B şi Matematikai es fizikai lapok vă puteţi adresa la: «Librăria Academiei R.P.R.», Bucureşti, Calea Victoriei 27, serviciul «Cartea prin poştă».

— Tov. *Nicolae N. Ghelmeziu*, clasa VII. s. m. 1, București. — La problemele propuse din eroare cu două numere de ordine, puteți trimite numai odată soluția lor comună.

— Tov. *Nelu Stăncescu*, clasa X, Giurgiu. — Articolul ce ați trimis spre publicare cu titlul: Rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de gradul II, ca fiind original, nu prezintă nici o noutate. Afirmația ce faceți asupra repartizării numerelor prime de către Euclid, nu este justă. Asupra datelor istorice era bine să indicați sursa de unde v-ați informat pentru un control mai ușor de făcut.

— Tov. *C. Rotaru*, student; *Doru Tomoioagă*, elev, Sighet; *Traian Voicu*, elev Slatina; *Petre Mecea*, Cetan-Cluj. — Ne bucură angajamentele ce ați luat de a colabora intens la G.M.F.—B și bunele aprecieri asupra conținutului revistelor G.M.F.—B de care vă folosiți în studiul individual și rezultatele obținute. Continuați să faceți cunoscută revista și altor colegi.

— Tov. *Marcel Bîscă*, elev Focșani; *Valeriu Hulubei*, elev Craiova; *Mircea Zilbermann*, elev Bacău și alți colaboratori. — Sugestiile trimise asupra soluționării a cît mai multe probleme și publicare în fiecare număr de note matematice se vor înfăptui treptat.

— Tov. ing. *N. Gribincea*, profesor Brad. — Am primit înscrierea de participare la întrecerile pe țară. Punctajul total obținut se împarte la numărul total al claselor paralele ale grupului școlar minier Brad.

— Tov. *Ion D. Grigorescu*, elev R. Vîlcea. — Am primit date asupra organizării și funcționării cercului de matematici condus de tov. prof. Lucian Mănescu. Remarcăm popularizarea G.M.F.—B și activitatea la G.M.F.—B ce se dezvoltă printre membrii cercului de matematică. Cererea de participare la întrecerea între școli pe anul 1956, trebuie să arate numărul de clase paralele de învățămînt mediu și să aibă semnătura directorului și ștampila școlii.

— Tov. *Gurzău Cornel*, Orașul Stalin. — Volumele pe care le doriți contra cost sau împrumut sînt epuizate. La librării sînt însă, alte cărți de analiză matematică și de geometrie analitică de alți autori care de asemenea vă pot fi de folos.

— Tov. *Alex. Pop*, elev Blaj. — Am primit datele trimise asupra activității extrașcolare la matematici a elevilor din școala medie Blaj. N-am primit însă, cererea de participare la întrecerea între cercurile de matematică și fizică din școli pe 1956.—Pentru ca membrii cercului de elevi să nu rămînă fără numere din G.M.F.—B este bine să se aboneze prin oficiul poștal local, primind chitanța de abonament.

— Tov. *Nicolai Chiarcea*, clasa IX Adjud. — Dacă nu există cercuri de matematică și nici de fizică și nu s-a ținut nici Olimpiada de Fizică pe școală vă puteți adresa direcției școalei pentru a se lua măsuri de lichidare a acestor lipsuri. — Pentru neprimirea unor numere din G.M.F.—B elevii abonați pot reclama serviciului de expediere a presei, Piața Scînteii nr. 1, București, anexînd în copie chitanța de abonament.

— Tov. *Leonte Aristide*, elev București. — Soluțiile problemelor ce ați trimis nu pot fi anunțate la rubrica rezolvitorilor din mai multe motive, ca de exemplu: sînt scrise mai multe probleme rezolvate pe aceiași foaie, nu arătați clasa și școala din care faceți parte, mai ales că trimiteți și soluții la problemele pentru școala de 7 ani, iar numărul total este mai mic de zece soluții. Citiți modul de redactare publicat în unele numere ale G.M.F.—B și înlăturați lipsurile menționate.

— *Mai multor colaboratori.* — Fiecare problemă să fie rezolvată pe cîte una filă simplă sau dublă, însă de formatul caietului obișnuit, să fie așezate în ordinea numerică într-un plic, preferabil de același format ca al caietului obișnuit și expediate pe adresa « Gazeta Matematică și Fizică », *Seria B*, str. Academiei nr. 14, București I. Pe plic în partea opusă adresei se va scrie numele rezolvitorului, clasa, școala, adresa și localitatea.

— *Premianții și menționații G.M.F.—B* pe anul 1955 publicați în nr. 2, pag. 78 care nu au primit cărțile acordate, sînt rugați să ne trimită pe o carte postală adresa unde să se facă expedierea pachetului cu cărți; iar după primirea lor *să ne confirme aceasta, tot printr-o carte poștală.*

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

În cursul lunii noiembrie 1955 s-au evidențiat următorii rezolvitori de probleme :

— *Bărbuică C. Nicolae* (cl. X Craiova), *Arsenovici Tiberiu* (cl. X Timișoara), *Panaitopol V. Laurențiu* (cl. X Giurgiu), *Rotaru Nicolae* (cl. VII Suceava), *Focșeneanu Ion* (cl. X Tg. Neamț), *Grosu T. Florin* (cl. X Galați), *Emanoil Alexandru* (cl. 9 S. m. 1 București), *Donescu Șt. Dragomir* (student București), *Hulubei Valeriu* (cl. X Craiova), *Bucur D. Gheorghe* (cl. X Pucioasa), *Hărăboi Mihai* (cl. X Bacău), *Alexa Dumitru* (student Iași), *Stănciulescu Mihai* (cl. X Tîrgoviște), *Dinu Gheorghe* (cl. X Craiova), *Jurca Valeriu* (cl. X Ploiești), *Grigorescu D. I.* (cl. X R. Vîlcea), *Botoran I. Petre* (cl. X Giurgiu), *Cristea Aurel* (cl. X Focșani), *Stepan Ionel* (anul III hidro Constanța), *Andricioaiei Gheorghe* (cl. IX Botoșani), *Vasiliev Lucia* (anul III hidro Constanța), *Viorel Grigore* (absolvent Darabani), *Maricel Partenie* (cl. X Focșani), *Bușe Constantin* (cl. IX Focșani), *Bigan Stan* (absolvent Giurgiu), *Gervescu Ion* (cl. VIII P. Neamț), *Enescu I. Nicolae* (cl. X R. Vîlcea), *Hegedüs Attila* (cl. X Tg. Mureș), *Opriș Ioan* (absolvent Zalău), *Voinea I. Alexandru* (cl. X Craiova), *Draica Constantin* (cl. IX S.m. 4 București), *Velicescu Mircea* (cl. VII Tg. Jiu), *Ciobotaru Constantin* (cl. X Trușești), *Cușmaru Ilie* (cl. IX Iași), *Feldman Milu* (cl. IX Iași), *Sor Liber* (cl. IX Iași), *Stegărescu Sorin* (cl. X Iași), *Stngeorzan Emil* (cl. X Năsăud), *Hoța Maricel* (cl. X Tg. Mureș), *Zilberman Mircea* (cl. X Bacău), *Bogdan P. Mircea* (cl. X Ploiești), *Popa Adrian* (cl. X S.m. 17 București), *Stănculescu Adrian* (cl. X Craiova), *Petrescu Aristide* (cl. X Buzău), *Ștefănescu Dan* (cl. X Ploiești), *Dumitrescu Ilie* (cl. X R. Vîlcea), *Schweinert St. Ioan* (cl. X Reșița), *Mihăileanu N. Constantin* (cl. IX Timișoara), *Delu Ștefan* (cl. X Corabia), *Bărglăzan Mircea* (cl. X Timișoara), *Șafran Gavril* (cl. IX Pitești), *Hodor D. Constantin* (cl. VIII P. Neamț), *Păunescu I. Lucian* (cl. X S.m. 17 București), *Basarab Șerban* (cl. X S.M. 1 București), *Apostu Ioana* (cl. VII Păunești — Adjud), *Mașek Corneliu* (cl. VII Gurabarza — Brad), *Voinea Dorin* (cl. X Craiova).

Pînă la 1 decembrie 1955 s-au mai primit cîte cel puțin zece soluții bune la problemele propuse în numerele 7, 8, 9 și 10 ale G.M.F.-B de la următorii rezolvitori:

ADJUD. Școala de 7 ani din Păunești. Clasa VI — a. Chiriac Maria (E : 658, 680 692 — 694, 700, 703, 707, 709), Pintilie Florica (E : 641, 674, 680, 693 — 695, 700, 703, 709) Vasilachi Zarafina (E : 653, 656, 669, 679, 680, 685, 692, 693, 703, 709); clasa VII — a *Apostu Ioana* (E : 649. 679, 687, 690, 691, 693 — 696, 701, 703, 707, 709, 718 — 722, 728 — 730), Ignat Maria (E : 653, 656, 657, 662, 665, 668, 669, 678, 689, 691, 692), Șerban Ligia (E : 649, 679, 682, 685, 693 — 695, 700, 703, 709), Șerbănescu Cornelia (E : 677, 680, 687, 691, 693, 700, 701, 703, 707, 709), Stoica Neculai (E : 649, 677, 687, 691, 693 — 695, 700, 701, 703, 707, 709).

AIUD. Clasa IX — a. Bucurescu Sorin (Ocna Mureș) (1706, 714, 717, 730, 733, 737, 739, 754, 761, 774, 786, 788, 803, 820, 838, 844, 848, 851) ; clasa X — a. Suciu I. Ioan (1807, 808, 814, 816, 836, 837, 841, 844, 845, 861, 862).

ALBA IULIA. Absolvent Tosan Ilie (1738, 786, 792, 794, 810, 816, 819, 831, 832, 835, 837, 838, 841, 844, 851).

ALEXANDRIA. Clasa IX — a. Ploieșteanu Ion (1786, 787, 792, 803, 814, 816, 819, 830, 834, 838, 844, 867).

ARAD. Clasa VII — a. Glodeanu Rodica (E : 680, 683, 685, 687, 689, 690, 698, 703, 708 — 710, 716, 718, 722) ; clasa VIII — a. Glodeanu Mariana (1848, 851, E : 687, 693 — 695, 697, 698, 700, 701, 703, 704, 707 — 711, 713 — 716, 718, 722); clasa IX — a. Ghilezan Doina (1655, 656, 674, 681, 688, 692, 697, 730, 733, 738).

BACĂU. Clasa VIII — a. Alexandrescu Gheorghe (E : 707, 708, 716, 722, 724, 727, 729 — 731, P) ; clasa X — a. *Hărăboi Mihai* (1700, 705, 706, 714, 718, 726 — 734, 736 — 740, 742, 744, 745, 747, 750, 752, 754, 759, 763, 768, 770, 774, 775, 786 — 788, 792, 793, 795, 800, 816, 819, 822, 832 — 838, 848, 851, 854, 861), Vasiliu Monica (1740, 742, 759, 760, 774, 792, 918, 820, 822, 826, 838, 844, 848, 851, 867, 872, 874, 882, 884, 891, 898,), *Zilbermann Mircea* (1613, 700, 705, 760 759 — 838, 841, 843, 844, 846, 847, 849, 859, 861, 866, 872, 874 — 878, 881, 883 — 885, 891 — 894, 898, P).

BĂICOI (Ploeşti). Absolvent Jilăveanu S. Gheorghe (1729, 731, 732, 734, 735, 739, 744, 745, 747, 749, 752-756).

BOTOŞANI. Clasa IX-a. *Andricioaiei Gheorghe* (1627, 638, 640, 645, 654-656, 672, 673, 681, 688, 696-698, 701, 705, 724, 727, 730, 736, 744, 745, 753, 762, 768, 769, 783, 813, 814, 816, 818, 822, 830, 844, 861, 875-877, 879, 882, 884), Arion Adrian (1666-669, 673, 677, 692, 694, 696, 698, 701, 727, 733, 734, 736, 738, 751, 754, 762, 768, 814, 816, P), Iancu Tili (1663, 677, 685, 688, 689, 727, 730, 733, 747, 775), Lămătie Gheorghe (1654, 655, 668, 672, 673, 682, 696-698, 724, 730), Rotenberg Martin (1666, 674, 685, 688, 683, 694, 696, 697, 701, 727, 730, 733, 738) ; clasa X-a. Breazu Florin (1726, 728, 734, 735, 738, 744, 745, 747, 754, Buimovici Marlene (1727, 730, 733, 738, 744, 747, 750, 760, 768, 774, 775), Freiberg Ella (1663, 677, 680, 685, 688,727, 730, 733, 760, 774, 775), Hîncu Coleta (1727, 730, 733, 738, 744, 747, 750, 760, 768, 774, 775), Mozes Etti (1663, 677, 685, 688, 689, 727, 730, 733, 747, 760, 775), Sin Moise (1655, 664, 685, 688, 689, 727, 730, 733, 774, 775).

BRAD (Hunedoara). Şcoala de 7 ani Gurabarza. Clasa VII-a. *Maşek Corneliu* (E : 654, 657, 662, 667, 669, 673, 676, 678, 681, 682, 684, 685, 689, 690, 694, 697, 698, 701, 704, 707,) ; clasa X-a. Trifu Florin (1727, 730, 732, 733, 737, 738, 739-743, 759, 775, 799, 803).

BRĂILA. Clasa VIII-a. Florea Dorin (E : 608, 649, 650, 687, 708, 710, 713, 716, 718, 720, 721).

BUCUREŞTI. Studenţi : *Donescu Şt. Dragomir* (Inst. Politehnic)(1725-749, 751-755, 758, 760, 762, 763, 768, 770, 772, 774-776, 781, 784, 786, 799-801, 803, P), Florescu G. Mircea (Inst. Politehnic)(1730, 734, 816, 827, 835, 837, 857, 866, 871, 873, P), Mihalache Traian (1718, 726-728, 730, 733, 735, 738, 747, 754, 762, 763, 783, 799, 816, 825, 830 832, 833, 836, 837, 839, 841-845, 847, 872, P), Popovici I. Radu (Fac. Mecanică) (1799, 835, 841, 843, 875-877, 882-884), Purcaru I. George (Fac. Matematică) (1625, 628, 633, 635, 636, 639-653, 681,685-689 691, 693, 695, 701,706, 721), Trister Avram (f. f. Fac. Matematică)(1781, 784, 786, 814, 816, 827, 828, 834, 835, 837, 838, 841, 843, 844, 858, 860, 877, 882-884, 891, 898, 911, P), Truică N. (1602, 610, 615-617, 620, 624, 627-629, 631, 633, 634, 700, 705, 706, 711). *Absolvenţi*. Pachtinger W. Simion (1830, 835, 837, 842, 861, 875, 877, 879, 880, 881, 884, 890, 891, 914), Tudor Mihai (1783, 787, 799, 800, 816, 819, 830, 833-835, 837, 841, 844, 847, 848,851,874-878, 882, 884, 891, 894, 898).

Şcoala medie nr. 1 « *N. Bălcescu* ». Clasa VII-a. Zamfirescu Tudor (E: 652, 653, 656-658, 668, 669, 672, 673, 678, 683, 685) ; Ghelmeziu N. Nicolae (1803, 819, E : 680, 683 685, 686, 689, 694, 695, 701, 718) ; clasa IX-a. Cipere I. Lucian (1786, 787, 788, 792, 803, 820, 848, 851, 866, 867), *Emanoil Alexandru* (1727, 728, 730, 733-740, 742, 744, 745, 747, 748, 750, 760, 761, 768, 772, 774, 780, 783, 787, 788, 792, 796, 803, 811, 813, 816, 819 820, 822, 831-833, 835-838, 841, 843, 844, 847, 848, 851, 857, 861, 863, 866, 867, P) ; clasa X-a. *Basarab Şerban* (1438, 542, 586, 640, 654, 688, 701, 706, 726-728, 730, 740, 747, 768, 772, 779, 781-783, 786, 787, 800, 814, 832, 834, 853), Moraru Florentin (1646, 672, 674, 688, 727, 728, 730, 739,740, 760, 786, 787, 792, 803, 830, 835, 837, 838, 851), Schileru I. Dinu (1830, 838, 841, 843, 844, 875, 877, 882, 883).

Şcoala medie nr. 2. Clasa IX-a. Ţurcanu Aurel (1668, 681, 714, 721, 726, 727, 730, 736, 752, 754, 768, 786, 851).

Şcoala mixtă nr. 3. Clasa VII-a. Iachim Alexandru (E : 682, 689, 691, 693-695, 697, 698, 700-704, 706, 707).

Şcoala medie nr. 4 « *Aurel Vlaicu* ». Clasa VIII-a. Ştefănescu Viorel (1784, 800, 812, 816, 851, 914, E : 682, 692, 693, 708, 709, 718, 722, 727, 729, 731), Udrea Dumitru (1851, E : 672, 682, 707, 709, 714, 718, 727, 729), Zaharia Ştefan (E : 695, 697, 700, 703, 704, 707--709, 713, 715) ; Clasa IX-a. Badea Costel (1816, 830, 832, 834, 851, 863, 875, 876, 882, 884), Bucur V. Virgil (1820, 822, 832, 834, 851, 875, 882, 898, 899), Chira Mircea (1800, 803, 827, 830, 832, 834, 838, 851, 867), Ciurea Ilie (1,34, 838, 851, 867, 875, 882, 884, 885, 892), Ciltea Gheorghe (1818, 827, 830, 831, 838, 834, 851, 875, 876, 882), *Draica Constantin* (1691, 697, 715, 731, 733, 735, 739, 742, 743, 760, 766, 774, 775, 787, 792, 800, 803, 819, 822, 838, 842, 849, 851, 867, 882, 883, 894, P), Imbăruş Horia (1816, 822, 830, 831, 851, 863, 875, 877, 882, 884), Ionescu Gh. Mircea (1820, 822, 830, 832, 834, 845, 851, 863, 875, 882-885, 887, 891, 898, 908, 913, 914), Matei V Gheorghe (1816, 820, 830, 851, 863, 866, 875, 882, 884, 914), Mustaţă Boris (1820, 830, 832, 834, 851, 875, 8785, 882, 884), Schwartz Arnold (1816, 838, 861, 863, 867, 875, 882, 884, 914), Şerbănescu Ovidiu (1816, 820, 830, 832, 834, 838, 851, 875, 882, 884), Stoica Lucian (1816 822, 830, 831, 838, 851, 867, 877, 882, 886), Voinescu, Constantin (1800, 803, 827, 830, 831, 832, 834, 838, 851, 867), Zambet Daniel (1834, 838, 851, 861. 875, 882, 884, 885, 893) ; Clasa X-a. Crăciun Gh. (1726-728, 730, 733, 734, 736, 830, 844, 847), Ivănică Alex. (1808, 813, 814, 816, 819, 820, 822, 830, 833, 835, 838, 844, 851, 867, 874), Oblemenco Gabriel (1814, 833, 835, 844, 851, 866, 876, 877, 878, 882, 891), Pătraşcu Sorin (1793, 874-878, 881-884, 891, 894, Popa Gheorghe (1730 738-741, 743, 760, 776, 794, 800, 801, 816, 820-822, 833, 838, 844, 881, 891), Russo I. Ioan (1814, 875-878, 881, 882, 884, 891, 914), Ştefănescu Radu (1838, 844, 851, 875, 876, 877, 881, 882, 884, 894), Ţigăneu Radu (1814, 844, 874, 875-877, 881, 882, 884, 891), Zgreabăn Ion (1ş67, 568, 570, 727, 728, 730, 733-735, 747, 759, 876, 875, 882, 884).

Şcoala medie de băieţi nr. 7 « *I. L. Caragiale* ». Clasa X—a. Stroe Gh. Victor (1634, 816, 835, 836, 841, 844, 847, 851, 872, 876, 880, 883).

Şcoala medie de fete nr. 8 Clasa VI—a. Mazilu Gabriela (1842, E : 540, 623, 686, 687, 697, 707—710, 715, 718, 722).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa VII—a. Predoescu Marieta (1730, 733, E:697, 682, 684—686, 688, 689, 690—692).

*Şcoala medie nr.*11 «*D. Cantemir*». Clasa VIII—a. Schiopulescu Dan (E:657, 659, 673, 679, 680, 682, 683, 685, 688, 690, 694, 695); clasa X—a. Corbu Ion (1814, 816, 830, 834, 835, 837, 842, 844, 868, 851, 867, 875, 876, 880—883,), Popescu Paul Roger (16-98, 701, 706, 707, 711, 718, 726, 730, 733, 821).

Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa VII—a. Popescu Ovidiu (E:669, 670, 670, 672, 676, 680, 682, 685, 689, 700, 701, 703, 704,) ; clasa VIII—a. Croitoru C. Florin (1655, 694, 697, 730, E: 633—665, 670, 678, 686, 689,) ; clasa X—a. Dobre Ion (1727, 732, 737, 740, 742, 743, 787, 803, 816, 819), Flueraşu Cezar 1617, 618, 759, 779, 780, 781, 786—788, 792—794, 796, 798, 800, 801, 803), Ionescu Dan (1727, 728, 730, 732—735, 737, 743, 744, 754, 759), Saganai A. Nusfert (1726—730, 732—734, 736—738, 750, 754).

*Şcoala medie de fete nr.*15. Clasa X—a. Teodorescu Viorica (1655, 656, 681, 688, 706, 707, 728, 730, 736, 830, 831, 835, 837, 841, 844).

Şcoala medie nr. 17 Clasa VIII—a. Bogoiu Valentin (1848, 849, 851, 867, E: 708—710, 714, 718, 722), Oprică I. Mihai (1672, E:653—656, 658, 659, 662, 665, 668), Vlad A. Şerban (E: 682, 684, 685, 689, 690, 692, 698, 707, 708, 718, 722) ; clasa IX—a. Ceapîru Mihai (1760, 761, 772, 774, 786, 786, 788, 814, 816, 820,) ; clasa X—a. Avram Aurel (1726, 728, 730, 733—736, 738, 740, 742, 743, 747, 759, 760, 762, 774, 786), Brohovici Sorel (1727, 728, 730, 733, 742, 739, 759, 770, 819, 835). Colireu Ignatz (1807, 813, 819, 820, 835, 838, 842, 844, 851, 861, 863, 866), Herşcu Sergiu (1816, 819, 831 835—837, 851,

877, 881—884), *Păunescu I. Lucian* (1725, 733—736, 730, 738, 740, 742, 744—746, 752, 753, 759, 774, 775, 781, 786—788, 792, 793, 800, 803, 816, 819), *Popa Adrian* (1725—728, 730, 733—736, 738—740, 742, 744—746, 747, 752—754, 759, 762, 772, 774, 784, 786, 787, 792, 793, 800, 803, 816, 819, 820, 822, 822), Spirescu Mihai (1727, 728, 730, 740, 742, 744, 803, 819, 822), Tudic Meri (1726—728, 730, 732,—734, 736, 740, 742, 752, 759, 775),

Şcoala medie de băieţi nr. 18. Clasa VII—a. Enişteanu M. Nicolae (E:691, 696, 699, 703, 710, 714, 716, 718, 721, 722); clasa X—a. Petrescu Lucian (1798, 799, 803, 814, 822, 824, 833, 835, 837, 841, 842, 844, 874, 877, 881 882, 884, 889, 891), Enescu Mihai (P), Schneider Ion (1781, 786, 788, 792, 800, 803, 813, 814, 818—820, 822).

Şcoala medie nr. 20. Clasa VIII—a. Berceanu Tedy (E: 687, 708, 709, 715, 718, 724, 725, 733, 761, 767, 778), Bogdan Alecu (E: 672, 676, 679, 608, 694, 697, 700, 703, P); clasa X—a. Ene Ion (1701, 706, 714, 721, 724, 727—730, 732—738, 742—745, 747, 752—754, 774, 775, 783, 787, 793), *Iorgulescu Alexandru* (1542, 753, 781, 804, 812, 814, 816, 818, 825, 826, 832, 835, 837, 838, 851, 861, 862, 866, 876, 877, 881—883, 886, 891, 898, 908, 911, 914).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa VIII—a. *Ivănceanu Tatiana* (1783, 800, 816, 830, 832, 834, 838, 842, 851, 842, 851, 858, E:680. 682, 686, 689, 690, 691, 703, 708, 713, 718 722); clasa IX—a. Butoi Mihaela (1783 784, 800, 816, 830, 831, 832, 834, 838, 842, 844, 851, 858).

Şcoala de 7 ani de băieţi nr. 119. Clasa VI—a. Mira Eugen (E:670, 676, 680, 681, 682, 686, 689, 694, 701, 704).

Şcoala de 7 ani de fete nr. 120. Clasa V—a. Mira Constanţa (E: 680, 683, 685, 692, 693, 695, 597, 700, 703, 707). Săndulescu R. Iustin (1810, 814, 819, 820, 822, 834, 842, 843, 848, 851, 866, 867).

BUZĂU. Clasa X—a. Petrescu Aristide (1786, 792, 793, 800, 803, 814, 819, 820, 822, 832—835, 837, 838, 841—844, 847, 848, 851, 859, 961, 966, 875, 876, 879 881, 883, 884).

CIMPINA. Clasa X—a. Liess Gerhard (1768, 775, 786, 787, 792, 793, 808, 816, 819, 800, 827, 830, 833, 835, 836, 838, 844, 851, 882, 891, P).

CALAFAT. *Absolvent* Caraş Nicolae (1655, 657, 667, 668, 670, 674, 677, 681, 685, 689, 694—696, 698, 706).

CIMPULUNG MUSCEL. Bratu Gheorghe (1842, 843, 877, 882, 914, E:649, 653, 663, 664, 670, 675, 676, 686, 689, 708, 718, 719, 722, P).

CARANSEBEŞ. Clasa IX—a. Haţegan Cornel (1666, 673, 681, 696, 698, 714, 724, 730, 733, 738, 760, 775, 782, 786, 788, 792, 800, 801, 818—820, 822, 838, 844, 848, 851, 867, P).

CĂLĂRAŞI. Clasa IX—a. Strătescu Ion (1816, 819, 822, 829, 830, 831, 838, 844, 848, 851, 858, 864, 872, 875, 882, 884, 898, 913, P). Absolvent Dudă Nicuşor (1561, 563, 564, 567, 568, 570, 574, 635, 636, 640, 697, 701, 706, 737, 738, 740, 744, 746, 759, 775, 776).

CERNAVODĂ. Clasa IX—a. Preda Ion (1778, 792, 803, 818, 819, 822, 827, 838, 844, 848, 851, 867, 875); clasa X—a. Tănase Vasile (1676, 786, 792, 793, 814, 819, 822, 835, 838, 844, 851, 861, 867, P).

CLUJ. Student Mureşan Traian (P); clasa VII—a. Braşoveanu Alex. (E:693, 695, 701, 703, 709 715, 718, 720—722), Ciceu Elena (E:693, 695, 701, 703, 709, 715, 718, 720—722), Man Ana (E: 638, 658—655, 657, 668, 679, 680, 682, 684, 685, 692, 693, 695, 701, 703, 709, 715, 718, 720—722), Trifan Gheorghe (E:693, 695, 701, 703, 715, 718, 720—722,); calsa VIII-a. Mînăştureanu Florica (1838, 848, 851, 862, 867, E: 687, 709 714, 718, 721, 727); C asa IX-a. Bîrzan Romanel (1795, 805, 829, 830—832, 842, 846, 847, 876).

CONSTANŢA. Clasa VIII-a. Simion Eugen (1844. E' 694-699, 703, 708, 709, 714, 721, 727); clasa IX-a. Anghel Constantin (1726, 727, 730, 733 — 736, 762, 768, 774), Ianuş

I. Stere (1727, 726, 737, 754, 769, 772, 774, 784, 800, 814, 819, 822, 822, 838, 844, 847, 849, 851, 863, 866, 876, 882, 884, P); clasa X-a. Manolescu Ilie (1727, 728, 730, 732 — 734, 736, 738, 740, 742, 744, 745, 747, 759, 763, 768, 771, 774, 775, 786, 787, 792, 793, 803); elev anul III hidro. Muţu Dumitru (E; 653, 655, 656, 656 b, 657, 663, 668, 670, 672, 679, 680, 683, 685, 689), *Stepan Ionel* (1470, 542, 703, 706, 707, 709, 720, 725, 728, 730 — 734, 742, 743, 754, 762, 763, 786, 792, 803, 819, 822, 830, 831, 833, 836, 837, 837, 844, 848, 851, 874 — 876, 882 — 884, 891,) *Vasiliev Lucica* (1470, 539, 542, 618, 668, 673, 674, 685, 687, 680, 689, 691, 693 — 695, 703, 705, 706, 707, 709, 717, 720, 727, 728, 730, 732 — 734, 737, 742 — 754, 762, 763).

CORABIA. Clasa VII-a. Begea Constantin (1818, 851, E: 649, 672, 677, 687, 694, 695, 696, 700, 716, 718, 720, 725, 727, 729, 731,); clasa X-a. *Delu Ştefan* (1809, 818, 820, 822, 830 — 835, 838, 843 — 846, 851, 866, 872, 874, 875 — 878, 881 — 884, 889, 891, 904, 914,), Şarpe Dumitru (1455, 548, 695, 699, 719, 759, 760, 808, 809, 816, 820, 822, 828, 830 — 836, 838, 847, 851).

CRAIOVA. Clasa X-a. *Bărbuică C. Nicolae* (1466, 469, 470, 548, 617, 654 — 658, 660, 663, 666, 668, 675, 672, 674, 676 — 678, 681, 683 — 690, 692, 694 — 696, 698 — 701, 703, 705, — 707, 711, 714, 715, 717, 718, 720, 724, 726 — 728, 730 — 733, 736 — 738,741, 743, 744, 747, 749, 751, 754, 759, 580 — 582, 785. 786, 788, 789, 793 — 796, 799, 800, 801, 803, P), Căluţoiu Ion (1662, 718, 733, 734, 736, 740, 742, 747, 772, 775, 793, 830, 835, 837, 838, 848, 851, 861, 866), *Dinu Gheorghe* (1466, 469, 470, 613, 617, 618, 635, 636, 700, 701, 705 — 707, 711, 714, 715, 718 — 720, 724, 726, 731, 732, 743 — 749, 751 — 754, 759, 760, 762, 766, 768, 772, 774 — 776, 783 — 787, 792 — 795, 800, 801 803, 870, P), *Hulubei Valeriu* (1729, 733, 734, 744, 745, 751, 759, 768, 770, 778, 779, 792, 795, 796, 807, 814, 830 — 838, 840 — 842, 848, 851, 874 — 878, 881 — 884, P), Pleşoianu C. George (1726 — 728, 730, 733, 735, 747, 752, 753, 759, 799, 827), Răducanu Gheorge (1730, 732, 744, 747, 752, 754, 760, 803, 819, 835, 838), Roşca Valentin (1775, 776, 778, 784, 787, 794, 801, 803, 819, 821, 827, 828), *Stănculescu Adrian* (1618, 668, 759, 768, 783, 792, 793, 799, 800, 803, 806, 808, 814, 816, 818 — 822, 827, 828, 844, 848, 849, 851, 859, 861, 864 — 867, 872), *Voinea I. Alex.* (1469, 670, 793, 807, 808, 812, 814, 816, 819, 820, 830 — 833, 835 — 838, 840, 841, 843 — 845, 847, 848, 851, 852, 861, 866, 868, 875), *Voinea Dorin* (1726 — 728, 730 — 735, 737 — 739, 744, 746 — 748, 753, 754, 759, 760 — 762, 774, 776, 778), absolvent Lazăr Stelian (1701, 706, 707, 714, 715, 719 — 721, 724, 727, 730, 733 — 745, 747), student Iordache P. I. (1833, 837, 844, 859, 874, 876, 878, 881, 883, 884, 894,).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa X-a. Simion Gheorghe (1696, 687, 694, 697, 700, 707, 710, 715, 721, 803, 816, 819, 827, 848, 867).

DARABANI. Absolvent. *Viorel Grigore* (1622, 629, 640 — 642, 649. 650, 662. 663, 666, 670, 681, 683, 685 — 690, 695, 697 — 699, 727, 730, 732 — 738, 744, 747, 750, 752, 772, 774, 775, 783, 785, 803, 837, P).

DEJ. Clasa X-a. Silaghi Alexandru (1759, 760, 774, 775, 787, 803, 819, 820, 848, 848, 851).

FOCŞANI. Clasa VIII-a. Dinulescu Horia (1640, 648, 668, 680, 697, 714, 730, 733, 735, 759, 760, 774, E: 647, 650, 652, 653, 656, 669, 670 — 672, 674, 679, 680 — 683, 703, 708, P); clasa IX-a. *Buşe Constantin* (1616, 618, 622, 623, 636, 662, 679, 698, 708, 714, 734, 741, 752, 759, 760, 776, 783, 792, 793, 801, 808, 822, 832, 833, 837, 847, 851, 871, 875, 877, 879, 882, 883, 891, 893); clasa X-a. Celan Romulus (1728, 730, 731, 733, 736, 740, 742, 743, 747, 752, 759, 774, 775, 776, 782, 793, 803, 810, 811, 819, 867), *Cristea Aurel* (1466, 608, 610, 612 — 628, 631 — 634, 637, 643, 644, 648, 649, 654 — 656, 658, 660, 664 — 666, 668 — 670, 672 — 677, 679, 681 — 691, 693 — 701, P), *Maricel Partenie Biscă* (1615, 616, 618, 621 — 623, 632, 633, 635, 636, 640, 643, 644, 645, 647,

649, 650 — 653, 655, 662, 666, 672, 674, 698, 701, 706, 710, 733, 740 — 743, 747, 748, 752, 759, 760, 774, 776, 786, 788, 792, 793, 801, 803, P), Savian Maria (1665, 672, 673, 688, 707, 716, 719, 724, 728, 759), Tigănuș Mircea (1574, 660, 662, 683, 696, 728, 730, 733, 736, 746, 747, 752, 768, 783, 781, 824, 833, 834, 837, 844, 861, 866, 867, P), Tehnician Arghir B. George (1730, 733, 735, 738, 741 — 743, 760, 761, E: 669, 670).

GALAȚI. Clasa VIII-a. Allan Niculae (1851, E: 701, 703, 708, 713, 714, 716, 718, 722), Căproiu D. Petre (1812, 827, E: 693, 694, 697, 698, 700, 703, 704, 707, 718), Giurgea Victor (1816, 851, E: 697, 703, 704, 707 — 710, 713, 716, 718, 722); clasa IX-a. Mihai C. Tudorache (1726, 730, 744, 786, 816 820, 822, 831, 838, 842, 848, 851); clasa X-a. *Grosu Gh. Florin* (1654 — 701, total 48 soluții), Sbiera Mihai (1706, 721, 727, 728, 730, 733, 735, 736, 747, 752, 835, 837, 844,).

GIURGIU. Clasa X-a. *Botoran I. Petre* (1701, 705, 711, 714, 724, 726—728, 730 — 734, 736 — 740, 742 — 746, 749, 751, 754, 759, 760, 762, 768, 772, 774, 775, 781, 783, 785 — 788, 792 — 795, 799, 800, 801, 803, 806, 810, 811, 816, 821, 825, P), *Panaitopol V. Laurențiu* (1438, 470, 548, 747, 770, 779, 784, 787, 788, 795, 803, 807, 808, 814, 816, 818 — 820, 822, 830, 832 — 835, 837, 848, 843 — 845, 847, 848, 851, 858, 861, 863, 866, 867, 871, 874, 875 — 877, 882 — 834, 886, 889, 890, 892, 898, 901, 908, 911, 913, P), Sin Alexandru (1701, 708, 724, 781 — 783, 786 — 788, 792 — 795, 799, 800, 803, 807, 808, 810, 811, 812, 816, 819, 820, 822, 825, 833, 844, 849, 851, P), Stăncescu Emil (1701, 705, 727, 728, 732, 759, 772, 775, 781 795, 800, 806, 816, 825), absolvent *Bigan Stan* (1653, 663, 666 — 675, 681 — 685, 688 — 691, 693, 694, 706, 707, 726 — 730, 733, 734, 741, 743, 759, 760, 763, 786, 800).

IAȘI. Clasa IX-a. Cișleag Florin (1726—728, 730, 762, 766, 768, 784, 800, 809, 814, 816), Crișu Costică (1809, 814, 816, 821, 834, 842, 851, 875, 882, 898, 902), *Cușmaru Ilie* (1725—727, 730, 733, 734, 736, 744, 745, 753, 754, 755, 758, 762, 768, 781, 789, 798, 800, 809, 814, 816, 820, 831, 844, 847, 851, 858), Cuza Constantin (1726, 730, 733, 734, 736, 738, 753, 786, 774, 798, 809, 814, 816, 823, 831, 834, 838, 848, 851, 856, 875), Feldman Milu (1725—727, 730, 733, 734, 736, 744, 753, 754, 758, 760, 762, 768, 774, 809, 814, 816, 820, 822, 830—832, 834, 838, 842, 844, 871), Grisaru Iancu (1726, 727, 733, 734, 736, 738, 753, 755, 768, 809, 814, 816, 820, 823, 831, 834, 851, 856, 882, 898), Soil Leib (1726, 730, 733, 734, 736, 738, 753, 768, 774, 798, 814, 816, 831, 832, 834, 851, 856, 858, 866, 882, 898), *Sor Liber* (1725—727, 730, 733, 734, 736, 738, 744, 745, 753, 754, 760, 762, 768, 774, 809, 814, 816, 820, 822, 823, 829, 830, 831, 831, 834, 842, 844, 871, P), Țibuleac Florin 1662, 714, 724, 730, 732, 733, 738, 742, 774, 775); clasa X-a. Antonovici Constantin (1727, 728, 730, 733, 742, 774, 775, 784, 787, 803, 819), Brînză Mircea Alex. (1727, 728, 730, 731, 733—736, 740, 759, 775), Burghelea Sergiu (1728, 730, 733, 736, 742, 744, 774, 775, 779, 781), Caşcaval Constantin (1727,—730, 733, 742, 750, 759, 766, 768, 775, 780, 787, 792, 799, 816), Croitoru Elena (1784, 787, 792, 793, 808, 814, 818, 819, 838, 842, 848, 851, 863, 876, 881, 882, 908, 911, 913), Panțuru Dumitru (1725, 730, 733, 734, 736, 740, 747, 752, 774, 775, 786, 792, 793, 804, 818, 823, 828, 851, 860, 863, 866, 867), Roman Valeriu (1727, 730, 733, 735, 738, 742, 750, 755, 766, 768, 775, 780, 787, 792, 799, 816, 820), *Stegărescu Sorin* (1727, 728, 730, 733, 735, 736, 738, 739, 742, 744, 745, 747, 765, 766, 768, 774, 775, 779, 787, 792, 799, 800, 803, 804, 814, 816, 819, 825), Stoica Constantin (1531, 536, 539, 542, 561, 564, 567, 574, 575, 580, 582, 640, 683, 697), *Școala pedagogică*, anul II. Mertic Maria (1730, 800, 809, 816, 827, E: 638, 640, 669, 671, 672, 673, 676, 677, 680, 683, 684, 687—689, 690, 691, 708, 731), Todiraș Ioan (1676, 680, 682, 687, 708, 709, 713, 718, 722, 730), absolvent Ghenea Constantin (1726, 728, 730, 733, 735—737, 747, 752, 759, 762, 763, 875, 876, 882, 891). Studenți: Alexa Dumitru (1655, 657, 677, 695, 716, 732, 739, 756, 783, 784, 790, 800, 802, 803, 807, 808, 813, 815, 816, 822, 825, 827, 830—833, 835, 837, 838, 845, 848, 851, 857, 861, 862, 866, 872, 879),

Rotaru Constantin (1798, 814—816, 819, 825, 835, 837, 841, 857, 859, 861, 862, 866, 871, 872, 875, 880, 882, 885, 884, 889, 890 891, 898, P).

LUGOJ. Clasa VIII-a. Bogdan Radu (E: 679, 680, 682, 683, 689, 693—695, 700, 701, 703), Boja Nicolae (E: 682, 684, 685, 691, 700, 701, 703, 707—709, 718), Buba Arist (E: 672, 674, 676, 682, 689, 690, 693, 695, 696, 701, 702, 708, 709), Sufană Constantin (1851, E: 679, 689, 697, 698, 707, 714, 718, 719, 721, 722); clasa IX-a. Daba Dumitru (1714, 732, 733, 735, 736, 738, 746, 754, 760, 792, 803, 822, 827, 832, 834, 836, 838, 844, 851, 872), Florea Dorel (1727, 734, 735, 736, 738, 744, 745, 749, 751, 754, 768, 800, 803, 814, 822, 830, 831, 842—844, 847, 867, 871, 872), Păpuşoi Gh. (1784, 786, 792, 800, 803, 831, 832, 834, 836, 838, 843, 844, 846, 849, 851, 856, 866, 867, 871); clasa X-a. Porumbaru Silviu (1727, 728, 730, 804, 807, 808, 810, 817, 820, 822, 824, 825, 828, P), Surdulescu Sorin (1726—728, 730, 731, 744, 748, 753, 763, 765).

NĂSĂUD. Clasa X-a. *Stngeorzan Emil* (1567, 727, 730, 733, 734, 736, 737, 744, 747, 749, 798, 812, 814, 818, 823, 827, 830, 831, 834—836, 844, 851, 862, 863, 866, 871—873, P).

ORADEA MARE. Clasa IX-a. Enescu Cornelia (1726, 730, 731, 733, 734, 736, 738, 744, 750, 778), Nicoară Nicolae (1654—656, 726, 727, 730, 733, 734, 795, 800, 803, 849); clasa X-a. Buciuman Cornel (1726—728, 730, 732, 740, 751, 759, 762, 770), Spineanu Radu (1683, 688, 726, 728, 748, 800, 814).

ODOBEŞTI.Clasa X-a. Chitic Angela (1687, 716, 759, 763, 779, 799, 816, 835, 849),

ORAŞUL STALIN. Clasa VII-a. Climescu Mihai (E: 652, 653, 655, 663, 668, 676, 689, 700, 708, 710); clasa IX-a. Dragomir Adrian (1726, 728, 734, 744, 749, 762, 766, 768, 773, 770), Jinga Gh. (1562, 564, 565, 566, 568, 570, 577, 580); clasa X-a. Brînduş Lucian (1618, 662, 811, 819, 820, 822, 833, 835, 838, 840, 848, 851, 859,864, 867, 874—878, 886, 894), Măieran Mircea (1640, 642, 646, 649, 650, 681, 726, 736, 742, 819, Mezaroş Constantin (1701, 706, 726—728, 730, 733, 734, 736, 738, 750, 751), Minea Florin (1650, 667, 668, 672, 674, 681, 684, 696, 697, 698, 717, 721, 724).

PIATRA NEAMŢ. Clasa VIII-a. *Gervescu Ioan* (1727, 787, 803, 819, E: 679, 608—686, 688—690, 692—704, 706, 707), *Hodor D. Constantin* (1851, E: 585, 677, 680—683, 685—687, 689, 692, 693, 695, 700, 701, 707—709, 713, 714, 718, 721, 722, P); clasa X-a. Mitu Şt. Ioan (1701 706, 728, 730, 732—736, 738, 744, 746, 747, 750, 754, 763).

PETROŞANI. Student Savin I. Dan (1700, 701, 703, 705—709, 713—721, 724, P), muncitor Mihăilă Iosif (1618, E: 638—640, 642—644, 646, 647, 649, 650, 652).

PITEŞTI. Clasa VIII-a. Manda Dorin Octavian (E: 654—657, 659, 661, 664—669, 772—774); clasa IX-a. *Şafran Gavril* (1642, 658, 672, 673, 685, 688—690, 692, 727, 730, 733—735, 740, 742, 768, 787, 803, 807, 808, 814, 819, 827, 837, 844, 861, 871), absolvent Manda Simon (1618, 659, 666, 670, 670, 672—674, 690, 696, 726, 727, 729, 730, 733, 734, 735, 737, 741, 743, 744, 747, 750, 752, 754, 759, 768, 776, 778), Marin Ion (1726728, 730—736, 738, 751, 753, 759, 766, 768—770, 772).

PLOEŞTI. Clasa VIII-a. Ciobanu Romeo (1851, E : 697, 703, 708, 709, 718, 722, 727, 729, 731, 732), Dumitrescu Mircea (1851, E: 687, 700, 708, 709, 713, 714, 716, 729, 731) Dumitrescu Viorel (1848, 851, E: 682, 701, 703, 708, 709, 713, 714, 718, 720), Ivan Constantin (1823, 851, E : 687, 694, 700, 709, 710, 712, 722, 727, 729), Mignea Claudiu (1851, E : 697, 703, 708, 709, 718, 721, 722, 727, 729, 731, 732), Popescu I. Adrian (1851, E : 697, 703, 708—710, 714, 716, 718, 720, 727, 731), Tănăsescu Anton (1851, E : 689, 703, 707—709, 714, 718, 727, 729); clasa IX-a. Baltag Vasile (1613, 724, 727, 733, 734, 736, 738, 744, 745, 760, 775, 783, 786, 800, 803, 820, 822, 827, 848, 851, 861, 866, 867, 871, P), Delibaş Constantin (1701, 727, 734, 736, 739, 744, 762, 768, 772, 774, 786, 798, 800, 803, 816, 830, 831, 838, 848, 851, 861, 866), Pop Ştefan (1727, 730, 733, 768, 831, 844, 848, 849, 851, 852, 867, 871) ; clasa X-a. *Bogdan P. Mircea* (1701, 706, 707, 714, 717, 724—728, 730, 732—740, 742, 744—748, 751, 754, 759, 760, 762, 763, 772, 774, 775, P), Chirică Andrei (1725—734

736, 740, 742, 746, 747, 759, 760, 762, 763, 766, 771, 774, 775, 778), Văgăunescu George (1727, 728, 730, 733—738, 747, 752, 759, 760, 762, 763, 771, 774), Dinescu Sorin (1802, 818, 830, 835, 838, 844, 851, 875, 879, 880, 882—884, 852, 914), Georgescu Sorin (1706, 707, 734, 736, 739, 740, 742, 743, 759, 786, 787, 792, 793, 801, 803), *Jurea Valeriu* (1618, 662 701, 706, 707, 714, 719, 724, 727, 728, 730—740, 742, 744, 745, 747, 749, 751, 752 754, 759, 761, 772, 774—776, 779, 781, 783, 784, 786—789, 792—794, 800, 801, 803, P), Munteanu Silviu (1728, 730, 732, 737, 743, 747, 752, 783, 786, 787, 801, 833, 835, 837, 838, 848, 851), Roman Barbu (1726—728, 730, 733—736, 738, 740, 744), Şerbănescu Victor (1726—728, 730, 733—737, 746, 749, 753, 754, 759, 760, 768), *Şleţănescu Dan* (1714, 725, 727, 728, 730, 733—735, 739, 740, 743, 746, 759, 762, 763, 771, 774, 778, 781, 784—787, 793, 798, 800, 801, 803, 819, 835, 844, 851, 861).

PUCIOASA. Clasa X-a. *Bucur D. Gheorghe* (1731—733, 735, 737—739, 742, 744—752, 754, 759, 760—762, 766, 768, 770, 772, 819, 820, 822, 824, 825, 826, 830—838, 840, 841), Stan N. Dumitru (1654, 657, 658, 664, 667, 668, 670, 677, 681, 683, 690, 692, 694, 696, 698, 701, 706, 721, 727, 728, 730, 736, 737, 751).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa IX-a. Ancuţoiu I.Gheorghe (1786—788, 792, 803, 814, 816, 819, 820, 822, 838, 848, 851, 867, 871, 876, 882) ; clasa X-a. Beu Ion (1728, 730, 733, 744, 747, 752, 800, 814, 816, 819), Crăceanu C.Gheorghe (1670, 673, 697, 725, 727, 728, 730, 736, 742, 745, 747, 752, 768, 775), *Dumitrescu Ilie* (1657, 660, 664, 667, 670, 673, 674, 679, 681, 686, 688, 696, 697, 725, 727, 728, 730, 736, 737, 739, 740, 742, 745, 752, 759, 768, 787, 793, 800, 816), *Enescu I. Hicolae* (1727, 728, 733, 736—738, 742, 759, 775, 779, 787, 793, 803, 814, 816, 819, 820, 822, 827, 830, 833—838, 842—844, 847, 849, 851, 861, 867, 871, 875, 876, 883), *Grigorescu D. I.* (1655, 654, 658, 667, 670, 672, 679, 686, 688, 690, 682, 714, 725—728, 730, 733—740, 742—747, 749, 750, 752, 754, 759, 760, 768, 772, 774, 775, 776, 779, 782, 783, 786—788, 792—794, 800, 801, 803, P), Lazăr Gheorghe (1673, 695, 728, 730, 742, 746, 762, 775, 800, 814), Paulescu N. Dan (1814, 816, 819, 826, 831, 835, 837, 844, 849, 861, 867, 871, 975, 876, 881, 882).

REŞIŢA. Clasa X-a. Farcaş D. Dan (1728, 730, 733, 734—736, 738—740. 742, 747, 759, 763, 774, 775,) Schweinert Şt. Ioan (1730, 740, 742, 743, 759, 760, 779, 783, 785—788, 792, 793, 798, 800, 803, 809, 810, 811, 816, 818, 821, 882, 827, 833, 837, 848, 849, 851).

SATU MARE. Clasa X-a. Benea A. Cornel (1726—728, 730, 733, 734, 739, 740, 742, 760, P).

SIBIU. Clasa VII-a. Popa Ioan (E : 679, 680, 683, 685, 695, 697, 700, 703, 709, 710, 715,) Schuller Oskar (1785, 798, 799, E: 679, 680, 683—686, 689, 692), Alexandru Golescu (P).

SIGHET. Clasa VII-a. Tomoioagă Doru (1819, 827, E : 679, 683, 685, 687, 690, 691, 708, 713, 718, 720, P).

SLATINA. Clasa VIII-a. Becheanu Mircea (1730, E : 653, 658, 663, 665, 672, 676, 701, 703), Oprea Ilie (1730, 733, E : 653, 657, 659, 663, 668, 672, 674, 676).

SUCEAVA. Clasa VII-a. *Rotaru Nicolae* (E : 653—674, 676, 679—691, 697—701, 703, 708—711, 713, 714, 716, 718, 720, 722).

TÎRGU JIU. Clasa VII-a. *Velicescu Mircea* (1655, 656, 665, 666, 669, 697, 707, 726, 730, 733, 735, 738, 742, 750, 775, E : 652, 653, 657, 659, 662, 668, 669, 670, 672, 674, 678).

TÎRGOVIŞTE. Clasa X-a. Dumitrescu G. Petre (P), *Slănciulescu Mihai* (1265, 466, 511, 608, 611, 659, 700, 701, 706, 707, 709, 714, 715, 726, 727, 734, 736, 737, 740, 742, 743, 744, 747, 752, 758—760, 763, 762, 769, 770, 772, 774, 781, 784, 786, 789, 793, 800, 802, 803, 861, 866, 867), Tudor N. Constantin (1706, 707, 714, 715, 717, 724, 728, 730, 733, 736, 738, 742, 759, 775, 787, 800, 819, 835, 842).

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

TÎRGU NEAMŢ. Clasa X-a. *Focşăneanu Ion* (1668, 669, 677, 683—695, 697—699, 706, 707, 728, 730, 733, 735, 737, 738, 740, 742, 759, 775, 781, 783—788, 791—794, 799, 800, 801, 803, 807, 809, 810, 814, 816, 819, 821, 822, 825, 827, 842).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Ionescu Radu (1819, 830, 833, 835 837, 844, 861, 866, 877, 881, 882, 891, P).

TURNU MĂGURELE. Clasa X — a. Niculescu M. Iulian (1806, 810, 816, 818, 822, 824, 827, 830, 833, 835, 837, 838, 840 — 845, 848, 849, 850 — 852, 857, 859, 865, 867, 868).

TURDA. Clasa X — a. Cerghizan Radu (1726 — 728, 730, 733, 735, 738, 740, 742, 750, 793, 803, 819), Maxim Nicolae (1730, 733, 738 — 740, 742, 743, 750, 759, 774, 775, 782, 786 — 788, 792, 800, 801, 803, 816, 818 — 820, 822, 842, 848, 851), Reich Toma (1726 — 728, 730, 733, 735, 738, 740, 742, 803).

TRUSEŞTI. Clasa X — a. *Ciubotaru Constantin* (1683, 695, 727, 728, 730, 733, 735, 738, 742, 743, 746, 747, 753, 761, 830, 833, 835, 837, 838, 842, 848, 854, 859, 874 — 876, 879, 881 — 884, P).

TECUCI. Absolvent Sevastie I. Gheorghe (1647, 655, 666, 668, 670, 673, 677, 681, 683, 685, 686, 687, 689, 690 — 693, 699, 706, 707, 724, 727, 728, 730, 733, 748).

TÎRGU MUREŞ. Clasa IX — a. Tudor Tiberiu (1786, 788, 792, 800, 814, 822, 830, 838, 844, 848, 851, 866,) ; clasa X — a. *Hegedüs Attila* (1662. 721. 726. 727. 728. 730. 733, 734, 736, 738, 744, 747, 750 — 754, 765, 768, 799, 800, 803, 817, 819, 830, 831, 833, 834, 836 — 838, 841, 844, 847, 851, 861, 871, 872), *Hoţa Maricel* (1393, 586, 618, 706, 714, 727, 728, 730, 732, 733, 735 — 740, 742 — 744, 747 — 749, 752, 753, 756, 759 — 761, 771, 774 — 776), Jivomir Lucian (1816, 818 — 822, 833, 835, 838, 844, 848, 849, 851, 852, 865), Matei Aurel(1668, 671, 692, 726 — 728, 730, 733 — 737, 739, 742, 744, 747, 748, 752, 759, 760, 762, 774), Ţîru Gavril (1728, 730, 733, 734, 735, 736, 738, — 740, 749, 754).

TIMIŞOARA. Clasa VII — a. Mihăileanu Alexandru (E : 682, 708, 713, 718, 719, 722, 726, 729, 737,), Nerodea Rodica (E : 678, 680, 682, 685, 689, 693, — 696, 700, 724, 731), clasa IX — a. Junger Agata (726, 727, 730, 733, 749, 762, 800, 827), *Mihăileanu Constantin* (1762, 814, 816, 824, 827, 830, 833, 835, 837, 841 — 845, 847, 871, 872, 875, 877, 884) ; clasa X — a. *Arsenovici Tiberiu* (1400, 417, 469, 470, 542, 557, 617, 618, 726 — 728, 730, 732, — 740, 742, 743, 747, 748, 751, 752, 758, 759, 760 — 762, 766, 774, 775, 778, 783, 785 — 788, 792 — 794, 801, 803, 806, 810, 811, 815, 818 — 823, 833, 836, 842, 848, 849, 851, 859, 864), *Bărglăzan Mircea* (1655, — 657, 667, 668, 673, 674, 677, 681, 684—690, 693, 695, 697, 698, 701, 706, 707, 714, 721, 724), Cismariu Ionica (1799, 830, 831,835—838, 842, 844, 851, 879,), Kory Egon (1727 — 730, 732, 733, 740 742, 743, 747, 759, 774, 775), Nerodea Tiberiu (1626, 695, 698, 727, 736, 786, 787, 803, 816, 819, 822), Popa Laurenţiu (1726 — 728 730, 733, 734, 736, 737, 740, 748, 753, 759), Vasilievici Alex. (1626, 695, 698, 727, 731, 736 739, 760, 886, 787' 792, 800, 803, 816, 819, 822,), student Rusnac Leonid (P).

URLAŢI. Clasa X — a. Petcu Diamanta (1727, 728, 730, 754, 762, 830, 831, 837, 862).

VASLUI. Clasa VIII — a. Barbu Viorel (1761, 781, 792, 803, 814, 848, 851, E : 684, 690, 698, 700, 704, 708, P).

ZALĂU. Absolvent *Opriş Ioan* (1578, 608, 623, 636, 656, 666, 670, 671, 673, 690, 694 695, 699, 721, 727, 730, 733, 734, 736, 738, 743, 747, 752, 759, 816, 833, 837, 844, 866),

REDACTAREA SOLUŢIILOR

La exerciţiile şi problemele propuse pentru şcoala de 7 ani se primesc rezolvări de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, de la elevii anului I ai şcolilor tehnice de maiştri sau din anul I şi II ai şcolilor profesionale sau pedagogice de învăţători. Nu se iau în seamă soluţiile problemelor propuse pentru şcoala de 7 ani dacă sînt trimise de elevi ai *claselor a IX-a, a X-a, ai şcolilor medii tehnice sau de studenţi* şi nici soluţiile trimise după trecerea a *trei luni* de la publicarea problemelor respective sau dela publicarea eratei, dacă a fost cazul.

În cazul unor probleme propuse care sînt mai greu de rezolvat sau de la care nu s-au primit soluţii bune, termenul de primirea soluţiilor se poate prelungi. Pînă la apariţia numărului 5, *se mai primesc soluţii la problemele*: 1783, 1789, 1790, 1797, 1802, 1804, 1805, 1808, 1853, 1854, 1873, 1888, 1896, 1897, 1900, 1902, 1903, 1906, 1910, 1929, 1932, 1933, 1936, 1938, 1966, 1969, 1980, 1983, 2000 şi următoarele; iar de la elementar, la E: 682, 684, 691, 699, 702, 706, 712, 714, 719, 720, 731, 734, 742, 744, 745, 754 şi următoarele.

Rezolvitorii de probleme sînt rugaţi să nu trimită plicuri cu mai puţin de 10 soluţii iar trimiterea rezolvărilor şi propunerilor să se facă numai odată în cursul aceleiaşi luni, aşezînd problemele rezolvate în ordinea lor numerică, aşa cum vor fi apoi, anunţate la rubrica rezolvitorilor. Pe o parte a plicului se va scrie: localitatea, şcoala sau institutul şi numele rezolvitorului; iar pe cealaltă adresa redacţiei «Gazeta Matematică şi Fizică», *seria B*, strada Academiei nr. 14, Bucureşti 1.

Din problemele primite nu se anunţă cele incomplet rezolvate, cele care conţin greşeli, cele neglijent redactate, cele care au greşeli de calcul, desene neîngrijit făcute sau copiate după altele.

De asemenea, nu se publică problemele propuse de către colaboratori dacă ele sînt cunoscute sau nu sînt însoţite de soluţia lor clar redactată.

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1956

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORI POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

C. 303. Intreprinderea Poligrafică Nr. 4.

Preţul Lei 1 exemplarul

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

BUCUREŞTI
SCHMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - ОБМЕНА
Országos Múzeumi Könyvtár
TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

« Pionieri şi şcolari ! Luptaţi pentru succese tot mai mari la învăţătură, însuşiţi-vă cu sîrguinţă cît mai multe cunoştinţe ! Întăriţi necontenit disciplina şcolară ! »

(Din Chemările Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn cu prilejul zilei de 1 Mai 1956)

Anul VII — mai 1956

5

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII. Nr. 5 — mai 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *1 Mai* 225
2. *Sistemul periodic al elementelor de I. Rişavi* . . . 227
3. *Cîteva teoreme de maxime şi minime de I. I. Cristea* 245
4. *Asupra dreptelor şi planelor isognale de M. I. Popescu* 250
5. *Caleidoscop fizic* 255
6. *Probleme rezolvate (1731; 1740; 1745; 1756; 1757; 1758; 1764; 1765)* 257
7. *Chestiuni de examen (2162—2188)* 267
8. *Probleme propuse (2189—2214)* 270
9. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 806—E: 818)* 273
10. *Poşta redacţiei* 275
11. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 276

ANUL VII 5 MAI

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**. prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VII • Nr. 5 mai 1956

1 MAI

PENTRU poporul muncitor al ţării noastre, ca şi pentru oamenii muncii din toate ţările, ziua de 1 Mai este ziua solidarităţii internaţionale a oamenilor muncii. Sărbătorirea zilei de 1 Mai 1956 are loc în împrejurări cînd în întreaga lume au crescut imens forţele luptătoare pentru pace, democraţie şi socialism.

Oamenii muncii din ţările capitaliste întîmpină 1 Mai în condiţiile intensificării luptei revendicative şi politice, pentru apărarea libertăţilor democratice, concomitent cu lupta pentru unitatea clasei muncitoare.

În cadrul luptei pentru unitatea de acţiune a clasei muncitoare s-au obţinut importante succese, muncitori comunişti socialişti sau fără de partid au acţionat de multe ori umăr la umăr pentru apărarea libertăţilor democratice, pentru apărarea păcii.

Întreaga omenire progresistă priveşte ca pe bunul cel mai de preţ victoriile de însemnătate istorică mondială pe care Uniunea Sovietică le-a obţinut în opera de construire a comunismului. Din relatările celui de-al XX-lea congres al PCUS rezultă că în intervalul 1929—1955, Uniunea Sovietică şi-a sporit producţia industrială de peste 20 de ori, în timp ce S.U.A. a reuşit să-şi sporească producţia abia de 2 ori şi ceva.

Alături de Uniunea Sovietică, bucurîndu-se de ajutorul ei frăţesc şi multilateral, ţările lagărului socialist au depăşit de asemenea în măsură considerabilă, statele capitaliste în ce priveşte ritmul de creştere a producţiei industriale. În R.P. Polonă, nivelul antebelic al producţiei industriale a fost depăşit de peste patru ori; în R.P. Bulgaria—de peste cinci ori, în R. Cehoslovacă—de peste două ori, în R.P. Ungaria — de trei ori şi jumătate, în R.P. Romînă de aproape 3 ori, în R.P. Albania — de peste unsprezece ori, în Republica Democrată Germană de peste două ori.

Republica Populară Chineză, care a trecut mai tîrziu la construirea socialismului, a reuşit să obţină succese remarcabile în comparaţie cu nivelul antebelic maxim, producţia ei industrială crescînd de peste două ori; realizări importante a înregistrat şi R.P. F. Iugoslavia, care a depăşit nivelul dinainte de război al producţiei industriale de 2,8 ori.

În ce priveşte situaţia economică a ţărilor capitaliste, producţia industrială a întregului lagăr capitalist nici măcar nu s-a dublat în acelaşi interval de timp.

Ziua de 1 Mai este sărbătorită în anul acesta în condiţiile unui măreţ avînt al mişcării de eliberare a popoarelor din ţările coloniale şi dependente.

India, a doua ţară din lume ca populaţie, şi-a cucerit iudependenţa de stat în ultimii ani. Au dobîndit independenţă Birmania, Indonezia, Egiptul, Siria, Libanul, Sudanul şi o serie de alte ţări. Are loc un avînt politic şi economic al popoarelor din Asia de sud-est şi din orientul arab. A început procesul trezirii

popoarelor Africii, se intensifică mișcarea de eliberare națională în Brazilia, Chile și alte țări ale Americii Latine.

În ciuda sforțărilor de a băga zizanii atît între popoarele țărilor slab dezvoltate, cît și între aceste popoare și cele ale lagărului socialist prietenia și colaborarea între ele se întărește tot mai mult. Conferința de la Bandung a celor 29 state ale Asiei și Africii a demonstrat în mod grăitor creșterea solidarității popoarelor Orientului, iar vizitele reprezentanților Indiei și Birmaniei în Uniunea Sovietică și a reprezentanților Uniunii Sovietice în India, Birmania și Afganistan demonstrează întărirea prieteniei și colaborării între aceste popoare.

Sesiunea Consiliului Mondial al Păcii, care a avut loc de curînd la Stockholm, și-a încheiat lucrările subliniind că în ultima vreme s-a întărit spiritul de colaborare între toate popoarele iubitoare de pace, iar punctele lor de vedere s-au apropiat. Partide politice, organizații sindicale, culturale și de altă natură, precum și toate cultele religioase se pronunță pentru dezarmare, lărgind astfe tot mai mult, frontul păcii.

Sărbătorind ziua de 1 Mai poporul nostru trece în revistă, cu îndreptățită mîndrie patriotică, succesele însemnate dobîndite sub conducerea partidului. Sarcina planului cincinal privind producția globală industrială a fost îndeplinită înainte de termen. Au fost create noi ramuri industriale. Încă din 1954 a fost depășită producția de cereale prevăzută în cincinal pentru anul 1955. Sectorul socialist din agricultură cuprinde peste 6000 de gospodării colective și întovărășiri. A crescut simțitor nivelul de trai al oamenilor muncii de la orașe și de la sate. Au luat o înflorire fără precedent în țara noastră, cultura și știința.

Directivele cu privire la cel de-al II-lea cincinal trasează pentru țara noastră noi și mari pași înainte pe cale industrializării socialiste. Se vor construi noi fabrici și uzine moderne, vor lua o nouă și puternică dezvoltare ramurile industriei grele, producția industrială globală va crește cu 60—65 %.

Congresul partidului a trasat sarcinile unui nou avînt în opera de transformare socialistă a agriculturii pe baza liberului consimțămînt al țăranilor muncitori, astfel încît în anul 1960 sectorul socialist din agricultură să fie preponderent ca suprafață și ca producție marfă.

Pentru ridicarea continuă a nivelului cultural al poporului se va lărgi învățămîntul de 7 ani și se vor pregăti condițiile pentru trecerea în decursul cincinalului viitor la învățămîntul de 7 ani general și obligator.

Se va intensifica munca pentru ridicarea nivelului științific al învățămîntului, acordîndu-se o deosebită atenție studiului științelor fizice și matematice, legînd procesul de învățămînt de viață, de activitatea practică.

Pentru îndeplinirea sarcinilor privind dezvoltarea și îmbunătățirea învățămîntului din R.P.R., stabilite prin lucrările Congresului al II-lea al P.M.R. Ministerul Învățămîntului a și elaborat un sistem de măsuri în vederea extinderii și perfecționării învățămîntului de cultură generală, care urmează să fie analizat și îmbunătățit prin sugestii și propuneri făcute de către cadrele didactice și de către părinții elevilor, pentru a putea fi definitivat și pus în aplicare.

Iată deci mărețele perspective de dezvoltare ce stau în fața patriei noastre, iată ce a însemnat pentru țara noastră sfărîmarea lanțurilor robiei imperialiste, a jugului claselor, exploatatoare.

Întîmpinînd 1 Mai, oamenii muncii din școli sînt hotărîți să-și intensifice efortul pentru a contribui la întărirea patriei noastre, factor activ al lagărului păcii și socialismului.

SISTEMUL PERIODIC AL ELEMENTELOR

Conf. univ. I. RIŞAVI

ÎNAINTE de a trece la studierea clasificării elementelor, clasificare pe care Mendeleev a exprimat-o sub forma sistemului periodic al elementelor în anul 1869, voi face un scurt istoric al ideilor de clasificare întreprinse de oamenii de ştiinţă în acest sens.

A clasifica înseamnă a pune alături ceea ce se aseamănă mai mult şi a lăsa mai la urmă ceea ce se deosebeşte. Valabilitatea unei clasificări şi aportul pe care-l aduce ea ştiinţei este în funcţie de doi factori mai importanţi:

— de stabilirea cauzelor intime care determină asemănările şi deosebirile, precum şi

— de valoarea clasificării ca instrument de cercetare ştiinţifică, deci de posibilităţile ei de a ne orienta în probleme necunoscute şi de a cuprinde fapte noi.

Pentru ca o clasificare să îndeplinească aceste condiţii, în ea trebuie să se reflecte legile fundamentale ale naturii, care stăpînesc toate formele de mişcare ale materiei.

Prima şi cea mai simplă clasificare a elementelor a fost de fapt împărţirea elementelor în două grupe : *metale* şi *metaloide*.

Deoarece nu toate elementele celor două grupe posedă proprietăţi predominante metalice sau metaloidice, ci dimpotrivă se constată o trecere treptată de la metale tipice la metaloide tipice, neputîndu-se trasa o graniţă netă între cele două grupe, în decursul timpului s-a renunţat la această clasificare.

Încercările de clasificare a elementelor pe o bază ştiinţifică s-au putut realiza abia după ce ştiinţa şi-a însuşit noţiunea de atom şi după ce au fost cunoscute greutăţile atomice ale elementelor descoperite.

În mod firesc s-a ridicat problema dacă aceste elemente sînt legate între ele prin anumite relaţii, sau dacă proprietăţile lor sînt cu totul întîmplătoare şi nu depind unele de altele.

Abia la începutul secolului al XIX-lea, oamenii de ştiinţă au ajuns la concluzia, desprinsă din date experimentale, că între proprietăţile fizice şi chimice ale elementelor şi greutatea lor atomică se află o strînsă legătură. Diferite legi particulare au fost descoperite repede. Astfel, Döbereiner în anul 1829 a atras atenţia lumii ştiinţifice asupra unei legături simple ce există între greutăţile atomice ale unor elemente, aşezate în grupe de cîte trei (triade) şi proprietăţile lor. Asemenea triade sînt:

Li	Ca	S	Cl
Na	Sr	Se	Br
K	Ba	Te	I
metale alcaline	metale alcalino-pămîntoase	familia sulfului	halogenii

În fiecare triadă, greutatea atomică a elementului din mijlocul triadei este aproximativ egală cu media aritmetică a greutăţii atomice ale celor două elemente de la extremitatea ei.

De exemplu, greutatea atomică a natriului (Na) din prima triadă se deduce astfel : se adună greutatea atomică a litiului (6,94) cu greutatea atomică a kaliului (39,1) şi suma se înparte la doi

$$\text{greutatea atomică a natriului (Na)} = \frac{6{,}94 + 39{,}10}{2} = \frac{46{,}04}{2} \approx 23.$$

La fel se pot deduce greutăţile atomice ale elementelor Sr, S[illegible], Br.

Clasificarea lui D ö b e r e i n e r deşi nu are un caracter de generalizare teoretică, are totuşi meritul că deschide drum unor noi lucrări în acest sens.

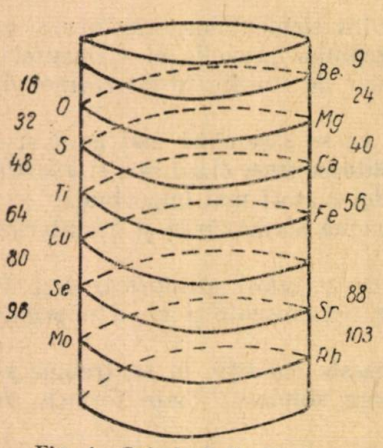


Fig. 1. Spirala helicoidală a lui Champcourtois.

Astfel C h a m p c o u r t o i s, în anul 1862, a propus o clasificare aşezînd elementele după greutatea lor atomică, pe o linie în formă de spirală helicoidală.

În această clasificare elementele cu proprietăţi fizice şi chimice asemănătoare, erau aşezate unele deasupra altora, anticipîndu-se asupra periodicităţii elementelor.

În anul 1864, N e w l a n d s, aşezînd elementele după greutăţile atomice crescînde, a observat că în şirul elementelor astfel aranjate, apar, din opt în opt, elemente cu proprietăţi fizice şi chimice asemănătoare. Această periodicitate a fost numită regula octavelor, prin asemănarea ei cu octavele muzicale.

Pentru exemplificarea clasificării lui Newlands arătăm primele două octave:

H	Li	Be	B	C	N	O
F	Na	Mg	Al	Si	P	S

Regula octavelor a lui Newlands se aplică riguros numai la elementele cu greutăţi atomice mici.

Abia după cinci ani, în anul 1869, marele savant rus D i m i t r i I v a n o v i c i M e n d e l e e v *) a reuşit, primul, să găsească o lege generală, legea *periodicităţii*, care leagă toate elementele într-un sistem unitar şi care este expresia cea mai clară a principiului structural comun tuturor atomilor.

Pînă la Mendeleev, chimiştii grupau elementele după comportarea lor fizico-chimică, căutînd să apropie între ele numai elemente asemănătoare.

Mendeleev a trecut la studierea elementelor în mod cu totul diferit. El a mers pe calea apropierii elementelor neasemănătoare, aşezînd alături de ele elemente diferite, care aveau valori apropiate ale greutăţilor atomice. Tocmai această comparare între elemente, şi studiul îndelungat şi aprofundat al proprietăţilor fizice şi chimice ale acestora i-au îngăduit să dezvăluie legătura intimă dintre toate elementele, ceea ce l-a condus la descoperirea legii periodicităţii.

Legea periodicităţii se poate enunţa astfel: *Proprietăţile elementelor sînt funcţii periodice ale greutăţilor lor atomice.*

---

*) D i m i t r i e I v a n o v i c i M e n d e l e e v (1834—1907) s-a născut la 7 ianuarie 1834 în oraşul siberian Tobolsk din familia directorului liceului local, ca al patrusprezecelea copil al părinţilor săi. Liceul l-a făcut la Tobolsk, studiile universitare la Petersburg. După terminarea studiilor universitare a fost profesor de liceu timp de 2 ani, la Simferopol şi apoi la Odesa. Specializarea a făcut-o în laboratorul lui Bunsen de la Heidelberg (1859—1860). Reîntors în Rusia a fost numit mai întîi profesor de chimie organică şi apoi de chimie neorganică la Universitatea din Petersburg. În viaţă fiind, Mendeleev a avut marea satisfacţie de a trăi tot succesul sistemului său periodic, pe care l-a perfecţionat continuu. La 20 Ianuarie (2 februarie s.n.) 1907, la vîrsta de 73 ani, D. I. Mendeleev a murit de pneumonie.

Mendeleev a arătat că dacă se aşează elementele în ordinea crescătoare a greutăţilor atomice (cu un număr mic de excepţii), proprietăţile lor fizice şi chimice se repetă periodic, după un anumit număr de elemente.

Fundamentat pe legea periodicităţii, Mendeleev a concretizat într-o formă desăvîrşită o clasificare, numită *sistemul periodic al elementelor*, în care au fost cuprinse toate elementele de la cel mai uşor, hidrogenul (H) la cel mai greu, uraniul (U), aşezate în şiruri orizontale după greutatea atomică crescîndă, în care periodicitatea, adică repetarea proprietăţilor, era respectată.

Cînd Mendeleev şi-a publicat tabelul său (1869), acesta nu cuprindea decît cele 63 elemente (corpuri simple) cunoscute în acea vreme.

Pentru a face să apară periodicitatea proprietăţilor, Mendeleev a trebuit să prevadă 98 de căsuţe, dintre care multe rămîneau goale. Căsuţa nr. 92 era ocupată de uraniu.

Sistemul periodic al elementelor, în forma lui actuală, diferă de cel iniţial, prin introducerea grupei 0 (în care sînt aşezate gazele nobile, inerte) şi prin aceea că locurile goale lăsate de Mendeleev sînt astăzi ocupate de elementele prezise de el.

Înainte de a trece la studierea propriu zisă a clasificării elementelor a lui Mendeleev, trebuie relevat faptul, că după Mendeleev au mai fost propuse şi alte sisteme de clasificare periodică a elementelor.

Astfel, L o t h a r M e y e r în Germania propune o clasificare avînd multe puncte comune cu aceea a lui Mendeleev. Lothar Meyer îşi fundamentează clasificarea pe relaţia dintre variaţia căldurii atomice şi a volumului atomic, cu greutatea atomică.

După aceea, S o d d y propune o clasificare helicoidală foarte curioasă, apoi H a r k i n s sugerează o clasificare în care a aranjat elementele urmînd o elice cu pas variabil şi în sfîrşit E r d m a n şi K ö t h n e r, au propus un sistem de clasificare cu elementele aşezate foarte regulat pe o spirală tăiată de zece diametre, elementele asemănătoare găsindu-se aşezate pe aceiaşi rază.

Dintre toate aceste sisteme propuse, singurul care a trecut cu succes toate probele verificării în decursul timpului, dovedindu-se ca cel mai concordant cu realitatea, a rămas acela propus de Mendeleev, şi de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

Alcătuirea sistemului periodic al elementelor

Dacă aşezăm într-un singur şir orizontal elementele cunoscute, lăsînd la o parte cele două elemente mai uşoare H şi He, atunci, în desfăşurarea elementelor, în ordinea greutăţilor lor atomice crescînde, observăm următoarele: începînd numărătoarea de la Li, al nouălea element în şirul orizontal, Na, are proprietăţi foarte asemănătoare cu primul element din şirul orizontal Li, apoi al zecelea element Mg este analog cu al doilea element din şirul orizontal, Be, şi aşa mai departe.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	Na	Mg	Al ... etc

Această repetare a proprietăţilor într-o succesiune determinată l-a făcut pe Mendeleev să despartă şirul orizontal al elementelor chimice în mai multe

rînduri orizontale, în aşa fel ca toate elementele analoage (cu însuşiri asemănătoare) să se găsească unele sub altele.

H							He
1							4
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
7	9	11	12	14	16	19	20
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar
23	24	27	28	31	32	35,5	39,9

Analizînd fugitiv proprietăţile elementelor din şirul al doilea constatăm: litiul (Li) este un metal monovalent, care descompune cu uşurinţă apa la temperatură obişnuită, formînd o bază puternică. După litiu urmează beriliu (Be) metal bivalent, care descompune mai greu apa la temeratura obişnuită. După beriliu urmează borul (B) metaloid trivalent, cu proprietăţi slabe de metaloid, care în acelaşi timp manifestă şi unele proprietăţi de metal.

Urmează apoi carbonul (C) metaloid tetravalent.

După carbon urmează azotul (N) cu proprietăţi accentuate de metaloid, element pentavalent în oxidul său superior N_2O_5; apoi oxigenul (O) metaloid tipic şi în sfîrşit, al şaptelea element fluorul (F) cel mai energic dintre metaloizi.

Din cele arătate mai sus reiese că în fiecare şir se găsesc elemente cu proprietăţi deosebite şi anume cu atît mai deosebite cu cît elementele sînt mai depărtate unele de altele. Astfel am văzut că proprietăţile metalice pronunţate la litiu slăbesc treptat de la un element la altul, în favoarea proprietăţilor metaloidice, care ating cea mai înaltă treaptă la fluor.

Pe măsură ce creşte greutatea atomică, creşte şi valenţa elementelor faţă de oxigen cu o unitate pentru fiecare element următor, începînd cu litiul (Li).

Dacă variaţia proprietăţilor elementelor pe măsura creşterii greutăţii lor atomice s-ar face continuu în aceiaşi direcţie (liniar), ar trebui ca după fluor (F), să dăm de un element cu proprietăţi metaloidice şi mai pronunţate ca ale fluorului. Dar elementul următor fluorului este neonul (Ne) gaz inert *), care nu prezintă nici proprietăţi de metal şi nici de metaloid şi nu se combină cu alte elemente.

În continuare după neon (Ne) urmează natriul (Na), un metal monovalent analog litiului, dar cu caracter metalic mai pronunţat.

Deci în şirurile orizontale, după un anumit număr de elemente are loc o revenire la punctul de plecare, după care se repetă proprietăţile elementelor precedente, desfăşurate în aceiaşi succesiune, dar pe o altă bază mai puternică, sau mai slabă.

Pentru exemplificare putem arăta că după natriu (Na) urmează magneziu (Mg) analogul beriliului (Be); apoi aluminiul (Al), care deşi este metal (trivalent ca şi borul), manifestă proprietăţi de metaloid.

După aluminiu urmează siliciul (Si), metaloid tetravalent analog în multe privinţe cu carbonul (C); apoi fosforul (P) metaloid pentavalent, analog cu azotul; sulful (S) cu proprietăţi metaloidice accentuate; clorul (Cl) analog cu fluorul, avînd proprietăţi metaloidice puternice şi la urmă argonul (Ar) gaz inert, cu care se sfîrşeşte şirul orizontal.

*) Totuşi gazele inerte nu sînt chiar complet inerte aşa cum le spune numele, deoarece s-a dovedit în ultima vreme că ele formează în condiţii speciale, la temperaturi joase, compuşi de forma E. 6 H_2O. Astfel radonul (Rn) formează un compus de felul Rn. 6 H_2O. Se presupune că formarea acestor compuşi se datoreşte forţelor Van der Waals.

Structura sistemului periodic

Din scrierea şirurilor orizontale, unul sub altul, în aşa fel încît elementele care au proprietăţi asemănătoare (deci formează compuşi de tip asemănător) să ajungă unele sub altele, s-au format zece rînduri orizontale şi nouă coloane verticale.

Cele zece rînduri sau şiruri orizontale ale sistemului periodic formează: *3 (trei) perioade mici, 3 (trei) perioade mari şi 1 (una) perioadă incompletă*, în total 7 perioade.

Perioadele sînt notate cu cifre arabe.

Prima perioadă începe cu hidrogenul (H), iar celelalte perioade încep cu cîte unul din metalele alcaline (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr).

Fiecare perioadă se termină cu un gaz inert, limitînd în mod clar perioadele.

Prin perioadă se înţelege deci totalul elementelor cuprinse între două gaze inerte succesive.

Perioada 1-a conţine *2 elemente*:

Perioada a 2-a şi a 3-a *cîte 8 elemente*;

Perioada a 4-a şi a 5-a *cîte 18 elemente*;

Perioada a 6-a conţine *32 elemente*;

Perioada a 7-a conţine *14 elemente* (perioadă incompletă).

Recapitulînd, constatăm că cele 6 perioade complete ale sistemului periodic, cuprind cîte:

$$2 \quad \underbrace{8 \; 8} \quad \underbrace{18 \; 18} \quad \text{şi} \quad \underbrace{32} \quad \text{elemente;}$$

este lesne de văzut că aceste cifre sînt egale cu:

$$2 \cdot 1^2 \qquad 2 \cdot 2^2 \qquad 2 \cdot 3^2 \qquad 2 \cdot 4^2.$$

Numărul maxim al elementelor dintr-o perioadă N se poate afla cu ajutorul formulei dată de Rydberg şi anume:

$$N = 2n^2.$$

În interpretare electronică n este numărul stratului de electroni, numărînd de la nucleu (corespunzînd perioadei), iar N este numărul limitat de electroni din fiecare strat de electroni.

În fiecare perioadă se alcătuieşte un nou strat electronic, iar în perioadele mari, afară de aceasta are loc o adăugare de substraturi, care se găsesc la o distanţă mai mare. De aceea numărul total de straturi electronice din atom este egal cu numărul perioadei, în care se află elementul.

Valorile lui n pot fi: 1, 2, 3, 4,...

Astfel pentru primul strat de electroni (corespunzător perioadei 1), $n = 1$ şi deci $N = 2 \cdot 1^2 = 2$, respectiv tot atîtea elemente se vor găsi în perioada 1.

Al doilea strat de electroni va avea pe $n = 2$ (corespunzînd perioadei 2 şi 3).

În acest caz numărul maxim de electroni N va fi: $N = 2 \cdot n^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$ (respectiv tot atîtea elemente se vor găsi în perioadele 2 şi 3).

Al treilea strat de electroni va avea $n = 3$ (corespunzînd perioadelor 4 şi 5). În acest caz numărul maxim de electroni N va fi dat de relaţia $N = 2 \cdot n^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$ (respectiv tot atîtea elemente vor avea perioadele 4 şi 5).

SISTEMUL PERIODIC AL ELEMENTELOR

Perioada	Invelişuri electronice	GRUPELE I	II	III	IV	V
1	K	**H** 1 1,0080 1				
2	L K	**Li** 3 6,940 1 2	**Be** 4 9,013 2 2	5 **B** 3 2 10,82	6 **C** 4 2 12,010	7 **N** 5 2 14,008
3	M L K	**Na** 11 22,997 1 8 2	**Mg** 12 24,32 2 8 2	13 **Al** 3 8 2 26,97	14 **Si** 4 8 2 28,06	15 **P** 5 8 2 30,98
4	N M L K	19 **K** 1 8 8 2 39,096	20 **Ca** 2 8 8 2 40,08	21 **Sc** 2 9 8 2 45,10	22 **Ti** 2 10 8 2 47,90	23 **V** 2 11 8 2 50,95
	N M L K	1 29 18 8 2 **Cu** 63,54	2 30 18 8 2 **Zn** 65,38	3 31 18 8 2 **Ga** 69,72	4 32 18 8 2 **Ge** 72,60	5 33 18 8 2 **As** 74,91
5	O N M L K	37 **Rb** 1 8 18 8 2 85,48	38 **Sr** 2 8 18 8 2 87,63	39 **Y** 2 9 18 8 2 88,92	40 **Zr** 2 10 18 8 2 91,22	41 **Nb** 1 12 18 8 2 92,91
	O N M L K	1 47 18 18 8 2 **Ag** 107,880	2 48 18 18 8 2 **Cd** 112,41	3 49 18 18 8 2 **n** 114,76	4 50 18 18 8 2 **Sn** 118,70	5 51 18 18 8 2 **Sb** 131,76
6	P O N M L K	55 **Cs** 1 8 18 18 8 2 132,91	56 **Ba** 2 8 18 18 8 2 137,36	57 **La*** 2 9 18 18 8 2 138,92	72 **Hf** 2 10 32 18 8 2 178,6	73 **Ta** 2 11 32 18 8 2 180,88
	P O N M L K	1 79 18 32 18 8 2 **Au** 197,2	2 80 18 32 18 8 2 **Hg** 200,61	3 81 18 32 18 8 2 **Tl** 204,39	4 82 18 32 18 8 2 **Pb** 207,21	5 83 18 32 18 8 2 **Bi** 209,00
7	Q P O N M L K	87 **Fr** 1 8 18 32 18 8 2 [223]	88 **Ra** 2 8 18 32 18 8 2 226,05	89 **Ac**** 2 9 18 32 18 8 2 227	**(Th)**	**(Pa)**

* LANTA

58	59	60	61	62	63	64
2 8 20 18 8 2	2 8 21 18 8 2	2 8 22 18 8 2	2 8 23 18 8 2	2 8 23 18 8 2	2 8 25 18 8 2	2 9 25 18 8 2
Ce	**Pr**	**Nd**	**Pm**	**Sm**	**Fu**	**Gd**
140,13	140,92	144,27	[147]	150,43	152,0	156,9

** ACTI

90	91	92	93	94	95	96
2 10 18 32 18 8 2	2 9 20 32 18 8 2	2 9 21 32 18 8 2	2 8 23 32 18 8 2	2 8 24 32 18 8 2	2 8 25 32 18 8 2	2 9 25 32 18 8 2
Th	**Pa**	**U**	**Np**	**Pu**	**Am**	**Cm**
232,12	231	238,07	[237]	[239]	[242]	[242]

DUPĂ D. I. MENDELEEV

ELEMENTELOR

VI	VII	VIII			O
	(H)				He 2 4,003 2
8 O 6 2 16,0000	9 F 7 2 19,00				Ne 10 20,183 8 2
16 S 6 8 2 32,066	17 Cl 7 8 2 35,457				Ar 18 39,994 8 8 2
24 Cr 1 13 8 2 52,01	25 Mn 2 13 8 2 54,93	26 Fe 2 14 8 2 55,85	27 Co 2 15 8 2 58,94	28 Ni 2 16 8 2 58,69	
34 Se 6 18 8 2 78,96	35 Br 7 18 8 2 79,916				36 Kr 8 18 8 2 83,7
42 Mo 1 13 18 8 2 95,95	43 Tc 1 14 18 8 2 [99]	44 Ru 1 15 18 8 2 101,7	45 Rh 1 16 18 8 2 102,91	46 Pd 18 18 8 2 106,7	
52 Te 6 18 18 8 2 127,61	53 J 7 18 18 8 2 126,92				54 Xe 8 18 18 8 2 131,3
74 W 2 12 32 18 8 2 183,92	75 Re 2 13 32 18 8 2 186,31	76 Os 2 14 32 18 8 2 190,2	77 Ir 2 15 32 18 8 2 193,1	78 Pt 1 17 32 18 8 2 193,23	
84 Po 6 18 32 18 8 2 210	85 At 7 18 32 18 8 2 [210]				86 Rn 8 18 32 18 8 2 222
(U)					

NIDE 58—71

65 Tb 2 8 27 18 8 2 159,2	66 Dy 2 8 28 18 8 2 162,46	67 Ho 2 8 29 18 8 2 164,94	68 Er 2 8 30 18 8 2 167,2	69 Tu 2 8 31 18 8 2 169,4	70 Yb 2 8 32 18 8 2 173,04	71 Lu 2 9 32 18 8 2 174,99

NIDE

97 Bk 2 8 27 32 18 8 2 [243]	98 Cf 2 8 28 32 18 8 2 [244]	99 E 2 8 29 32 18 8 2 [247]	100 Fm 2 8 30 32 18 8 2 [248]

NUMĂR DE ORDINE

88 Ra 2 Q, 8 P, 18 O, 32 N, 18 M, 8 L, 2 K — INVELIȘURI ELECTRONICE

SIMBOL → Ra

226,05 ← GREUTATEA ATOMICĂ

În sfîrșit pentru stratul $n = 4$ (corespunzînd cu perioada 6) vom avea: $N = 2 \cdot n^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$ (respectiv numărul de elemente din perioada 6).

În afară de așezarea pe orizontală, toate elementele din sistemul periodic sînt dispuse pe verticală în 9 (nouă) coloane.

Aceste coloane verticale, care cuprind elementele cu proprietăți fizice și chimice asemănătoare, se numesc *grupe*. Sistemul periodic cuprinde 9 (nouă) grupe. Grupele sînt notate cu cifrele romane: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII și 0 (zero). Grupa zerovalentă formează o delimitare naturală între metale și metaloide. Fiecare grupă din primele 7 grupe se împarte în două: o grupă principală notată cu litera *a* și o grupă secundară sau subgrupă, notată cu litera *b*.

În primele două grupe I și II grupa *a* este în stînga și subgrupa *b* în dreapta; începînd cu grupa III și terminînd cu VII, grupa *a* este în dreapta coloanei verticale, iar subgrupa *b* în stînga.

Să analizăm acum perioadele și grupele sistemului periodic al elementelor, pentru a vedea cum variază proprietățile elementelor atît în direcția orizontală cît și în cea verticală.

Aceste proprietăți sînt de două feluri:

1) *proprietățile periodice* (care se repetă după un anumit număr de elemente, numit perioadă);

2) *proprietățile neperiodice* (care nu se repetă).

La rîndul lor proprietățile periodice pot fi proprietăți fizice și proprietăți chimice.

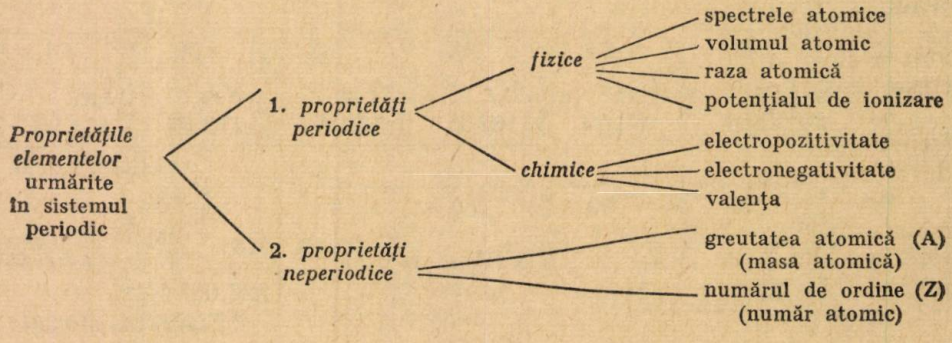
Proprietățile periodice fizice sînt: spectrele atomice, volumul atomic (volumul pe care-l ocupă atomii gram ai elementelor în stare solidă), potențialul de ionizare (exprimă cantitatea de energie necesară pentru a desprinde din atom în ordine succesivă primul, al doilea, al treilea electron etc., atomul transformîndu-se în ion pozitiv sau cation cu sarcina respectiv 1, 2, 3, etc.), raza atomică, raza ionică, etc.

Proprietățile periodice chimice sînt: electropozitivitatea (tendința elementelor de a pierde electroni și de a trece în ioni pozitivi sau cationi), electronegativitatea (tendința elementelor de a cîștiga electroni și de a trece în ioni negativi sau anioni), valența (capacitatea unui element de a pierde sau de a cîștiga electroni), care este cea mai importantă proprietate chimică periodică a elementelor.

Proprietățile neperiodice ale elementelor sînt:

greutatea atomică sau masa atomică (A) și numărul de ordine (Z).

Dăm mai jos schema sinoptică a proprietăților elementelor.



Ţinînd seama de această schemă vom analiza variaţia proprietăţilor elementelor din sistemul periodic, urmărind atît şirul orizontal cît şi coloana verticală.

Periodicitatea proprietăţilor fizice

Cauza principală a repetării periodice a proprietăţilor fizice şi chimice a elementelor constă în faptul că în şirul elementelor aşezate în ordinea crescîndă a greutăţilor lor atomice (mai exact în ordinea crescîndă a numărului de ordine Z) *se repetă periodic* procesul de construire a unor noi straturi (exterioare) de electroni, care se aseamănă între ele.

Spectrele atomice

Periodicitatea proprietăţilor elementelor care fac parte din aceeaşi grupă respectiv subgrupă a sistemului periodic al lui Mendeleev se extinde şi asupra spectrelor atomice.

Astfel toate metalele alcaline au spectre caracteristice de emisie şi de absorbţie asemănătoare; de asemenea sînt asemănătoare spectrele metalelor alcalino-pămîntoase şi spectrele gazelor inerte.

Trecînd însă de la un element la altul, de-a lungul unei perioade din sistemul periodic, observăm că spectrele se deosebesc de la element la element, devenind din ce în ce mai complicate, pentru ca după un anumit număr de elemente să se repete asemănarea dintre spectrele elementelor din aceeaşi grupă, respectiv subgrupă. Regularităţile constatate în spectrele atomilor s-au observat întîi la spectrele optice şi anume la spectrele din domeniul vizibil şi ultraviolet (nu poate fi vorba aici de spectrele infraroşii, deoarece acestea iau naştere numai în procesele care au loc în molecule şi nu în atomii liberi).

Regiunii vizibile şi regiunii ultraviolete le corespund salturile de electroni care se produc în straturile exterioare ale învelişului de electroni ai atomului.

Deoarece în emisiunile optice intervin electronii de pe ultimul strat, electronii optici sau de valenţă, care intervin şi în proprietăţile chimice ale elementelor, înseamnă că aceeaşi periodicitate după 8, 18, 32 de elemente se va produce şi la spectrele optice ale atomilor.

Deci periodicitatea proprietăţilor elementelor în sistemul periodic al lui Mendeleev, reflectă periodicitatea în poziţia electronilor din atomi. Această interpretare fizică este confirmată întru totul de structura spectrelor optice şi a spectrelor Röntgen (raze X).

Volumul atomic

Periodicitatea variaţiei proprietăţilor fizice se manifestă net dacă se compară volumele atomice ale elementelor (volumele ocupate de atomi gram ai elementelor în stare solidă).

Volumul atomic al elementelor creşte şi descreşte periodic în funcţie de greutatea atomică sau mai exact de numărul de ordine (*Z*) şi anume: în grupe creşte de sus în jos, iar în perioade de la dreapta la stînga.

Astfel metalele alcaline au volumul atomic cel mai mare, gazele inerte (zerovalente) cel mai mic, iar metaloidele au volumul atomic ceva mai apropiat de al alcalinelor.

Curba volumelor atomice arată că punctele de maxim sînt ocupate de metale alcaline (Li, Na, K, Rb, Cs), care au volumele atomice maxime.

Punctele de minim sînt apropiate de elementele din grupa IV din perioadele mici (C, Si) şi de elementele din triadele grupei VIII.

Între punctele de maxim şi minim, volumul atomic creşte şi apoi descreşte.

Curba volumelor atomice este precisă numai cînd elementele sînt în stare solidă ; ea devine imprecisă cînd elementul este în stare gazoasă sau lichidă, deoarece atunci el ocupă alt volum.

Volumul ionic

Volumul ionic ocupat de un atom odată sau de mai multe ori ionizat, este mai mic la ionii pozitivi (cationi) decît la anioni şi cu atît mai mic cu cît numărul

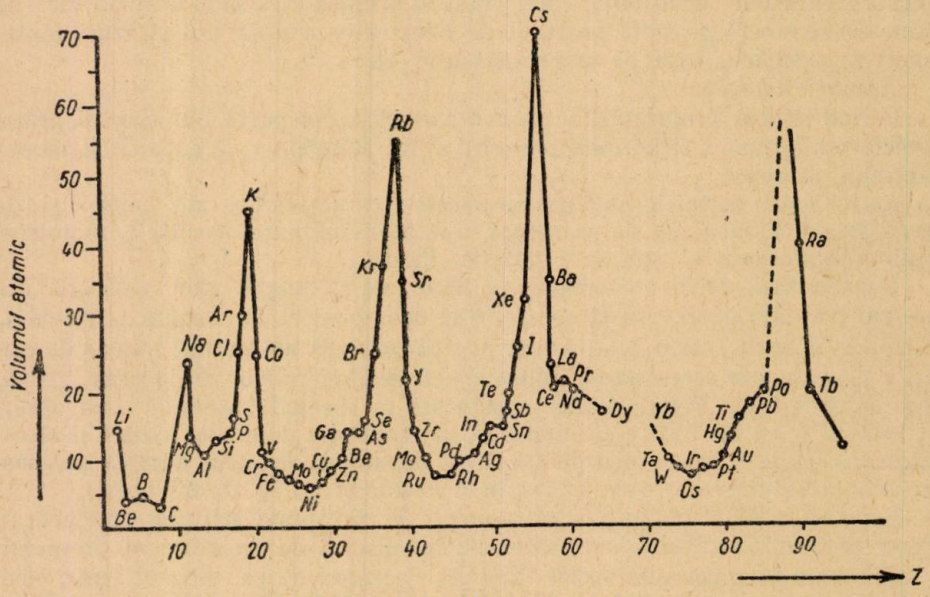


Fig. 2. Curba volumelor atomice.

de ionizare creşte ; la ionii negativi (anioni) volumul ionic creşte comparativ cu acela al atomului neutru. In concluzie volumele ionice *în grupe* cresc de sus în jos; *în perioade* de la stînga la dreapta descresc şi apoi cresc în funcţie de numărul de ordine (*Z*).

Potenţialul de ionizare (potenţialul ionic)

Potenţialul de ionizare reprezintă o măsură a energiei de legătură a electronilor în diferiţi atomi sau lucrul mecanic necesar pentru a îndepărta la o distanţă infinită electronul de atom. Deosebim mai multe feluri de potenţiale de ionizare:

— *de ordinul întîi*, care exprimă cantitatea de energie necesară pentru îndepărtarea primului electron;

— *de ordinul al doilea*, cantitatea de energie necesară pentru desprinderea electronilor de la un ion pozitiv monovalent;

— *de ordinul al treilea*, etc.

Este de subliniat că primul electron se desprinde mai uşor de la atom şi cu atît mai uşor cu cît se găseşte mai departe de nucleu. Prin îndepărtarea fiecărui electron următor, potenţialul de ionizare creşte, deoarece se măreşte sarcina liberă a ionului care atrage electroni. Foarte greu se desprinde *primul electron* de la atomii gazelor inerte (zerovalente) care au o stabilitate mare a învelişului electronic.

Cel de al doilea electron se îndepărtează mai greu la atomii elementelor din grupa I, cel de al treilea electron de la elementele grupei II, deoarece în ambele situații electronii îndepărtați aparțin învelișului electronic închis.

Astfel primul electron se îndepărtează foarte ușor la elementele grupei I (metalele alcaline), la care constituie unicul electron de valență și care inițiază o nouă pătură electronică. Ca regulă generală, în limitele aceleiași grupe, electronul este legat cu atît mai slab cu cît crește numărul de ordine (Z) al elementului. Acest lucru se explică prin aceia că la o structură electronică analoagă, atomul respectiv pierde electronul cu atît mai ușor cu cît acesta este așezat mai departe de nucleul încărcat pozitiv. Cu cît potențialul de ionizare al atomului este mai mic, cu atît mai ușor acesta cedează electroni. Petențialul de ionizare se exprimă în electron-volți (eV) *).

Potențialele ionice sînt funcții periodice ale numerelor de ordine (Z). Ele sînt legate strîns de proprietățile cele mai importante ale ionilor și ale combinațiilor lor, cum ar fi: proprietățile acido-bazice ale oxizilor, căldura de dizolvare a sărurilor, conductibilitatea electrică și volatilitatea clorurelor.

Astfel pe măsură ce crește potențialul ionic, scade caracterul bazic, apar proprietăți amfotere și în sfîrșit, se observă trecerea la proprietățile acide.

În tabelul de mai jos sînt reprezentate intervalele valorilor potențialelor ionice care corespund caracterului bazic, amfoter și acid al oxizilor, pentru două tipuri de structuri electronice ale stratului exterior:

Structura electronică a ionilor	Hidroxizi	Amfoteri	Acizi
	Valorile potențialelor ionice		
Strat exterior de 8 electroni, complet	$< 4{,}7$	$4{,}7-8{,}6$	$> 8{,}6$
Strat exterior de 18 electroni, complet	$< 2{,}0$	$2{,}0-6{,}0$	$> 6{,}0$

În general, proprietățile bazice ale hidroxizilor, formați din ioni care posedă structuri electronice de același tip, ale stratului exterior,sînt cu atît mai accentuate, și proprietățile acide cu atît mai slabe, cu cît este mai mică valoarea potențialelor ionice corespunzătoare.

Din figura 3 se observă că metalele alcaline au potențialul de ionizare cel mai mic, fiind situate în punctele minime ale curbei.

Astfel cesiul (Cs) are potențialul minim, deoarece el cedează cu ușurință un electron (electronul de valență) devenind ion pozitiv (cation) Cs^+, cedare care este ușurată de faptul că raza atomică este mare, iar forța de atracție dintre nucleul încărcat pozitiv și electronul de valență este mult micșorată conform legii lui Coulomb.

Cel mai greu se ionizează gazele inerte (zerovalente), deoarece au o configurație electronică la exterior foarte stabilă, iar pentru a îndepărta un electron dintr-un asemenea strat complet este necesară o energie foarte mare.

---

*) În fizica atomică energia se măsoară în electron-volți (eV); un electron-volt este egal cu energia pe care o capătă un electron după ce traversează o diferență de potențial de 1V; $1\ eV = 1.6 \cdot 10^{-12}$ erg.

Ca exemplu în acest sens putem da heliul (He), care are potenţialul maxim de ionizare, deoarece el are numai doi electroni pe stratul K, iar atracţia electrostatică dintre nucleu şi electroni este foarte puternică.

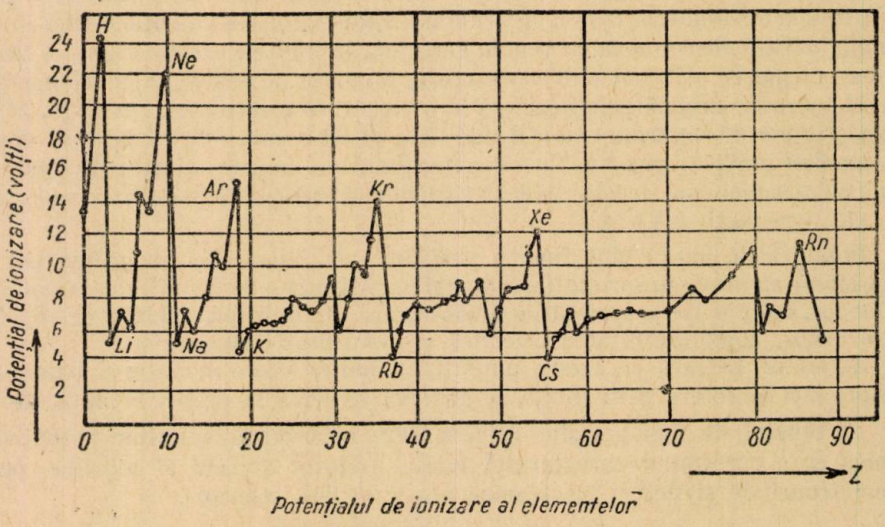


Fig. 3. Potenţialul de ionizare al elementelor

Raza atomică (ionică))*

Din figura 4 se observă că valoarea razei ionice a cationului de litiu (Li), a cationului de natriu (Na) este mai mică decît a razei atomice a atomului neutru de Li sau Na; de asemenea din figură se poate vedea că valoarea razei ionice a anionului de brom(Br) este mai mare (2) decît a razei atomice a atomului neutru de brom (Br), care este 1,1.

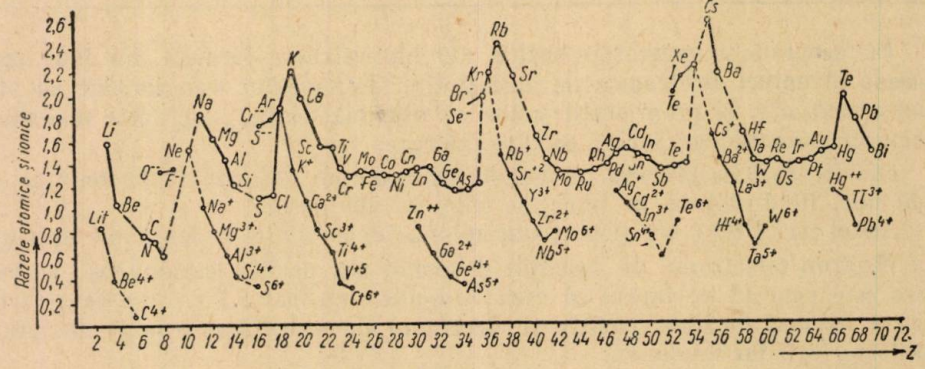


Fig. 4. Curba variaţiei razei atomice şi ionice.

Aceste cauze determină ca volumul ionic la cationi să fie cu atît mai mic cu cît numărul de ionizare creşte, iar volumul ionic la anioni să fie mai mare

*) — raza atomică este distanţa de la nucleu la periferia atomului.
— raza ionică este distanţa de la nucleu la periferia ionului.

ca acela al atomului neutru. Curba variației razei atomice (ionice) prezintă puncte maxime în dreptul metalelor alcaline și puncte minime în dreptul elementelor situate în mijlocul perioadelor.

De asemenea variază tot periodic greutățile specifice ale elementelor (în grupă de sus în jos, iar în perioade de la stînga la dreapta), apoi temperatura de topire, de fierbere, compresibilitatea, conductibilitatea electrică și starea de agregare.

Astfel, variația stării de agregare urmărită în sistem ne arată că în perioade ea tinde să fie gazoasă în spre dreapta perioadei (cazul elementelor N, O, F, Cl și gaze inerte), iar în grupe starea de agregare trece de la gazoasă la solidă de sus în jos (cu excepția Hg și Br). Încă două elemente se pot obține ușor în stare solidă: cesiul (Cs) la temperatura de +28° și galiul (Ga) la +30°. Restul elementelor sînt solide, dintre care 3/4 sînt metale care au în general culoarea cenușie. Metale colorate sînt: Cu, Au, Pb, Bi, iar dintre metaloide, colorate sînt: F, Cl (gazoase), Br (lichid) și C (grafit), Si, As, S, Se, Te, I (solide).

Periodicitatea proprietăților chimice

Proprietățile chimice ale atomului sînt date, în primul rînd, de numărul de electroni din stratul exterior, uneori și ai stratului vecin cu cel exterior, și de energia de legătură a electronilor cu atomul.

Dependența proprietăților atomilor și ionilor este mai mică față de stratul electronic al doilea și al treilea, reducîndu-se aproape la zero față de straturile electronice mai depărtate de cel exterior. Deoarece proprietățile chimice sînt date în primul rînd de electronii din stratul exterior, care variază periodic, pe măsură ce crește numărul de ordine în sistemul periodic, rezultă că tot periodic variază și proprietățile chimice ale elementelor.

Electropozitivitatea

Se numește electropozitivitate tendința elementelor de a pierde electroni și de a trece în ioni pozitivi (cationi). Se cunoaște că în stratul electronic exterior al atomilor elementelor se găsesc 1 pînă la 8 electroni. Acești electroni pot fi atrași total sau parțial de atomii altor elemente. Atomul respectiv cedează electronii săi cu atît mai ușor cu cît potențialul de ionizare este mai mic, și trece astfel în starea de ion pozitiv (cation).

Atomii tuturor elementelor, cu excepția gazelor inerte și a fluorului, dau naștere la ioni pozitivi. Dacă stratul exterior al învelișului atomic are numai un singur electron, atunci el pierde, în general, numai acest electron și se transformă în ion cu o singură sarcină pozitivă. Astfel de ioni cu o singură sarcină pozitivă formează metalele alcaline: Li^+, Na^+, K^+, Rb^+, Cs^+, Fr^+.

Dacă stratul exterior al învelișului atomic are doi electroni, atunci în general se desprind ambii electroni și rezultă un ion încărcat cu 2 sarcini pozitive. Astfel de ioni cu 2 sarcini pozitive formează elementele din grupa II a sistemului periodic: Be^{++}, Mg^{++}, Ca^{++}, Ba^{++}, Ra^{++}.

Dacă stratul electronic exterior este format din 3, 5, 7 electroni, *adică dintr-un număr nepereche de electroni*, atunci el poate ceda 1—7 electroni. Atomii, al căror strat electronic exterior este format din 3 electroni, formează ioni pozitivi: mono, bi și trivalenți. Așa de exemplu aluminiul (Al) dă naștere numai la un singur ion Al^{3+}, indiul (In) formează ioni: In^+, In^{++}, In^{3+}, taliul (Tl) formează ioni: Tl^+, Tl^{3+}.

Atomii al căror strat electronic exterior este alcătuit din 5 electroni, de exemplu azotul (N), formează cîțiva ioni pozitivi: N^+, N^{++}, N^{3+}, N^{4+}, N^{5+},

la fel avem cazul fosforului (P), care de asemenea dă naștere la cîțiva ioni pozitivi: P^{+}, P^{++}, P^{4+}, P^{5+}. Un alt exemplu îl constituie atomii clorului (Cl) al căror strat electronic exterior este alcătuit din 7 electroni și care formează următorii ioni pozitivi: Cl^{+}, Cl^{3+}, Cl^{4+}, Cl^{5+}, Cl^{7+}. Dacă însă stratul electronic exterior al atomului este alcătuit din: 4, 6 sau 8 electroni, *adică dintr-un număr pereche de electroni*, atunci atomul respectiv cedează perechi de electroni. De exemplu staniul sau cositorul (Sn)al cărui strat electronic exterior are 4 electroni, dă naștere la ionii: Sn^{++}, Sn^{4+}; sulful sau pucioasa (S) avînd în stratul electronic exterior 6 electroni, dă naștere la următorii ioni: S^{++}, S^{4+}; S^{6+}.

Atomii elementelor, la care completarea învelișului atomic cu electroni se face în stratul imediat vecin cu cel exterior, cedează mai întîi electronii din stratul exterior, apoi electronii din stratul vecin — care acum a devenit strat exterior — și așa mai departe pînă ce în stratul electronic exterior rămîn 8 electroni (octetul). De exemplu, manganul (Mn) a cărui valență maximă este 7, dă naștere următorilor ioni: Mn^{++}, Mn^{3+}, Mn^{4+}, Mn^{6+}, Mn^{7+}. De asemenea osmiul (Os) a cărui valență maximă este 8, dă naștere următorilor ioni: Os^{++}, Os^{3+}, Os^{4+}, Os^{6+}, Os^{8+}. Elementele cunoscute sub numele de lantanide și actinide cedează mai întîi electronii stratului exterior, iar apoi din cel vecin celui exterior, apoi din al treilea strat. Lantanidele în general dau naștere la ioni cu 3 sarcini. În afară de aceasta elementele: Ce, Pr, Nd și Tb (tot din familia lantanidelor), în unii compuși, formează ioni tetravalenți, iar Sm, Eu și Yb formează ioni bivalenți.

Actinidele în compușii lor pot avea următoarele valențe: Th (2, 3, 4); Pa (3, 4, 5); U (3, 4, 5, 6); Np (3, 4, 5, 6); Pu (3, 4, 5, 6); Am (2, 3, 4, 5, 6); Cm (3); Bk (3, 4); Cf (3).

În perioadele mici ale sistemului periodic, se observă că pe măsură ce numărul de ordine crește, numărul electronilor din stratul exterior crește și el continuu, iar ca urmare proprietatea de a ceda electroni exteriori descrește, ceea ce se traduce prin scăderea proprietăților metalice, în timp ce proprietățile metaloidelor cresc ca urmare a proprietății pe care o dobîndește atomul de a adiționa electroni exteriori. În felul acesta ne explicăm dece fiecare perioadă a sistemului periodic începe cu un metal tipic și se termină cu un metaloid tipic.

În perioadele mari, la fel ca și la perioadele mici, cedarea și adiționarea de electroni se efectuiază tot pe măsură ce numărul de ordine crește și concomitent cu aceasta crește continuu și numărul electronilor din stratul exterior, cu singura diferență că în perioadele mari proprietățile metalice descresc mai lent. Explicația acestui fapt constă în aceia că în perioadele mari (exemplu perioada IV-a), începînd cu scandiul (Sc) $Z = 21$ și terminînd cu prima jumătate a periodei, cu elementul nichel (Ni), completarea electronilor se face în penultimul strat de electroni și nu la ultimul; lantanidele și actinidele așezate în perioada 6 și 7, se completează cu electroni chiar în al treilea strat, socotind de la stratul exterior. Din această cauză în perioada 4 toate elementele primei jumătăți a perioadei au în stratul exterior 2 electroni, uneori 1 electron, caracterizîndu-se prin aceasta cu caracter predominant metalic.

La elementele așezate în cea de a doua jumătate a perioadei 4, începînd cu cuprul (Cu) și terminînd cu bromul (Br), numărul electronilor în stratul exterior crește continuu ca și în perioadele mici și de aceea proprietățile metalice des-

cresc treptat, iar cele metaloidice cresc treptat. În limitele grupelor principale (*a*) pe măsura creşterii numărului de ordine al elementului, creşte şi numărul straturilor de electroni ai învelişului atomilor, în timp ce electronii exteriori se îndepărtează treptat de nucleu şi din această cauză se intensifică proprietatea lor de a trece sub forma de ioni pozitivi, iar în paralel, scade proprietatea de a adiţiona electroni.

Electronegativitatea.

Electronegativitatea este tendinţa elementelor de a adiţiona electroni trecînd în ioni negativi sau anioni.

Cel mai uşor atrag electroni atomii care îşi completează stratul exterior pînă la un octet de electroni, adică au căpătat configuraţia electronică a gazelor inerte. Formarea ionilor cu sarcină negativă se bazează pe faptul că atomii al căror strat electronic exterior este format din 4, 5, 6 şi 7 electroni (elemente metaloide), adiţionează mai uşor electroni în stratul exterior pînă la 8 decît îi cedează pe ai lor. Atomii elementelor al căror strat exterior este format din: 1, 2 şi 3 electroni, nu pot adiţiona electroni în exces, de aceea ei nu formează ioni cu sarcini negative (cu excepţia hidrogenului care formează ion încărcat negativ numai în combinaţiile numite hidruri, exemplu NaH, hidrură de sodiu). Aceasta se explică prin aceea că atomii acestor elemente pentru a-şi completa stratul lor exterior pînă la 8, ar trebui să atragă 7, 6 şi 5 electroni, ceea ce este mai greu decît să piardă 1, 2, 3 electroni şi să lase descoperit stratul de 8 sau 18 electroni.

În concluzie, la cele arătate mai sus cel mai uşor cedează electroni elementele ai căror atomi după pierderea electronilor rămîn cu un octet de electroni în stratul exterior şi cel mai uşor atrag electroni acei atomi care îşi completează cu uşurinţă stratul exterior pînă la 8 electroni (octet).

În concluzie, în perioade, electropozitivitatea creşte de la dreapta la stînga, iar în grupe de sus în jos, în timp ce electronegativitatea în perioade creşte de la stînga la dreapta, iar în grupe de jos în sus. Din această cauză elementele cele mai electropozitive le vom găsi în partea stîngă a sistemului periodic şi anume în colţul din stînga jos (Fr), iar elementele cele mai electronegative le vom găsi în partea dreaptă a sistemului periodic şi anume cel mai electronegativ element va fi în colţul din dreapta sus (F).

Valenţa

Valenţa este dată de numărul de electroni din stratul exterior care determină de asemenea tipurile compuşilor elementului: oxizi, hidruri, hidroxizi, săruri. De exemplu, atomii de fosfor (P), arsen (As), stibiu (Sb) şi bismut (Bi) avînd acelaşi număr de electroni (5) pe stratul exterior vor forma compuşi identici, ca urmare a identităţii stărilor lor principale de valenţă (−3, +3, +5). Tocmai în aceasta constă cauza pentru care elementele arătate mai sus sînt aşezate în aceiaşi grupă din sistemul periodic.

Valenţa variază de la grupă la grupă şi de la element la element, depinzînd de configuraţia electronilor de valenţă. De aceia vom studia variaţia valenţei în grupe principale şi secundare cît şi în perioade. În primele două grupe principale valenţa rămîne constantă fiind aceea dată de numărul grupei. Aceasta se datoreşte numărului mic de electroni de valenţă precum şi tendinţei de ionizare a acestor elemente care iau configuraţia electronică a gazului inert precedent prin pierderea uşoară de electroni. În grupele III—VII, atomii elementelor respective tind să treacă într-o formă mai stabilă, fie luînd configuraţia electronică a gazului inert următor, fie a celui precedent. Dacă ne referim la

elementele aceleiași grupe, constatăm că elementele aparținînd perioadelor mari prezintă o variație mai mare a valenței. De exemplu dintre elementele din grupa III aluminiul (Al) este trivalent (avînd valența grupei respective) pe cînd taliul (Tl), prezintă o variație a valenței fiind și monovalent (Tl^{+} cu o singură sarcină pozitivă) și trivalent (Tl^{3+}).

Elementele din subgrupe prezintă o variație mai accentuată de valență din cauza aranjamentului electronilor, care permite o cedare sau cîștigare de electroni și din alte nivele mai profunde, cum ar fi cazul elementelor: Cu, Hg, Pt.

Elementele din subgrupe se observă că au în majoritatea cazurilor pe ultimul strat 2 electroni, cu excepția subgrupei I, care are un singur electron pe ultimul strat. Din această cauză elementul ca să formeze un cation simplu trebuie să cedeze 2 electroni, devenind astfel electropozitiv bivalent. În cazul cînd elementul ionizează și din straturile inferioare, se constată în general o tendință de a forma combinații complexe. În acest caz elementul manifestă o treaptă superioară de valență. Elementele pot avea mai multe trepte de valență, de exemplu manganul (Mn) poate avea următoarele trepte de valențe electropozitive: bi—, tri—, tetra—, hexa— și septavalent. În timp ce în treapta inferioară de valență (bi) manganul are caracter metalic ($Mn SO_4$), la treapta superioară de valență (septa) apare caracterul metaloidic ($K MnO_4$). În primul caz se stabilește legătura heteropolară, iar în al doilea caz în treapta de valență superioară, legătura homeopolară. Din această cauză unele săruri covalente ca $Fe Cl_3$ anhidră, nu conduc curentul electric.

In concluzie, valența maximă a elementelor față de oxigen este egală (cu mici excepții) cu numărul grupei din care face parte elementul. Fac excepție în ceea ce privește valența față de oxigen numai Cu și Au din grupa I (care au valența maximă II respectiv III), dar care sînt monovalente în unele combinații ale lor, și elementele din grupa VIII (dintre acestea numai Ru și Os formează oxizii RuO_4 și OsO_4 în care sînt octovalente, în vreme ce celelalte elemente din grupa VIII au o valență mai mică). Elementele cu valență mai mare ca 8 nu se cunosc. Valența minimă a elementelor față de hidrogen în grupele I—IV este egală cu numărul grupei, iar în grupele IV—VII este egală cu diferența între cifra 8 și numărul grupei.

Astfel, valența față de hidrogen a elementelor din grupa IV este 4 și ea scade traptat la 3, 2, 1 (la elementele din grupele V, VI, VII). Este de remarcat că la acele elemente care formează compuși atît cu hidrogenul cît și cu oxigenul, suma valențelor față de H și O este 8.

Tabel cuprinzînd formulele compușilor caracteristici ai elementelor sistemului periodic cu: hidrogenul, oxigenul și cu un halogen (F, fluorul)

Grupa	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	0
Compuși cu hidrogenul	—	—	—	RH_4	RH_3	RH_2	RH	—	0
Oxizii cei mai înalți	R_2O	RO	R_2O_3	RO_2	R_2O_5	RO_3	R_2O_7	RO_4	0
Compuși cu fluorul	RF	RF_2	RF_3	RF_4	RF_5	RF_6	RF_7	RF_8	0

R = atom al elementului respectiv.

Observație. În cazul cînd un element formează cu H, O, F mai mulți compuși, în tabel s-a trecut numai compusul în care elementul are valența cea mai mare posibilă.

Neregularități și imperfecțiuni ale sistemului periodic

Ca *neregularități* observate în sistemul periodic putem arăta că *în trei locuri*, elementele au fost așezate în ordinea inversă a greutăților atomice. Astfel, *argonul* (Ar) cu greutatea atomică 39,944, a fost așezat înaintea kaliului (K) cu greutatea atomică 39,100, mai mică decît a argonului; cobaltul (Co) cu greutatea atomică 58,94 a fost așezat înaintea nichelului (Ni) cu greutatea atomică 58,69; telurul (Te) cu greutatea atomică 127,61 a fost așezat înaintea iodului (I) cu greutatea atomică 126,91.

Ca *imperfecțiuni*, observate în sistemul periodic putem arăta încadrarea oarecum forțată a elementelor din grupa VIII în pleiade de 3 elemente: (Fe, Co, Ni), (Ru, Rh, Pd), (Os, Ir, Pt), pentru care regula variației periodice a proprietăților în funcție de greutatea atomică este întreruptă. O altă întrerupere a periodicității proprietăților în funcție de greutatea atomică, dar mai accentuată, se observă la cele 14 elemente din familia lantanidelor (pămînturi rare), încadrate toate în aceiași căsuță a grupei III, după care periodicitatea este reluată în mod normal cu elementul hafniu (Hf) din grupa a IV.

De asemenea, familia actinidelor este alcătuită dintr-o pleiadă de 11 elemente asemănătoare, încadrate în aceiași căsuță: Th (thoriu), Pa (protactiniu), U (uraniu), Np (neptuniu), Pu (plutoniu), Am (americiu) Cm (curium), Bk (berkeliu), Cf (californiu, E (einșteiniu), Fm (fermiu). Datorită neregularităților și imperfecțiunilor constatate în sistem, s-a ajuns la concluzia că greutatea atomică este o însușire nepotrivită pentru a servi ca bază exactă de clasificare a elementelor, deoarece greutatea atomică este media aritmetică a greutăților atomice a izotopilor ce alcătuiesc elementul respectiv și ea poate avea valori diferite din cauza proporției izotopilor componenți.

În urma lucrărilor lui Moseley și ulterior prin teoria lui Bohr faptele și legile descoperite în timpul studierii experimentale și teoretice a problemei structurii atomului au dovedit că proprietățile elementelor se repetă periodic, în funcție de numărul de electroni și de așezarea lor în straturi, adică în funcție de numărul de ordine (Z) (care exprimă numărul de sarcini pozitive ale nucleului, egal cu numărul electronilor din afara nucleului) și nu în funcție de greutatea atomică.

Cu ajutorul spectrelor de raze X s-au determinat mărimile sarcinilor nucleare la atomii tuturor elementelor. Ca rezultat al acestor determinări s-a ajuns la concluzia că în sistemul periodic al lui Mendeleev, elementele sînt așezate într-o succesiune riguroasă, în ordinea crescîndă a numărului de ordine (Z), respectiv a sarcinilor nucleelor atomilor.

Deci mărimea fundamentală de care depind atît proprietățile elementului cît și locul său în sistemul periodic *este sarcina nucleului atomic* (numărul de ordine Z).

În lumina acestei baze noi a așezării elementelor în sistemul periodic, *legea periodicității* a lui Mendeleev se poate formula astfel:

« *Proprietățile elementelor se găsesc într-o dependență periodică de sarcinile nucleelor atomice* ».

Descoperirea numărului de ordine (Z) ca bază nouă a clasificării elementelor a confirmat justeţea inversiunilor făcute în sistem de către Mendeleev.

Astfel argonul (Ar) cu numărul de ordine (Z) egal cu 18 era normal să fie aşezat înaintea kaliului (K) cu numărul de ordine 19; la fel cobaltul (Co) cu numărul de ordine 27 era firesc să fie aşezat înaintea nichelului (Ni) cu numărul de ordine 28 şi în acelaşi fel s-a dovedit justeţea aşezării telurului (Te) cu numărul de ordine 53.

În acelaşi fel s-a găsit confirmare pentru aşezarea elementelor din triadele grupei VIII, pentru cele 14 lantanide aşezate într-o singură căsuţă cît şi pentru cele 11 actinide, ca avînd numere de ordine diferite, iar aşezarea lor făcîndu-se în ordinea crescătoare a acestor numere de ordine.

Contradicţiile aparente, izvorîte din inversiunile făcute în sistem, precum şi din întreruperea periodicităţii proprietăţilor ca urmare a aşezării oarecum forţate a mai multor elemente într-o singură căsuţă, au căzut odată cu lucrările lui Moseley, confirmîndu-se locul indicat de Mendeleev pentru aceste elemente ca exact.

De asemenea lucrările lui Moseley au confirmat numărul de elemente încă nedescoperite, indicînd elementele posibile în căsuţele goale şi care corespundeau cu acelea prezise de Mendeleev.

Lucrările lui Moseley şi apoi teoria lui Bohr au aruncat asupra întregului sistem periodic al lui Mendeleev o lumină nouă, prin aceea că legea periodicităţii a căpătat o imagine fizică prin revenirea formaţiunilor electronice periodic în structura atomului, iar sistemul periodic o confirmare mai adîncă, devenind mai armonios şi mai important.

Importanţa practică a sistemului periodic

Sistemul periodic al elementelor are o dublă importanţă practică:

1) *de ordin didactic* şi 2) *de ordin ştiinţific.*

1. Din punctul de vedere al utilităţii didactice, sistemul periodic înlesneşte înţelegerea proprietăţilor fizice şi chimice ale elementelor în tratarea lor descriptivă, constituind prin aceasta baza studiului chimiei descriptive.

2. Din punct de vedere al utilităţii ştiinţifice, sistemul periodic şi legea periodicităţii serveşte ca instrument de cercetare ştiinţifică.

Astfel sistemul periodic al elementelor al lui Mendeleev a prezentat o importanţă mare pentru rezolvarea valenţei, calcularea şi corectarea greutăţilor atomice ale elementelor: Be, In, U, Cs, cărora li s-a atribuit prin calcule o altă valenţă decît cea reală, precum şi pentru prevederea eca-elementelor, care au servit lui Mendeleev la completarea sistemului său iniţial cu elemente noi descoperite: Sc, (Eca B), Ga (Eca Al), Ge (Eca Si), etc.

Descoperirea gazelor inerte, începînd cu anul 1893 şi următorii, a constituit un examen pentru legea periodicităţii şi sistemul periodic al elementelor.

După descoperirea lor s-a constatat că aceste gaze sînt total deosebite de restul elementelor şi că « trebuie introduse într-o grupă specială zero-valentă », care formează o delimitare naturală între metale şi metaloide. Astfel descoperirea gazelor inerte (zerovalente) nu numai că nu a prejudiciat sistemul periodic, dar mai mult a însemnat o confirmare a sistemului periodic, care prin descoperirea gazelor inerte a devenit mai complet.

Descoperirea ulterioară a elementelor cu numerele de ordine: 43 (Tc, tecneţiu), 61 (Pm, prometeu), 75 (Re, reniu), 85 (At, astatin), 87 (Fr, franciu)

a fost posibilă datorită lui Mendeleev, care a prevăzut existența și proprietățile acestor elemente, lăsînd în tabelă un anumit număr de căsuțe goale, pentru a face să apară periodicitatea proprietăților, căsuțe în care trebuiau să intre elementele necunoscute.

De asemenea toate teoriile structurii atomilor și ale legăturii chimice, începînd cu teoria lui Bohr și terminînd cu mecanica ondulatorie, se bazează direct sau indirect pe legea periodicității și sistemul periodic al elementelor a lui Mendeleev, care au servit ca principiu conducător la elaborarea acestor teorii.

CÎTEVA TEOREME DE MAXIME ȘI MINIME

ION I. CRISTEA, student

PENTRU o completare a unor cunoștințe de matematici elementare care nu sînt prevăzute în programa școlară, elevii din învățămîntul mediu pot studia cu folos și face aplicații la cele expuse mai jos, la cercurile de elevi ale școlilor medii.

1. Ținînd seama de identitatea

$$(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2 \quad ; \quad (x > 0 \quad ; \quad y > 0); \tag{1}$$

considerînd produsul $p^2 = xy$ (constant), avem:

$$(x + y)^2 = 4p^2 + (x - y)^2$$

și se observă că suma $x + y$ se micșorează cînd termenul $(x - y)^2$ se micșorează. Cum însă $(x-y)^2$ este un patrat perfect, el este pozitiv și deci superior lui zero. Înseamnă că pentru

$$(x-y)^2 = 0 \quad ; \quad x = y = p > 0,$$

iar suma $x + y$ este minimă și egală cu

$$x + y = 2p.$$

Deci:

Suma a doi termeni pozitivi al căror produs este constant este minimă cînd termenii devin egali.

Dacă luăm acum suma $S = x + y$ constantă avem:

$$xy = \frac{S^2}{4} - \frac{1}{4}(x - y)^2$$

și produsul $p = xy$ se mărește cu cît $(x - y)^2$ se micșorează și va avea cea mai mare valoare pentru

$$(x - y)^2 = 0 \quad ; \quad x = y = \frac{S}{2},$$

și anume,

$$p = xy = \frac{S^2}{4},$$

încît:

— *Produsul a doi factori a căror sumă e constantă este maxim cînd factorii devin egali.*

2. Ţinînd seamă că la o funcţie formată din adunarea mai multor funcţii, maximul (sau minimul) ei este egal respectiv cu suma maximelor (sau minimelor) funcţiilor componente cînd variabilele pentru care au loc maximele (sau minimele) coexistă în acelaş timp, urmează că funcţia:

$$f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

are un minim egal cu zero, căci funcţiile $(x-y)^2$, $(y-z)^2$, $(z-x)^2$ ce o compun au simultan un minim egal cu zero pentru $x = y$, $y = z$, $z = x$, adică $x = y = z$. Deci:

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqslant 0,$$

de unde

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx, \tag{2}$$

egalitatea avînd loc pentru $x = y = z$.

Adunînd ambilor membri ai inegalităţii (2) pe $2(xy + yz + zx)$ obţinem

$$(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + xz + zx) \tag{3}$$

şi considerînd suma $xy + yz + zx = a^2$ constantă, funcţia

$$x + y + z \geqslant a\sqrt{3},$$

unde am luat pe x, y, z pozitivi, minimul avînd loc pentru $x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Deci:

— *Dacă suma produselor a trei numere pozitive luate cîte două este constantă, atunci suma numerelor este minimă cînd cele trei numere sînt egale.*

Dacă luăm $x + y + z = a$ = constant, din (3) deducem:

$$xy + yz + zx \leqslant \frac{a^2}{3},$$

încît pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$ avem egalitate. Aşa că:

— *Dacă suma a trei numere este constantă, atunci suma produselor lor luate cîte două este maximă cînd cele trei numere devin egale.*

Dacă dublăm inegalitatea (2) şi-i adunăm în ambii membrii pe $x^2 + y^2 + z^2$ găsim:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (x + y + z)^2; \tag{4}$$

şi considerînd $x + y + z = a$ (constantă) avem

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{a^2}{3},$$

egalitatea avînd loc pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$. Rezultă:

— *Dacă suma a trei numere este constantă, suma patratelor lor este minimă dacă numerele sînt egale.*

Presupunînd acum pe $x^2+y^2+z^2=a^2$ constant, deducem din (4), luînd x, y, z pozitivi:

$$x + y + z \leqslant a\sqrt{3},$$

suma admiţînd un maxim pentru $x = y = z = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Deci:

— *Dacă suma patratelor a trei numere pozitive este constantă, suma lor este maximă cînd cele trei numere devin egale.*

Reluînd inegalitatea (3) pentru x, y, z pozitivi,

$$(x + y + z)^2 \geqslant 3\,(xy + yz + zx),$$

încît făcînd pe x egal cu yz, pe y egal cu zx, pe z egal cu xy, obţinem inegalitatea:

$$(xy + yz + zx)^2 \geqslant 3\,(xyz^2 + x^2\,yz + xy^2\,z)$$

sau

$$(xy + yz + zx)^2 \geqslant 3\,xyt\,(x + y + z);$$

şi comparînd-o cu (3) rezultă:

$$(x + y + z)^4 \geqslant 9\,(xy + yz + zx)^2 \geqslant 27\,xyz\,(x + y + z)$$

şi cum $x + y + z = a > 0$ (a = constantă):

$$(x + y + z)^3 \geqslant 27\,xyz,$$

$$xyz \leqslant \frac{a^3}{27},$$

unde pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$ produsul xyz este maxim. Urmează:

— *Produsul a trei factori pozitivi a căror sumă este constantă este maxim cînd cei trei factori devin egali.*

3. Dacă avem $x + y = a$ = constant şi ($x > 0$, $y > 0$), să studiem cazul funcţiei

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Din inegalitatea imediată:

$$(x + y)^2 \geqslant 4\,xy,$$

întrucît $x + y > 0$, avem:

$$\frac{x + y}{xy} \geqslant \frac{4}{x + y}$$

sau

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{a}$$

şi este evident că pentru $x = y = \frac{a}{2}$ funcţia $f(x, y)$ are **un minim** egal cu $\frac{4}{a}$.

Deci:

— *Dacă suma a doi termeni pozitivi este constantă, suma inverselor lor este minimă cînd cei doi termeni devin egali.*

Fie acum, funcţia de trei variabile pozitive:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Considerăm identitatea

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = 3xyz + x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2),$$

dar cum avem simultan:

$$y^2 + z^2 \geqslant 2yz \quad ; \quad y^2 + x^2 \geqslant 2zx \quad ; \quad x^2 + y^2 \geqslant 2xy,$$

egalităţile avînd loc pentru $y = z$; $z = x$; $x = y$, adică $x = y = z$, rezultă:

$$3xyz + x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) \geqslant 9xyz$$

deci

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \geqslant 9xyz,$$

şi cum x, y, z sînt numere pozitive:

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} \geqslant \frac{9}{x + y + z}$$

Să considerăm $x + y + z = a$ = constant. Făcînd împărţirea în membrul întîi, obţinem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{a},$$

minimul are loc pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$, încît:

— *Dacă suma a trei numere este constantă, suma inverselor lor este minimă cînd cele trei numere devin egale.*

2. Pînă acum am studiat funcţii de două sau trei variabile independente. Să extindem cele cîteva propoziţii enunţate asupra funcţiilor cu şi mai multe variabile.

Asupra metodelor pe care le vom folosi acolo unde aplicarea diferitelor identităţi şi inegalităţi ar duce la raţionamente lungi şi obositoare, vom aplica cu deosebit succes metoda reducerii la absurd, metodă cunoscută de cititori.

1. Considerăm funcţia:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = \sum_{i \neq j = 1}^{n} (x_i - x_j)^2$$

al cărei minim este zero, căci suma funcţiilor ce o formează e pozitivă, iar funcţiile ce o compun fiind patrate perfecte, au minimele egale cu zero cînd în acelaş timp:

$$x_i - x_j = 0 \qquad (i \neq j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

adică:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n.$$

Deci:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \geqslant 0$$

sau punînd-o sub forma:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1 - x_2)^2 + \\ (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \\ (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1 - x_{n-1})^2 + (x_2 - x_{n-1})^2 + (x_3 - x_{n-1})^2 + \ldots + (x_{n-2} - x_{n-1})^2 + \\ (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_n)^2 + (x_3 - x_n)^2 + \ldots (x_{n-2} - x_n)^2 + (x_{n-1} - x_n)^2.\end{array}\right\} \geqslant 0$$

Dezvoltînd patratele şi efectuînd calculele, găsim:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n) \geqslant 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + \ldots + x_{n-1} x_n). \quad (5)$$

În membrul al doilea avem suma tuturor produselor formate două cîte două din numerele x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Adunînd ambilor membri ai inegalităţii (5) pe $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ se obţine în membrul al doilea un patrat perfect:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

şi considerînd suma constantă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ rezultă:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{a^2}{n},$$

egalitatea avînd loc, după cum s-a văzut, pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Deci:

Dacă suma mai multor termeni variabili este constantă, suma patratelor lor este minimă cînd toţi termenii devin egali.

Dacă scriem inegalitatea (5) sub forma

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{2}{n-1}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + \ldots + x_{n-1} x_n)$$

şi adăugăm ambilor membri suma:

$$2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + \ldots x_{n-1} x_n),$$

obţinem în membrul întîi un patrat perfect:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geqslant \frac{2n}{n-1}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + \ldots + x_{n-1} x_n).$$

şi luînd la fel $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a = \text{constant}$, rezultă:

— *Dacă suma mai multor termeni variabili este constantă, suma produselor lor luate două cîte două este maximă cînd toţi termenii devin egali.*

Putem ajunge la ultimele două teoreme dacă vom folosi identitatea lui Lagrange [1]).

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2 + \sum_{p \neq q = 1}^{n} (a_q x_p - a_p x_q)^2,$$

[1]) Cu care cititorii s-au întîlnit în cuprinsul articolului tovarăşului profesor H. Ionescu despre Valori Medii, în R.M.F. nr. 3 anul IV, p. 55.

în care făcînd $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1$ rezultă:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + \sum_{p \neq q=1}^{n} (x_p - x_q)^2,$$

căci

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}} = n;$$

și suprimînd suma pozitivă

$$\sum_{p \neq q=1}^{n} (x_p - x_q)^2 \geqslant 0,$$

semnul egalității fiind considerat cînd concomitent

$$(x_p - x_q)^2 = 0 \quad ; \quad (p \neq q = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

adică

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n \ ;$$

obținem:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

la care odată ajunși, restul urmează identic ca mai înainte.

NOTE MATEMATICE

9. ASUPRA DREPTELOR ȘI PLANELOR ISOGONALE

În Gazeta Matematică și Fizică, seria B, 1954, nr. 9, a apărut o notă intitulată « Drepte isogonale », care cuprinde principalele proprietăți ce se pot dezvolta în legătură cu noțiunea de drepte isogonale în plan. Cu această ocazie nu a fost însă amintită teorema lui Steiner privind dreptele isogonale. În rîndurile ce urmează ne propunem să enunțăm și să dăm o nouă demonstrație, deosebită de cele cunoscute *), acestei teoreme și cu această ocazie vom pune în evidență cîteva propoziții în legătură cu considerațiile ce le vom face în cursul demonstrației. În continuare, vom introduce noțiunea de plane isogonale și vom stabili cîteva propoziții ce le caracterizează; apoi, vom extinde teorema lui Steiner la tetraedru.

I.

Dacă AM și AN sînt două drepte isogonale în triunghiul ABC, există relația (lui Steiner):

$$\frac{\overline{BM} \cdot \overline{BN}}{\overline{CM} \cdot \overline{CN}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

*) Alte demonstrații ale acestei teoreme se găsesc în G. Țițeica: *Culegere de probleme de geometrie*. 1929, cap. IX, exercițiul 28 și cap. XIV, exercițiul 46.

Pentru a o dovedi, considerăm cercul AMN şi notăm cu B' şi C' punctele unde AB şi AC retaie acest cerc (fig. 1).

Scriind puterile punctelor B şi C faţă de cercul AMN, avem relaţiile:

$$\overline{BM} \cdot \overline{BN} = \overline{BB'} \cdot \overline{BA}, \qquad (1)$$

$$\overline{CM} \cdot \overline{CN} = \overline{CC'} \cdot \overline{CA}. \qquad (2)$$

Făcînd observaţia că dreptele BC şi $B'C'$ sînt paralele (deoarece $\sphericalangle B'AM = \sphericalangle C'AN$ şi deci $\widehat{B'M} = \widehat{C'N}$), rezultă:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \qquad (3)$$

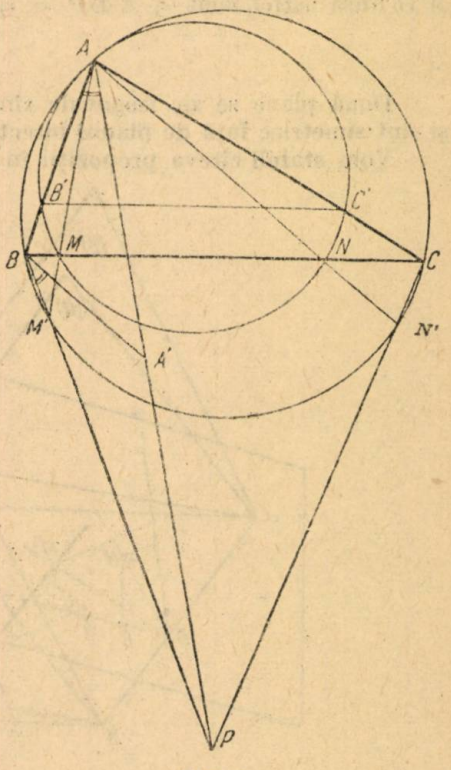


Fig. 1

Împărţind relaţiile (1) şi (2) şi ţinînd seama de relaţia (3) obţinem relaţia lui Steiner ce caracterizează dreptele isogonale. Menţionăm că această teoremă ne poate ajuta să demonstrăm pe o altă cale, propoziţia 3 din nota citată:

Dacă într-un triunghi trei ceviene sînt concurente şi isogonalele lor sînt concurente.

Într-adevăr, exprimînd rapoartele în care cel de-al doilea grup de ceviene împarte laturile triunghiului considerat, în funcţie de rapoartele în care primul grup de ceviene împarte aceleaşi laturi, cu ajutorul teoremei lui Steiner, putem uşor verifica relaţia lui Menelaus ce exprimă concurenţa isogonalelor dreptelor iniţiale.

II.

În legătură cu cele de mai sus putem stabili următoarele propoziţii:

a) Dacă AM şi AN sînt două drepte isogonale în triunghiul ABC, cercurile AMN şi ABC sînt tangente.

Justificarea o avem în faptul că dreptele BC şi $B'C'$ sînt paralele.

Caz particular: Cercurile ce trec prin vîrfurile unui triunghi şi sînt tangente laturilor opuse în punctele de intersecţie cu bisectoarele unghiurilor respective, sînt tangente şi cercului circumscris triunghiului considerat.

b) Fie M' şi N' punctele unde dreptele AM şi AN retaie cercul ABC. Axul radical al cercurilor ANB şi AMC trece prin punctul de intersecţie al dreptelor BM' şi CN'.

În adevăr, urmărind egalităţile de unghiuri: $\sphericalangle BCN' = \sphericalangle M'BC = \sphericalangle MAC = \sphericalangle NAB$, rezultă că dreptele BM' şi CN' sînt tangente respectiv cercurilor ABN şi ACM.

Cu observaţia că $P \equiv (BM', CN')$ este egal distanţat de B şi C, proprietatea de mai sus este demonstrată.

Să notăm cu A' punctul unde cercurile ABN și ACM se taie a doua oară. Rezultă $\overline{PA'} \cdot \overline{PA} = \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$, deci punctul A' se poate găsi fără a trasa cercurile ABN și ACM. Anume, este intersecția dreptei AP cu dreapta $A'B$ dusă astfel încît $\sphericalangle A'BP = \sphericalangle BAP$.

III.

Două plane se zic isogonale cînd pornesc din muchia unui unghi diedru și sînt simetrice față de planul bisector al acestui unghi.

Vom stabili cîteva propoziții în legătură cu planele isogonale.

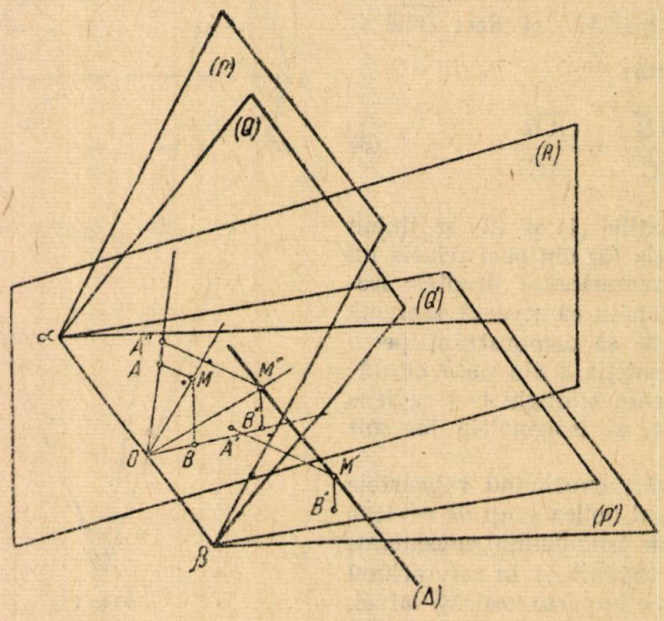


Fig. 2

a) Fie M, M' două puncte situate în cîte unul din planele isogonale (Q), (Q'). Notăm cu A, B și A', B' respectiv proiecțiile punctelor M și M' pe planele (P) și (P') ce formează unghiul diedru considerat (fig. 2). Există relația:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'A'}}.$$

Fie (R) planul ce conține punctul M și este perpendicular pe muchia $\alpha\beta$ a unghiului diedru, iar (Δ) dreapta dusă prin M' paralelă la $\alpha\beta$. Însemnăm cu M'' punctul unde (Δ) înțeapă pe (R), iar cu A'', B'' proiecțiile lui M'' respectiv pe planele (P), (P').

O fiind punctul comun lui (R) și $\alpha\beta$, se observă că dreptele OM și OM'' sînt isogonale în unghiul AOB.

Prin urmare, putem scrie:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M''B''}}{\overline{M''A''}}.$$

Cu menţiunea că $\overline{M'A'} = \overline{M''A''}$ şi $\overline{M'B'} = \overline{M''B''}$ relaţia propusă este stabilită. Atragem atenţia că şi reciproca este adevărată.

b) Dacă trei plane ce trec prin muchiile unui triedru sînt în fascicol şi planele isogonale acestora sînt în fascicol.

În adevăr, să considerăm triedrul $O\alpha\beta\gamma$ şi planele (P_1), (P_2), (P_3) ce conţin dreptele $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ şi au în comun dreapta (Δ). Fie acum (P_1'), (P_2'). (P_3') planele isogonale acestora, iar (Δ') dreapta de intersecţie a planelor (P_1') şi (P_2').

Pe dreptele (Δ) şi (Δ') luăm două puncte oarecare M şi M' şi însemnăm cu A, B, C respectiv A', B', C' proiecţiile lor pe feţele triedrului (fig. 3).

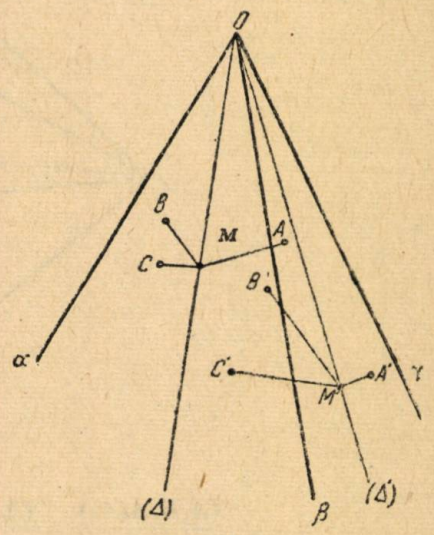


Fig. 3

Conform cu relaţia (III, *a*) avem:

$$\overline{MA} \cdot \overline{M'A'} = \overline{MC} \cdot \overline{M'C'}$$

şi

$$\overline{MB} \cdot \overline{M'B'} = \overline{MC} \cdot \overline{M'C'},$$

de unde

$$\overline{MA} \cdot \overline{M'A'} = \overline{MB} \cdot \overline{M'B'}$$

sau

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'A'}},$$

adică planul (P_3') conţine punctul M', deci şi dreapta (Δ').

Dreptele (Δ) şi (Δ') le vom numi isogonale în raport cu triedrul $O\alpha\beta\gamma$.

c) Dacă considerăm un punct O şi un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$, printr-un raţionament analog celui precedent se poate arăta că planele isogonale planelor definite de punctul O şi muchiile tetraedrului au de asemenea un punct comun Ω. Punctele O şi Ω le vom numi isogonale în raport cu tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$.

În legătură cu noţiunile introduse mai sus privind planele isogonale, se pot stabili proprietăţi interesante.

În rîndurile următoare vom însemna aria unui triunghi şi volumul unui tetraedru prin vîrfurile lor înschise în cîte o paranteză. De exemplu: aria $ABC = (ABC)$ şi volumul $ABCD = (ABCD)$.

IV

Dacă $B_1A_3A_4$ şi $B_2A_3A_4$ sînt două plane isogonale în tetraedrul oarecare $A_1A_2A_3A_4$, există relaţia (extinderea teoremei lui Steiner la tetraedru):

$$\frac{\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1B_2}}{\overline{A_2B_1} \cdot \overline{A_2B_2}} = \frac{(A_1A_3A_4)^2}{(A_2A_3A_4)^2},$$

Pentru demonstraţie vom face uz de următoarele expresii ce se pot da volumului unui tetraedru oarecare $A_1A_2A_3A_4$:

$$V = \frac{2}{3} \frac{(A_1A_3A_4) \cdot (A_2A_3A_4) \cdot \sin \sphericalangle (A_1A_3A_4,\ A_2A_3A_4)}{\overline{A_3A_4}}$$

și

$$V = \frac{1}{6} \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} \cdot \delta \cdot \sin \sphericalangle (A_1A_2, A_3A_4),$$

δ fiind distanța cea mai scurtă între dreptele A_1A_2, A_3A_4 *). Așa fiind, rezultă relațiile (fig. 4):

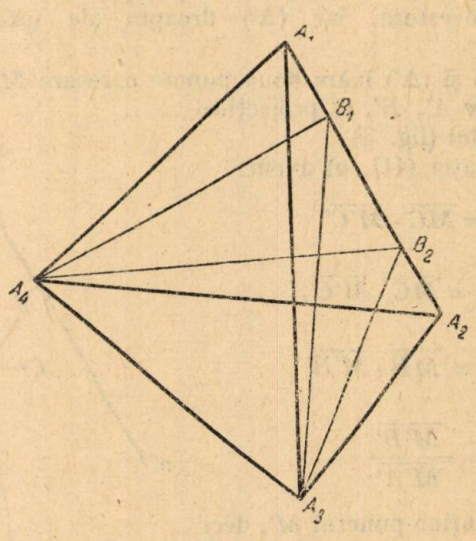


Fig. 4

$$\frac{(A_1B_1A_3A_4)}{(A_2B_2A_3A_4)} = \frac{(A_1A_3A_4)\,(B_1A_3A_4)}{(A_2A_3A_4)\cdot(B_2A_3A_4)} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}}, \tag{1}$$

$$\frac{(A_1B_2A_3A_4)}{(A_2B_1A_3A_4)} = \frac{(A_1A_3A_4\,(B_2A_3A_4)}{(A_2A_3A_4)\cdot(B_1A_3A_4)} = \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{A_2B_1}}. \tag{2}$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) obținem relația din anunț.

Mihail I. Popescu
Student, Inst. de Construcții, București

---

*) Prima relație se poate deduce din relația cunoscută $V = \frac{1}{3} H_1 \cdot (\text{aria } A_2A_3A_4)$, exprimînd pe H_1 în funcție de înălțimea h_1 a triunghiului $A_1A_3A_4$ și de unghiul fețelor $A_1A_3A_4$ și $A_2A_3A_4$ și apoi ținînd seama că $h_1 = \frac{2(A_1A_3A_4)}{A_3A_4}$.

Relația a doua rezultă din construcția tetraedrului $A_1MA_3A_4$ cu muchia A_1M egală și paralelă cu A_1A_2 și din observația că vol $(A_1MA_3A_4)$ = vol $(A_1A_2A_3A_4)$.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Centrul de greutate.** Se confecţionează din hîrtie groasă sau din carton, două conuri identice; se lipesc cu bazele unul de altul. Se leagă două rigle la un capăt şi se pun cu muchia pe masă. Se depărtează capetele libere ale riglelor sprijinindu-le pe o carte (fig. 1). Se aşează corpul confecţionat pe rigle în apropierea capetelor legate; acesta se va rostogoli în sus spre capetele libere ale riglelor, sprijinite pe carte.

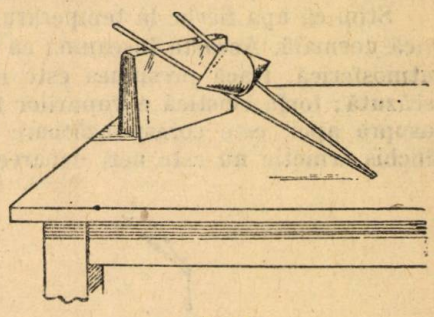


Fig. 1

Cum se explică acest lucru?

Centrul de greutate al corpului confecţionat coboară nu urcă atunci cînd corpul se rostogoleşte urcînd pe cele două rigle care formează un unghi între ele.

2. **Inerţie.** Se aşază pe o sticlă obişnuită un cerc confecţionat din carton sau hîrtie tare, cu diametrul de 10—12 cm. Se pune deasupra pe cerc o monedă astfel încît să se afle exact deasupra gurii sticlei (fig. 2). Se introduce în cerc un bastonaş şi se loveşte cu el repede lateral cercul de carton; acesta va zbura imediat într-o parte, iar moneda va cădea în sticlă.

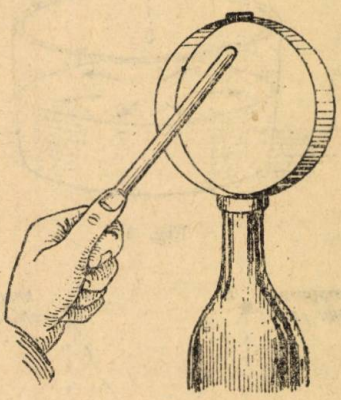


Fig. 2

Pe baza cărei legi din fizică se petrece acest lucru? Legea întîi a dinamicii exprimă principiul inerţiei: orice corp are proprietatea de a-şi păstra starea de repaus sau de mişcare uniformă şi rectilinie, atîta vreme cît influenţa altor corpuri nu-l va obliga să-şi schimbe această stare. Această proprietate a corpurilor se numeşte inerţie.

Conform acestei proprietăţi moneda aşezată pe cerc nu ia parte la mişcarea bruscă a cercului care se deplasează prin lovire. Lipsindu-i sprijinul ea cade la verticală ajungînd astfel, în interiorul sticlei.

3. **Fierberea apei prin răcirea vasului în care se află.** Se ia un balon de sticlă cu pereţi subţiri, se toarnă în acesta apă pînă la aproximativ două treimi din volumul lui. Se aduce apa la fierbere. Se ia balonul de la foc şi se astupă ermetic cu un dop de plută sau de cauciuc. Se observă că apa în balon nu mai fierbe. Înfăşurînd gîtul balonului cu o cîrpă îl apucăm în mînă, îl răsturnăm cu gîtul în jos şi dacă avem la îndemînă un stativ, îl fixăm aşa cum se vede în fig. 3; dacă nu avem un astfel de stativ, ţinem balonul cu mîna. Se toarnă apă rece pe fundul

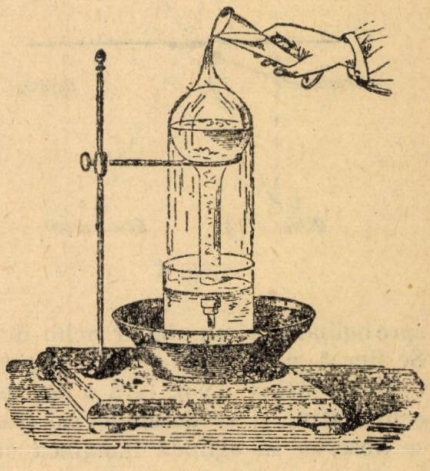


Fig. 3

balonului. Se constată că apa, care începuse să se răcească, începe să fiarbă violent.

Cum se explică acest fenomen?

Ştim că apa fierbe la temperatura de 100° C. numai sub presiunea atmosferică normală. Aceasta înseamnă că forţa elastică a vaporilor egalează presiunea atmosferică. Dacă presiunea este mai mică apa fierbe la o temperatură mai scăzută; forţa elastică a vaporilor trebuind să egaleze presiunea ce se exercită asupra apei, este corespunzătoare unei temperaturi mai scăzute. În balonul închis ermetic nu este aer, deoarece acesta a fost evacuat în timpul fierberii prin antrenarea lui de către vaporii care ieşeau cînd balonul era deschis. În balonul închis nu se află deci, decît vapori care apasă asupra apei şi nu-i permit să fiarbă. Cînd se toarnă apă rece pe fundul balonului, vaporii se condensează, presiunea lor asupra apei scade, iar apa fierbinte începe să fiarbă, deşi temperatura ei este sub 100° C.

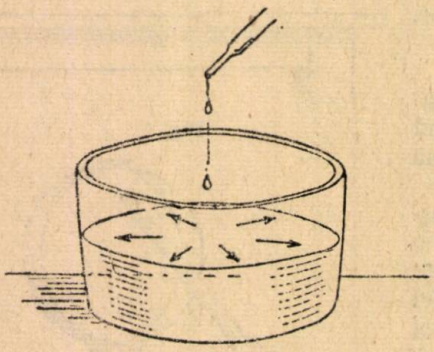


Fig. 4

4. Tensiunea superficială. Se toarnă într-un vas apă iar pe suprafaţa apei din vas se pun bucăţele mici de hîrtie. Se toarnă apoi în mijlocul apei din vas, 2—3 picături de terebentină sau de eter: hîrtiuţele vor fugi în toate părţile şi se vor lipi de pereţii vasului (fig. 4).

Cum se explică acest fenomen?

Tensiunea superficială a terebentinei sau a eterului este considerabil mai mică decît aceea a apei şi de aceea cînd se toarnă cîteva picături din lichidele arătate, în mijlocul vasului, tensiunea superficială în acest loc se micşorează şi hîrtiuţele fug în lături, spre pereţii vasului.

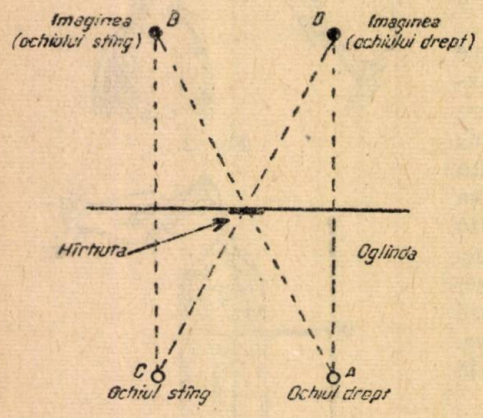


Fig. 5

5. Vederea imaginilor în oglinda plană. Se aşează pe masă o oglindă plană, iar persoana care experimentează aflată în faţa oglinzii, priveşte spre oglindă cu un singur ochi, de ex. cu ochiul stîng — dreptul fiind închis. Se lipeşte pe oglindă o hîrtiuţă astfel încît să nu se vadă în oglindă imaginea ochiului închis. Apoi, fără a deplasa hîrtiuţa şi fără a mişca corpul se închide ochiul stîng şi se deschide cel drept. Se constată şi de data aceasta, că nu se observă în oglindă imaginea ochiului închis.

Cum se explică aceasta?

Pentru a putea înţelege acest fenomen se urmăreşte fig. 5. Cînd este închis ochiul drept, vedeţi cu ochiul stîng (după raza vederii CD), hîrtiuţa care acopere imaginea ochiului drept.

Cînd este închis ochiul stîng vedeţi cu ochiul drept (după raza vederii AB) hîrtiuţa, care acoperă imaginea ochiului stîng.

6. **Osmoză (grădina minerală).** Se face o soluţie concentrată de silicat de sodiu într-un borcan de sticlă. Se aruncă în această soluţie cîteva cristale mici de diferite săruri minerale colorate, de exemplu: sulfat de cupru (albastru), sulfat de nichel (verde), azotat de cobalt (roz) şi altele.

În scurtă vreme, de pe fundul vasului încep să crească din cristale, numeroase ramuri ce se răspîndesc în toate direcţiile avînd în totalitatea lor aspectul unei adevărate grădini cu plante şi flori de diferite culori (fig. 6).

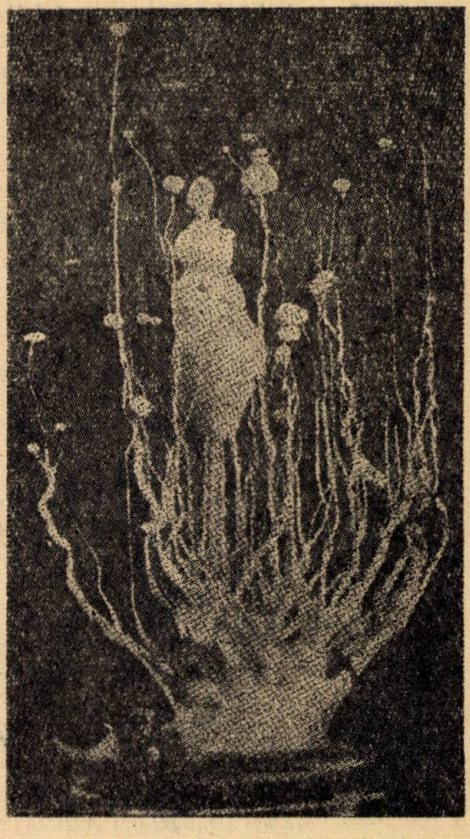


Fig. 6

Cum se explică acest fenomen?

Datorită osmozei, un solvent poate trece printr-o membrană semipermeabilă (membrană care lasă să treacă numai solventul şi opreşte trecerea corpului dizolvat). În cazul experienţei descrise, în jurul cristalelor se formează membrane semipermeabile de silicaţi prin care apa din soluţie intră prin osmoză. Aceste membrane se umflă şi cresc văzînd cu ochii, şi în felul acesta apare aşa numita grădină minerală.

V. A.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1731

O bară mobilă AB, cu lungimea de 16 cm, *poate să alunece de-a lungul dreptei AB pe care este aşezată. La distanţa de* 9 cm *de dreapta AB şi paralel cu ea se află bara fixă DC cu lungimea de* 24 cm.

1. *Fie O punctul de intersecţie al segmentelor AC şi BD care unesc cruciş capetele celor două bare AB şi DC. Se cere să se calculeze depărtările lui pînă la dreptele AB şi DC şi să se deducă locul geometric descris de el atunci cînd bara AB îşi execută alunecarea ei de-a lungul dreptei AB.*

2. *La ce depărtare de dreapta AB trebuie să aşezăm un izvor luminos punctiform, I, pentru ca umbra barei mobile AB pe dreapta DC să coincidă cu bara fixă DC ?*

3. *Fie M, mijlocul barei mobile AB şi N, mijlocul barei fixe DC. Să se arate că dacă izvorul luminos I este aşezat în poziţia de mai înainte, umbrele punctelor M şi O coincid cu punctul N.*

4. *Să se calculeze lungimea umbrei dată de bara mobilă AB pe o paralelă cu această bară dusă prin punctul O, atunci cînd bara AB este luminată de izvorul I de mai sus.*

5. *Să se calculeze care ar fi lungimea umbrei aceleiaşi bare AB pe o paralelă cu această bară dusă însă prin punctul I, dacă de data aceasta izvorul luminos ar fi aşezat în punctul O.*

* * *

Soluţie dată de **Radu Stroe**, Ploeşti. — 1. Triunghiurile asemenea AOB şi DOC ne dau:

$$\frac{KO}{OL} = \frac{AB}{DC} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}, \tag{1}$$

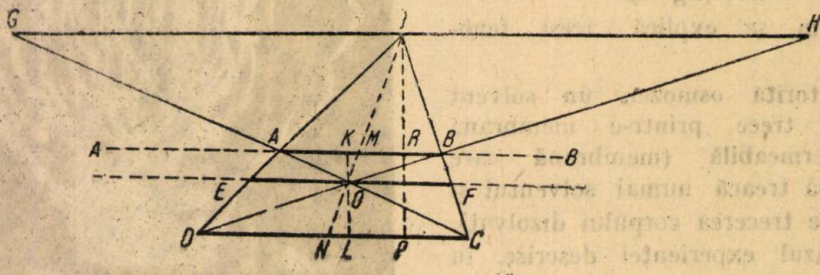
însă:

$$KO + OL = KL = 9;$$

din (1) avem:

$$KO = \frac{2OL}{3}, \text{ deci } \frac{2OL}{3} + OL = 9;$$

$$OL = \frac{27}{5} \text{ cm} = 5{,}4 \text{ cm şi } KO = \frac{2 \times 5{,}4}{3} = 3{,}6 \text{ cm}.$$



Distanţele lui O la dreptele AB şi CD fiind constate, locul lui geometric este o paralelă la cele două baze ale triunghiului $ABCD$.

2. Triunghiurile asemenea IAB şi IDC ne dau:

$$\frac{IR}{AB} = \frac{IP}{DC} \quad \text{sau} \quad \frac{IP - RP}{AB} = \frac{IP}{DC}.$$

Însă $AB = 16$, $CD = 24$ şi $RP = 9$, deci:

$$\frac{IP - 9}{16} = \frac{IP}{24}, \text{ de unde } IP = 27 \text{ cm}$$

şi avem:

$$IR = IP - RP = 27 - 9 = 18 \text{ cm}.$$

3. Trebuie să arătăm că în trapezul $ABCD$ dreapta dusă prin punctul O de intersecţie al diagonalelor şi prin punctul de intersecţie al laturilor neparalele, trece prin mijloacele bazelor, adică avem de demonstrat că:

$$DN = NC \text{ şi } AM = MB \text{ şi } EO = OF.$$

Teorema lui Ceva aplicată în triunghiul IDC ne dă:

$$\frac{IA \cdot DN \cdot BC}{IB \cdot AD \cdot CN} = 1,$$

însă $AB \parallel DC$, deci:

$$\frac{IA}{IB} = \frac{AD}{BC},$$

prin urmare (2) devine:

$$\frac{DN}{CN} = 1 \quad \text{sau} \quad DN = CN.$$

Scriind asemănarea triunghiurilor IAB, IEF și IDC obținem și $AM = MB$ și $EO = OF$, adică ceeace aveam de demonstrat.

4. Din asemănarea triunghiurilor EOD și DBA avem:

$\frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD}$; iar din asemănările triunghiurilor EOA și DAC avem $\frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD}$,

relații care adunate dau:

$$EO\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}\right) = \frac{AE + DE}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1,$$

de unde:

$$\frac{1}{EO} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} = \frac{1}{16} + \frac{1}{24} = \frac{3+2}{48} = \frac{5}{48},$$

$$EO = \frac{48}{5} = 9{,}6 \text{ cm}$$

și

$$EF = 2.EO = 19{,}2 \text{ cm}.$$

5. Din asemănarea triunghiurilor AOB și GOH avem:

$$\frac{AB}{KO} = \frac{GH}{IR + RO}$$

sau ținînd seamă de valorile stabilite anterior:

$$\frac{16}{3{,}6} = \frac{GH}{18 + 3{,}6},$$

de unde

$$GH = \frac{16 \times 21{,}6}{3{,}6} = 96 \text{ cm}.$$

Problema 1740

O butelie conține la 20°C hidrogen la presiunea de 4 atm. În timpul unui incendiu butelia explodează. Să se calculeze temperatura la care a explodat butelia știind că ea putea rezista pînă la presiunea de 12 atm.

Olimpiada Fizică, București 1955

Soluție. — Conform legii lui Charles:

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{sau} \quad p = p_0 \frac{273 + t}{273 + t_0}.$$

În cazul problemei noastre,

$$4 = 12 \cdot \frac{273 + 20}{273 + t_0},$$

de unde:

$$273 + t_0 = 3 \cdot 293,$$

deci

$$t_0 = 879 - 273 = 606°\text{C}.$$

Problema 1745

Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC se ia un punct D, iar triunghiurilor ABD și ACD se circumscriu cercurile O_1 și O_2. Să se demonstreze:

a) *Punctele de intersecție cu cercurile, ale diametrelor duse prin A sînt colineare cu al doilea punct de intersecție al cercurilor.*

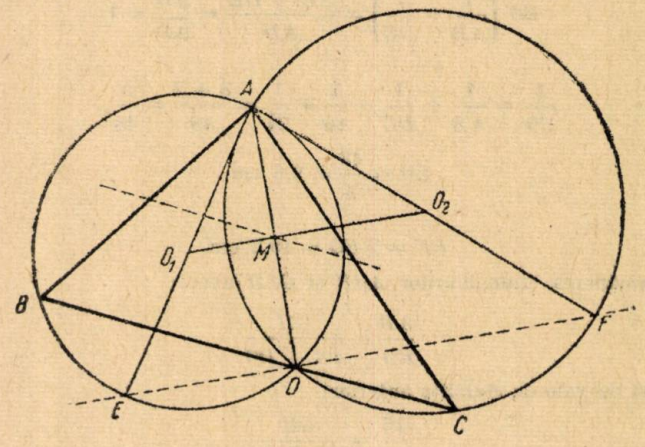
b) *Raportul razelor celor două cercuri e constant.*

c) *Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul AO_1O_2.*

d) *Să se afle locul geometric al proiecției punctului A pe O_1O_2.*

Olimpiada Matematică, Iași, februarie 1955

Soluție. — a) AD este coarda comună a cercurilor O_1 și O_2. Prin urmare $AM = MD$ și deoarece $AO_1 = O_1E$ și $AO_2 = O_2F$, rezultă că punctele E, D, F sînt colineare.



b) Să notăm cu R_1 și R_2 razele cercurilor O_1 și O_2. Vom avea:

$$R_1 = \frac{AD}{2\sin B} \quad \text{și} \quad R_2 = \frac{AD}{2\sin C},$$

deci:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin C}{\sin B} = R_0.$$

c) *Soluția I-a.* — O_1O_2 este linie mijlocie în triunghiul AEF. Deci $\sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle AEF$ și $\sphericalangle AO_2O_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle AFE$.

Însă în patrulaterale inscriptibile ABEB și $ADCF$ avem:

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle B \quad \text{și} \quad \sphericalangle AFE = \sphericalangle C,$$

deci:

$$\sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle B \quad \text{și} \quad \sphericalangle AO_2O_1 = \sphericalangle C,$$

deci triunghiurile O_1O_2A și BCA sînt asemenea.

Soluția II-a. — Avem $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$, deci triunghiurile O_1O_2A și BAC sînt asemenea.

d) Punctul M, care se află la mijlocul lui AD, este proiecția lui A pe O_1O_2. Aflîndu-se la mijlocul lui AD, cînd AD va varia, M va descrie o paralelă la BC, paralelă ce trece prin mijloacele laturilor AB și AC.

Problema 1756

Dacă a și b sînt două numere oarecare ($a > b$) și n un număr întreg și pozitiv, să se arate că avem

$$(n+1)\sqrt[n]{ab} \leqslant \frac{a\sqrt[n]{a} - b\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}.$$

Savin V. Ionescu, student, București

Soluție. Considerăm următoarea progresie geometrică cu $n+1$ termeni:

$$\therefore b,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a.$$

Produsul termenilor acestei progresii este:

$$P = b \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{n-1} \cdot a = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^{n+1}. \tag{1}$$

Suma termenilor aceleiași progresii este:

$$S = \frac{aq - b}{q - 1}\ ;\ \text{însă:}\ a = bq^n,\ \text{de unde:}\ q = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Suma S devine:

$$S = \frac{a\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - b}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - 1} = \frac{a\sqrt[n]{a} - b\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}. \tag{2}$$

Considerăm acum inegalitatea cunoscută:

$$\sqrt[n+1]{x \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x + x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n+1}$$

în care facem: $x = b$; $x_1 = a_1$; $x_2 = a_2$; ... ; $x_{n-1} = a_{n-1}$; $x_n = a$.

Avem:

$$\sqrt[n+1]{b \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n \cdot a} \leqslant \frac{b + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a}{n+1}.$$

Ținînd seama de (1) și (2) avem:

$$\sqrt[n+1]{\left(\sqrt[n]{ab}\right)^{n+1}} \leqslant \frac{a\sqrt[n]{a} - b\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} : (n+1),$$

de unde

$$(n+1)\sqrt[n]{ab} \leqslant \frac{a\sqrt[n]{a} - b\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}.$$

Problema 1757

Se consideră un tetraedru $ABCD$ și un punct I pe sfera circumscrisă lui. Dacă dreptele IA, IB, IC, ID înțeapă un plan oarecare în patru puncte A_1, B_1, C_1, D_1 conciclice, atunci dreptele IA, IB, IC, ID înțeapă orice alt plan tot în patru puncte conciclice.

I. I. Cristea, student, București

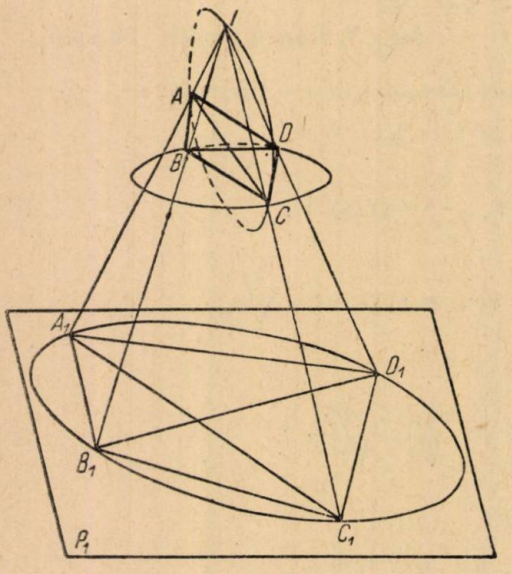
Soluție. Vom proceda prin inversiune. Luăm ca pol pe I, iar puterea de inversiune în așa fel ca planul P_1 al punctelor A_1 B_1 C_1 D_1 să se transforme în sfera circumscrisă tetraedrului $ABCD$. Aceasta are loc pentru

$$K_1 = IA \cdot IA_1 = IB \cdot IB_1 = IC \cdot IC_1 = ID \cdot ID_1. \tag{1}$$

Luînd, de exemplu, $IA \cdot IA_1 = IB \cdot IB_1$, avem:

$$\frac{IA}{IB_1} = \frac{IB}{IA_1}$$

și rezultă că triunghiul IAB este asemenea cu triunghiul IA_1B_1, căci mai au și unghiul din I comun. Deci:



$$\frac{IA}{IB_1} = \frac{IB}{IA_1} = \frac{AB}{A_1B_1},$$

de unde:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{IA \cdot IB}{K_1},$$

Deci:

$$A_1B_1 = \frac{k_1 \cdot AB}{IA \cdot IB}, \qquad (2)$$

Analog avem:

$$B_1C_1 = \frac{k_1 \cdot BC}{IB \cdot IC};$$

$$C_1A_1 = \frac{k_1 \cdot CA}{IC \cdot IA}, \qquad (3)$$

$$A_1D_1 = \frac{k_1 \cdot AD}{IA \cdot ID}; \quad B_1D_1 = \frac{k_1 \cdot BD}{IB \cdot ID}$$

și

$$C_1D_1 = \frac{k_1 \cdot CD}{IC \cdot ID}. \qquad (4)$$

Punctele A_1, B_1, C_1, D_1 fiind conciclice în virtutea teoremei lui Ptolomeu, avem:

$$A_1B_1 \cdot C_1D_1 + A_1D_1 \cdot B_1C_1 = A_1C_1 \cdot B_1D_1. \qquad (5)$$

Ținînd seamă de (2), (3), (4) această relație (5) devine:

$$\frac{k_1 \cdot AB}{IA \cdot IB} \cdot \frac{k_1 \cdot CD}{IC \cdot ID} + \frac{k_1 \cdot AD}{IA \cdot ID} \cdot \frac{k_1 \cdot BC}{IB \cdot IC} = \frac{k_1 \cdot AC}{IA \cdot IC} \cdot \frac{k_1 \cdot BD}{IB \cdot ID},$$

de unde rezultă condiția:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD, \qquad (6)$$

datorită căreia punctele A, B, C, D sînt conciclice.

Fie acum A_2, B_2, C_2 punctele în care dreptele IA, IB, IC, ID înțeapă un alt plan oarecare P_2. Vom avea:

$$AB = \frac{IA \cdot IB \cdot A_2B_2}{k_2}; \quad AC = \frac{IA \cdot IC \cdot A_2C_2}{k_2}; \quad AD = \frac{IA \cdot ID \cdot A_2D_2}{k_2};$$

$$BC = \frac{IB \cdot IC \cdot B_2C_2}{k_2}; \quad CD = \frac{IC \cdot ID \cdot C_2D_2}{k_2}; \quad DB = \frac{ID \cdot IB \cdot D_2B_2}{k_2},$$

unde: $k_2 = IA \cdot IA_2 = IB \cdot IB_2 = IC \cdot IC_2 = ID \cdot ID_2$ este puterea de inversiune a polului I pentru care sfera $ABCD$ se transformă în planul P. Relația de condiție (2) dă:

$$A_2B_2 \cdot C_2D_2 + A_2D_2 \cdot C_2B_2 = A_2C_2 \cdot B_2D_2$$

care arată că punctele A_2, B_2, C_2, D_2 sînt pe același cerc.

Analog pentru orice alte plane P_3, P_4, ... înțepate de dreptele IA, IB, IC, ID în cîte 4 puncte, aceste puncte sînt conciclice.

Proprietatea dreptelor IA, IB, IC, ID de a înțepa orice plan în puncte conciclice (cu alte cuvinte, dacă există relația (6)) este valabilă pentru orice poziție a lui I pe sfera circumscrisă tetraedrului $ABCD$.

Problema 1758

Să se construiască un cerc (O) *astfel ca din intersecția lui cu laturile unui triunghi echilateral dat, să se obțină trei coarde egale cu* l_3, l_4, l_6.

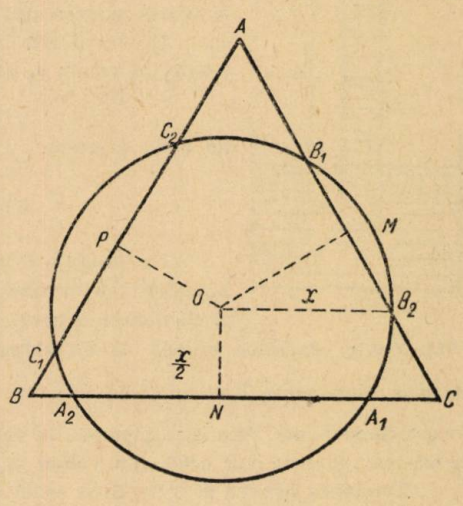
Gh. Bazacov, Turnu Severin

Soluție. Să presupunem problema rezolvată. Notăm cu ABC triunghiul dat, O centrul cercului cerut, cu x raza acestui cerc. Intersecțiile lui cu latura AC le notăm cu B_1 și B_2, intersecțiile cu BC le notăm cu A_1, A_2, iar cele cu latura AB le notăm cu C_1, C_2. Presupunem atunci, că cele 3 coarde sînt:

$B_1B_2 = l_6$; $A_1A_2 = l_3$ și $C_1C_2 = l_4$.

Distanțele centrului O la aceste coarde vor fi:

$$OM = \frac{x\sqrt{3}}{2}; \quad ON = \frac{x}{2} \quad \text{și} \quad OP = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$



Raza x se calculează folosindu-ne de teorema că suma distanțelor unui punct la cele trei laturi ale unui triunghi echilateral este constantă și egală cu înălțimea triunghiului. Deci:

$$OM + ON + OP = k\frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{unde } a$$

este latura triunghiului sau:

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

de unde se obține:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}\, a.$$

Raționalizînd numitorul vom avea:

$$x = \frac{a\sqrt{6}}{4}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}), \tag{1}$$

deci raza cercului cerut se poate construi grafic cu relația (1).

Dacă analizăm figura, se poate deduce ușor poziția centrului acestui cerc. Într-adevăr, $\sphericalangle OB_2B_1 = 60°$, fiindcă triunghiului OB_1B_2 este echilateral, atunci $\sphericalangle OB_2B_1 = \sphericalangle C$ și ele avînd poziția de unghiuri corespondente, rezultă că $OB_2 \parallel BC$, iar distanța de la O la B este $\frac{x}{2}$.

Deci construcția centrului se face astfel: se duce o paralelă la BC la distanța $\frac{x}{2}$; dintr-un punct de intersecție al acestei paralele cu latura AC sau AB se ia o distanță $B_2O = x$. Desigur că pot fi mai multe cercuri, însă cu aceeași rază x, care corespund problemei; ceea ce diferă este numai poziția centrului care se poate construi după același procedeu.

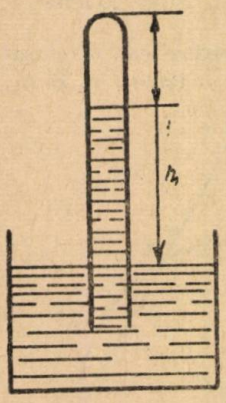
Problema 1764

Un eudiometru cu mercur de secțiune uniformă pe toată lungimea sa este plasat într-o cuvă cu mercur. Eudiometrul conține gaz amoniac pe o lungime de 10 cm. Mercurul se ridică în tub cu 25 cm deasupra suprafeței libere a mercurului din cuvetă. Se trec prin eudiometru o serie de scîntei electrice pînă ce amoniacul este descompus complet. Să se calculeze lungimea

x ocupată de gazele provenite din descompunerea amoniacului, dacă presiunea atmosferică la care s-a lucrat este de 75 cm Hg, *iar nivelul mercurului din cuvă se presupune invariabil.*

C. Necşoiu, inginer Bucureşti

Soluţie. Dacă notăm cu H presiunea atmosferică, cu h înălţimea mercurului din tub şi cu l_1 lungimea ocupată de gaz în tubul de secţiune s, presiunea p_1 a amoniacului din camera barometrică este dată de relaţia



$$p_1 = H - h_1 = 75 - 25 = 50 \text{ cm Hg}.$$

Volumul amoniacului din camera barometrică: $v_1 = l_1\, s = 10\, s$.

Dacă s-ar afla la presiunea normală $p_2 = 76$ cm amoniacul ar ocupa un volum v_2 dat de legea lui Boyle-Mariotte:

$$p_2 v_2 = p_1 v_1;$$

de unde scoatem:

$$v_2 = \frac{p_1 v_1}{p_2} = \frac{50 \cdot 10\, s}{76} = \frac{500\, s}{76}.$$

La presiunea normală şi temperatura 0° două volume de amoniac dau naştere prin descompunere la 3 volume de hidrogen şi un volum de azot, adică în total dau naştere la 4 volume de gaze componente, de unde rezultă că un volum de amoniac va da naştere la două volume de gaze componente. Volumul v_2 de amoniac va produce un volum $v_3 = 2\, v_2 = \frac{1000\, s}{76}$ cm^3 de gaz componente. Prin descompunere în tubul închis, la altă presiune decît cea normală, gazele componente vor ocupa un volum $v_4 = s.x$ sub presiunea p_4.

Lungimea ocpată de gaze fiind egală cu x, mercurul se va ridica la înălţimea:

$$h_2 = h_1 + l_1 - x = 25 + 10 - x = 35 - x,$$

iar presiunea gazelor componente va fi egală cu:

$$p_4 = H - h_2 = 75 - (35 - x) = 40 + x.$$

Ţinînd seamă de legea conservării energiei avem:

$$p_4 v_4 = p_3 v_3.$$

Înlocuind în această formulă datele găsite mai sus şi ţinînd seamă că $p_3 = p_2 = 76$ cm, obţinem:

$$(40 + x) \cdot sx = 76 \cdot \frac{1000\, s}{76}$$

sau:

$$(40 + x)\, x = 1000,$$

de unde obţinem ecuaţia de gradul al doilea:

$$x^2 + 40x - 1000 = 0,$$

care rezolvată, ne dă $x = 17{,}4$ cm.

Problema 1765

Dacă $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sînt unghiurile sub care se văd diagonalele mari ale unui poligon regulat cu $2n$ laturi, dintr-un punct al cercului său înscris, atunci suma

$$tg^2 x_1 + tg^2 x_2 + \text{tg}^2 x_3 + \ldots + \text{tg}^2 x_n$$

este constantă. (Enunţ generalizat).

* * *

Soluţie. În adevăr, fie $A_1A_2A_3 \ldots A_{n+1}\, A_{n+2} \ldots A_{2n}$ un poligon regulat cu $2n$ laturi circumscris cercului O de rază r, iar $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ proiecţiile unui punct M de pe acest cerc pe diagonalele $A_1\, A_{n+1}$, $A_2\, A_{n+2}$, $A_3\, A_{n+3}, \ldots, A_n\, A_{2n}$ ale poligonului considerat.

1. Imediat se observă că proiecțiile M_1, M_2, M_3, ..., M_n pe A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, A_3A_{n+3}, ... A_nA_{2n} sînt situate pe cercul de diametru OM. Ori cum:

$$\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \ldots = \sphericalangle A_{n+1}OA_{n+2} = \ldots = \sphericalangle A_{2n}OA_1 = \frac{360^\circ}{2n},$$

ceea ce este tot una cu:

$$\sphericalangle M_1OM_2 = \sphericalangle M_2OM_3 = \ldots = \sphericalangle M_{i-1}OM_i = \sphericalangle M_{i+1}OM_{i+2} = \ldots =$$
$$= \sphericalangle M_nOM_1 = \frac{180^\circ}{n},$$

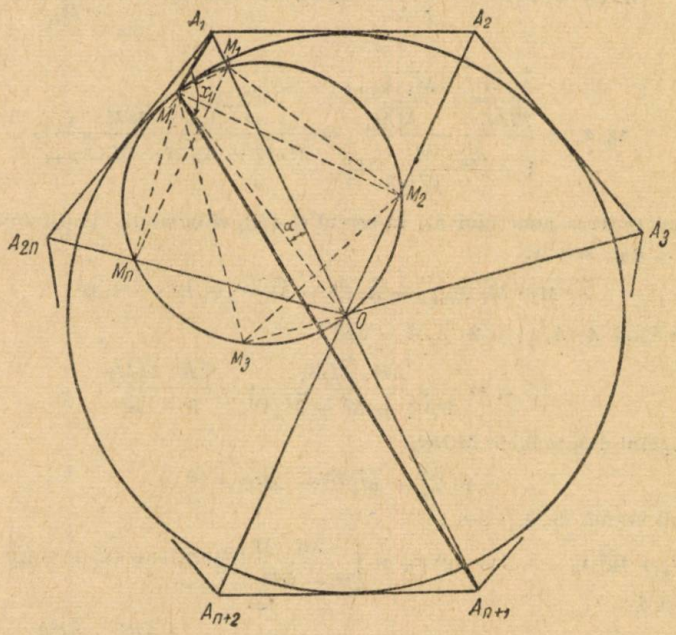
iar

$$\sphericalangle M_iOM_{i+1} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

urmează că:

$$\text{arc } M_1M_2 = \text{arc } M_2M_3 = \ldots = \text{arc } M_nM_1 = 2 \cdot \frac{180^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

și în consecință M_1, M_2, M_3, ... M_n sînt vîrfurile unui poligon cu n laturi înscris în cercul de diametru OM.



2. Cum din triunghiurile dreptunghice MOM_1, MOM_2, MOM_3, ..., MOM_n avem, notînd $\sphericalangle MOM_1 = \alpha$,

$$\overline{MM_1} = r \sin \alpha, \qquad \text{de unde} \quad \overline{MM_1}^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\alpha,$$

$$\overline{MM_2} = r \sin\left(\alpha + \frac{180^\circ}{n}\right), \qquad \overline{MM_2}^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos\left(2\alpha + \frac{360^\circ}{n}\right),$$

$$\overline{MM_3} = r \sin\left(\alpha + \frac{360^\circ}{n}\right), \qquad \overline{MM_3}^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos\left(2\alpha + \frac{720^\circ}{n}\right),$$

.....

$$\overline{MM_n} = r \sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\,180^\circ}{n}\right), \qquad \overline{MM_n}^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos\left(2\alpha + \frac{(n-1)\,360^\circ}{n}\right),$$

încît:

$$MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + \ldots + MM_n^2 = n \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(2\alpha + \frac{(i-1)\,360^\circ}{n}\right)$$

şi ţinînd seamă că:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\left(2\alpha + \frac{(i-1)\,360^\circ}{n}\right) = \cos 2\alpha + \cos\left(2\alpha + \frac{360^\circ}{n}\right) + \cos\left(2\alpha + \frac{720^\circ}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \cos\left(2\alpha + \frac{(n-1)\,360^\circ}{n}\right) = 0,$$

urmează că:

$$MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + \ldots + MM_n^2 = \frac{nr^2}{2}.$$

3. Întrucît:

$$x_i = \sphericalangle A_i MA_{n+i} = \sphericalangle A_i MM_i + \sphericalangle M_i MA_{n+i};\ (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

iar:

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle A_i MM_i) = \frac{A_i M_i}{MM_i};\ \operatorname{tg}(\sphericalangle M_i MA_{n+i}) = \frac{\overline{M_i A_{n+i}}}{\overline{MM_i}}$$

avem:

$$\operatorname{tg} x_i = \frac{\dfrac{\overline{A_i M_i}}{\overline{MM_i}} + \dfrac{\overline{M_i A_{n+i}}}{\overline{MM_i}}}{1 - \dfrac{\overline{A_i \cdot M_i A_{n+i}}}{\overline{MM_i^2}}} = \frac{\overline{A_i A_{n+i}} \cdot \overline{MM_i}}{\overline{MM_i^2} - \overline{A_i M_i} \cdot \overline{M_i A_{n+i}}},$$

însă exprimînd puterea punctului M_i în cercul O (R), circumscris poligonului $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n+1} A_{n+2} \ldots A_{2n}$, avem:

$$\overline{A_i M_i} \cdot \overline{M_i A_{n+i}} = \overline{A_i O}^2 - \overline{M_i O}^2 = R^2 - \overline{M_i O}^2$$

şi deci introducînd $A_i A_{n+i} = 2 \cdot \overline{A_i O} = 2R$,

$$\operatorname{tg} x_i = \frac{2R \cdot \overline{MM_i}}{\overline{MM_i^2} - R^2 + \overline{M_i O}^2} = \frac{2R \cdot \overline{MM_i}}{r^2 - R^2},$$

căci din triunghiul dreptunghic MOM_i:

$$\overline{MM_i^2} + \overline{M_i O}^2 = \overline{MO}^2 = r^2.$$

4. Ţinînd seamă de 3, avem:

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \operatorname{tg}^2 x_3 + \ldots + \operatorname{tg}^2 x_n = \left(\frac{2R}{r^2 - R^2}\right)^2 \left(MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + \ldots + MM_n^2\right)$$

sau folosind şi 2,

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \operatorname{tg}^2 x_3 + \ldots + \operatorname{tg}^2 x_n = \frac{4R^2}{(r^2 - R^2)^2} \cdot \frac{r^2 n}{2},$$

relaţie care arată că suma propusă este constantă. Pentru ca în membrul II al ultimei relaţii să nu aevm decît funcţii de n, observînd că :

$$r = R \cos\frac{180^\circ}{2n} = R \cos\frac{90^\circ}{n},$$

această relaţie devine:

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \operatorname{tg}^2 x_3 + \ldots + \operatorname{tg}^2 x_n = 2n \cdot \frac{\cos^2 \dfrac{90^\circ}{n}}{\sin^2 \dfrac{90^\circ}{n}} = 2n \cdot \left(\frac{\cos \dfrac{90^\circ}{n}}{\sin^2 \dfrac{90^\circ}{n}}\right)^2$$

5. În particular, dacă avem un pătrat ($n=2$), avem problema 1184 rezolvată în G.M.F. seria B, an V (1954), nr. 11, pag. 444:

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 = 8.$$

Dacă avem un exagon regulat ($n = 3$), se găseşte problema 1765 propusă în G.M.F. seria B, an VI (1955), nr. 7, pag. 329:

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \operatorname{tg}^2 x_1 = 72.$$

Apoi pentru octogonul regulat ($n = 4$), decagonul regulat ($n = 5$), dodecagonul regulat ($n = 6$); etc... vom avea relaţii analoage.

Observare. Problema 1184 este aceiaşi cu problema nr. 645, pagina 419, din Exerciţii de trigonometrie de F.G.M. Paris.

Soluţii şi generalizări s-au mai primit de la: **I. I. Cristea** şi **Mircea Bocu** studenţi Bucureşti.

CHESTIUNI DE EXAMEN

OLIMPIADA MATEMATICĂ 1956. ETAPA III REGIONALĂ

Subiectele date la lucrarea scrisă din 1 aprilie 1956, pe clase: toate chestiunile obligatorii; timp de lucru 3 ore după dictarea enunţurilor.

Clasa VIII-a

2162. Se dă trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $AB=41$ cm, baza mică $CD=15$ cm şi înălţimea $h = 2\sqrt{30}$ cm.

O perpendiculară pe baze taie pe AB şi CD respectiv în M şi N, iar semicercurile descrise (în exterior) care au ca diametre AB şi CD sînt tăiate respectiv în P şi Q

Să se determine poziţia acestei perpendiculare astfel ca înălţimea trapezului să fie media geometrică a segmentelor MP şi NQ.

2163. Se dă un triunghi oarecare ABC, apoi se prelungeşte latura BC în ambele sensuri cu segmentele $BB' = AB$ şi $CC' = AC$. Notînd laturile $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$ să se demonstreze că:

$$b \cdot \overline{AB'}^2 + c \cdot \overline{AC'}^2 = 2bc\,(a + b + c),$$

$$\overline{AB'}^2 = \frac{c}{a}(a + b + c)(a - b + c),$$

$$\overline{AC'}^2 = \frac{b}{a}(a + b + c)(a + b - c).$$

Clasa IX-a

2164. Să se simplifice expresia:

$$x^{\frac{\log(\log x)}{\log x}}$$

toţi logaritmii fiind luaţi toţi într-o aceeaşi bază B.

2165. Fie un paralelogram $ABCD$, M şi N mijloacele laturilor AB şi CD. Se duc prin M şi N paralele la diagonala BD; aceste paralele taie dreptele AN şi CM în P şi Q. Aria paralelogramului $ABCD$ fiind 12 unităţi patrate, să se spună care este valoarea paralelogramului $MPNQ$.

2166. Să se arate că dacă

$$\frac{\cos x}{A} = \frac{\cos 3x}{B} = \frac{\cos 5x}{C},$$

atunci $A(A - B + C) = B^2$ şi să se deducă de aici o relaţie între mărimile L, M, N, din proporţiile:

$$\frac{\sin x}{L} = \frac{\sin 3x}{M} = \frac{\sin 5x}{N}.$$

2167. Se dă un unghi drept XOY şi un semicerc OA cu centrul pe OX. Se duce prin A o dreaptă care taie semicercul în B şi pe OY în D.

a) Să se determine segmentul OD în aşa fel încît segmentul BD să fie egal cu diametrul semicercului.

b) Notînd cu a unghiul OAD să se arate că dacă BD este egal cu diametrul semicercului, avem $\sin a = \operatorname{ctg} a$ şi $\sin^3 a + 2 \operatorname{ctg} 2a = 0$.

Clasa X-a şi şcoli tehnice

2168. Se consideră două axe rectangulare ox, oy şi în planul lor punctul A (8,2). Fie M un punct pe oy. Prin punctul M se duce dreapta MA care taie axa ox în N. Tot prin M se duce o dreaptă care face 45° cu direcţia pozitivă a axei ox şi care taie axa OX în punctul P. Se notează $OM = y$ şi $ON = x$. Se cere:

a) Să se exprime relaţia ce există între x şi y.

b) Să se exprime mărimea segmentului PN în funcţie de y şi apoi în funcţie de x.

c) Să se afle pe care segment de pe axa oy poate varia punctul M astfel ca să avem $-7 < PN < 2$ şi să se deseneze cazurile limită cînd $PN = 2$ şi $PN = -7$. Segmentul PN este considerat negativ dacă punctul N se află de la P spre sensul negativ al axelor.

d) Să se afle poziţia lui M pentru care segmentul PN devine zero şi pentru care devine infinit.

2169. Se consideră un semicerc cu diametrul $AB = 12$ cm, iar pe acest diametru un punct C situat la distanţa $AC = 2$ cm de punctul A.

a) Să se determine poziţia punctului D pe semicerc astfel ca atunci cînd semicercul se roteşte în jurul diametrului AB, volumul născut de aria $CBDC$ să fie $\frac{3}{5}$ din volumul născut de aria $ACDA$.

b) Să se calculeze aria triunghiului COD unde O este mijlocul diametrului AB, iar D este punctul obţinut la a).

2170. *a)* Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2.$$

b) Să se scrie valorile lui x cuprinse între 0° şi 720°.

Anul I şcoli tehnice de maiştri

2171. Se dă ecuaţia:

$$kx^2 - 2(k + 1)x - 2k + 3 = 0$$

în care k este un parametru oarecare şi se cere:

a) Să se arate că rădăcinile acestei ecuaţii sînt reale oricare ar fi valorile lui k.

b) Să se determine k în aşa fel ca rădăcinile acestei ecuaţii să fie una inversă celeilalte.

c) Să se determine k astfel ca între rădăcinile x_1 şi x_2 ale acestei ecuaţii să avem relaţia:

$$2x_1 - x_2 = 8.$$

d) Să se reprezinte grafic funcţia

$$y = -x^2 + 4x - 1.$$

2272. Un triunghi dreptunghic ABC cu catetele $AB = 18$ cm și $AC = 24$ cm, se rotește în jurul perpendicularei în B pe ipotenuză. Să se afle:

a) Volumul și aria corpului de rotație.

b) Se prelungește cateta AC pînă taie axa de rotație în 0. Se cere mărimea segmentului OB.

Anul I școli profesionale

2173. Doi ajustori au executat împreună 270 pene de fixare. După un anumit timp de la începerea lucrului, primul executase $\frac{3}{5}$ din partea sa, al doilea $\frac{3}{7}$ din partea sa. Știind că primului îi mai rămăsese de executat un număr de pene de două ori mai mare decît îi mai rămăsese celui de-l doilea, să se afle cîte pene a executat fiecare.

2174. Deschiderea cheii pentru o piuliță exagonală este egală cu dublul apotemei. Să se afle diametrul barei rotunde din care se pot obține prin prelucrare, piulițe exagonale cu deschiderea cheii de 24 mm.

2175. Să dă funcția $y = \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$.

a) Să se afle adevărata valoare a lui y pentru $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ și $x = 2$.

b) Pentru care valori ale lui x avem valoarea lui y egală cu 2. Verificare.

Anul II și III școli profesionale

2176. Rama metalică a unei ferestre dreptunghiulare este confecționată din 3,64 m oțel cornier cu aripa de 3 cm. Știind că lumina ferestrei are suprafața de 0,72 m², să se afle dimensiunile ramei.

b) S-ar putea confecționa din aceeași lungime de oțel cornier o ramă care să aibă lumina de 0,80 m²?

2177. Se dă funcția $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 7 + 4\sqrt{3}}$.

a) Să se calculeze valorile pentru care y se anulează și valorile pentru care y devine infinit.

b) Să se calculeze adevărata valoare a lui y pentru $x = 2 - \sqrt{3}$.

2178. Care este volumul unei piese în greutate de 5 kg făcută dintr-un aliaj obținut prin topirea a 120 kg cupru, 70 kg cositor, 1,5 kg zinc și 1,2 kg plumb, știind că densitățile acestor metale sînt: pentru cupru 8,9; pentru cositor 7,3; pentru zinc 6,9; pentru plumb 11,3.

Anul I școli pedagogice

2179. Drumul parcurs în lunecarea unui corp pe un plan înclinat este proporțional cu patratul timpului necesar lunecării. Un corp lunecă în 8 secunde, 120 metri. Să se afle ce drum a parcurs corpul în lunecarea sa pe plan în primele 5 secunde.

2180. Într-un cerc este înscris un triunghi ABC. Se dă $AB = 7$ m, $BC = 10$ m, $CA = 9$ m. Fie H punctul de intersecție al înălțimilor. Înălțimea AA_1 taie cercul în A_2. Să se calculeze segmentele AH, HA_1 și A_1A_2.

2181. Două numere se scriu într-o bază necunoscută, respectiv 603 și 405; iar în sistemul de numerație cu baza 8 produsul acestor două numere se scrie 164461. Să se afle baza necunoscută.

Anul II școli pedagogice

2182. Un biciclist are de parcurs 81 km. El face pe drum orizontal 25 km pe oră, la urcușuri face 15 km pe oră, iar la coborîșuri face 30 km pe oră. Lungimea coborîșurilor este 0,7 din aceea a urcușurilor. Dacă la întors a făcut cu 24 minute mai puțin decît la dus, să se calculeze distanțele parcurse pe drumuri orizontale, la urcușuri și la coborîșuri.

2183. Într-un cerc cu raza de 6 dm se ia o coardă AB de mărime 1 dm. Să se calculeze lungimea coardei care subîntinde un arc de patru ori mai mare decît arcul subîntins de coarda AB.

2184. Într-o progresie aritmetică de patru termeni produsul celui de-al doilea termen cu al patrulea este 180, iar produsul dintre primul termen cu al treilea este 84. Să se afle termenii progresiei.

Anii III şi IV şcoli pedagogice

2185. Într-un anumit timp s-a arat o suprafaţă de 181,16 ha cu pluguri şi cu tractoare. Timpul întrebuinţat pentru aratul cu tractoare era cu 3 zile mai mare decît timpul folosit pentru aratul cu pluguri. Dacă s-ar ara cu tractoare atîta timp cît s-a arat cu plugurile, şi s-ar ara cu plugurile atîta timp cît s-a arat cu tractoarele, atunci s-ar fi arat numai 124,46 ha.

Cîte zile s-a arat cu plugurile şi cîte zile s-a arat cu tractoarele, dacă productivitatea tractoarelor este de 6,4 ori mai mare decît productivitatea plugurilor.

2186. Înălţimea unui trunchi de con este de 15 dm, generatoarea este $\sqrt{229}$ dm; iar capacitatea este de 380π litri. Să se afle razele trunchiului de con.

2187. Să se demonstreze că nu există nici un număr întreg care împărţit cu 12 să dea restul 7 şi împărţit cu 15 să dea rest 8.

2188. Scrieţi definiţia dată paralelogramului, apoi arătaţi şi alte definiţii ce se mai pot da paralelogramului, folosind proprietăţile ce le cunoaşteţi într-un paralelogram.

PROBLEME PROPUSE

2189. Planele duse prin fiecare muchie a unui cub, perpendiculare respectiv pe planele definite de acea muchie şi centrul cubului, închid un dodecaedru regulat; de asemenea şi planele duse prin fiecare muchie a unui octaedru regulat; perpendiculare respectiv pe planele definite de acea muchie şi centrul octaedrului, închid un alt dodecaedru regulat. Dacă lungimea muchiei dodecaedrului este m, să se exprime lungimea muchiei cubului şi a muchiei octaedrului.

C- Ionescu-Ţiu

2190. Să se arate că între unghiurile unui triunghi oarecare există relaţia:

$$\begin{aligned}&\sin(A+2B)+\sin(B+2A)+\sin(C+2A)+\\&+2\sin(A-B)+2\sin(B-C)+2\sin(A-C)=\\&=\sin(A+2C)+\sin(B+2C)+\sin(C+2B)\end{aligned}$$

Gh. Călugăriţa

2191. Care este poligonul convex în care numărul laturilor este egal cu numărul diagonalelor? Cîte laturi are poligonul convex la care se pot duce 4850 diagonale?

I. Frisch

2192. Într-un angrenaj conic roata motoare face 100 ture pe minut, iar roata condusă 180 ture pe minut. Unghiul format de axa roţii motoare cu generatoarea comună este de 2 ori mai mare decît unghiul format de axa roţii conduse cu generatoarea:

a) Să se afle aceste unghiuri; *b)* care este numărul dinţilor roţii conduse dacă roata motoare are 36 dinţi; *c)* să se afle diametrele primitive mari ale celor două roţi dacă pasul circular este de 5π mili metri.

N. Bărbuică, elev, Craiova

2193. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=\frac{3}{x}$$

dacă $a+b+c=0$.

N. Mihăileanu

2194. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\sin 2x+\sin 2y=\sqrt{3},$$
$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{4}{3},$$

știind că x și y sînt în cadranul întîi.

Simon St. Petre

2195. Se dă egalitatea: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=N$ în care N este un număr întreg, iar a, b, c, de asemenea numere întregi diferite, mai mari ca unu. Să se determine numeric N, a, b, c.

Lucian Mănescu, R. Vîlcea

2196. O coardă sonoră de platină cu lungimea de 0,36 m și diametrul secțiunii de 1 mm, este întinsă pentru a vibra cu o perioadă de 0,18 s.

a) Care este forța cu care este întinsă coarda știind că densitatea platinei este 21,5.

b) Să se afle lungimea unui tub sonor deschis în cazul cînd acesta ar emite un sunet fundamental de o frecvență egală cu aceea a coardei.

c) Care este frecvența unui sunet format dintr-un tub sonor închis, de aceleași dimensiuni cu cel deschis, în care undele sonore formează patru noduri.

d) Să se afle lungimea și perioada de vibrație a unei bare fixate numai la un capăt care dă armonice superioare cu un număr de vibrații de 9 ori mai mare decît sunetul fundamental scos de tubul sonor deschis.

Valeriu Hulubei, elev, Craiova

2197. Trei condensatoare cu capacitățile $C_1=3\mu$ F, $C_2=8\mu$ F și $C_3=6\mu$ F sînt legate în paralel. Bateriei astfel formate i se aplică o tensiune $U=3000$ V. Să se calculeze capacitatea echivalentă a sistemului, tensiunea la bornele fiecărui condensator, sarcina totală și sarcina fiecărui condensator.

* * *

2198. Într-un triunghi ABC se cunosc unghiurile $\sphericalangle A=65°$, $\sphericalangle B=35°$. Să se calculeze unghiurile triunghiului cu vîrfurile în picioarele bisectoarelor triunghiului ABC.

A. Șaichin

2199. În cercul O se înscrie triunghiul ABC în care AB este latura exagonului regulat înscris în O, iar BC latura patratului înscris în același cerc. Înălțimea BD a acestui triunghi întîlnește cercul O în E și diametrul CG în F. Să se arate că:

1°. CE este latura triunghiului echilateral înscris în O și este paralelă cu AB.

2°. AG este latura dodecagonului înscris în O.

3°. BE este dublul apotemei dodecagonului precedent.

4°. BF este semi-suma dintre latura patratului și latura dodecagonului.

Gh. Buicliu

2200. Să se arate că:

$$\frac{\operatorname{tg}(a-b)+\operatorname{ctg}(a+b)}{\operatorname{tg}(a-b)\cdot\operatorname{ctg}(a+b)}-\frac{\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{ctg}(a-b)}{\operatorname{tg}(a+b).\operatorname{ctg}(a-b)}=$$
$$=\frac{\sin 4a+2\sin 2(a-b)+\sin 4b}{\sin^2 2a-\sin^2 2b}$$

Emanoil Alexandru, elev, Bucureşti

2201. Într-un vas închis şi izolat termic în care se află doi atomi gram de heliu la temperatura de 500°C se introduc 8 g de ghiaţă la temperatura de 0°C. Să se determine temperatura amestecului.

D. Grosu, Iaşi

2202. Să se determine variaţia de temperatură pe care o suferă picăturile mici de mercur de rază $r = 5 \cdot 10^{-3}$ mm cînd se unesc într-o picătură mare cu raza $R = 5$ mm.

D. Grosu, Iaşi

2203. Într-un triunghi oarecare ABC luăm un punct oarecare M pe latura BC. Bisectoarea unghiului AMC taie latura AC în R, iar bisectoarea unghiului AMB taie latura AB în S. Să se arate că dreptele AM, MR, MS sînt concurente.

L. Rusnac, student, Timişoara

2204. Înălţimea unei piramide patrulatere regulate este egală cu h, iar distanţa de la un vîrf al bazei la una din feţele laterale este d. Să se afle volumul piramidei şi să se afle ce relaţie trebuie să existe între d şi h pentru ca problema să fie posibilă.

Corneliu Georgescu

2205. O soluţie apoasă de 5% alcool etilic are punctul de congelare -2°,01. Ştiind că analiza procentuală a alcoolului etilic este 52,18% C; 13,04% H şi 34,78% O, se cere să se deducă formula moleculară a alcoolului etilic.

C. Neceşoiu, Bucureşti

2206. Într-un triunghi oarecare ABC, fie H punctul de întîlnire al înălţimilor. Notăm $AH = x$, $BH = y$, $CH = z$. Să se stabilească relaţiile:

$$\frac{x(cy-bz)}{by-cz}=\frac{y(cx-az)}{ax-cz}=\frac{z(bx-ay)}{ax-by}.$$

Radu Duduica, elev, Bucureşti

2207. Două sarcini punctiforme $Q_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ C şi $Q_2 = 3 \cdot 10^{-6}$ C cu distanţa $r = 15$ cm între ele sînt aşezate în ulei cu permitivitatea relativă $\varepsilon = 2{,}2$. Să se calculeze mărimea forţei cu care se resping cele două sarcini. Calculul se va face în sistemul MKS, CGSem şi CGSes.

* * *

2208. Un patrat prin divizarea laturilor în cîte 7 părţi, se împarte în 49 pătrăţele. În aceste pătrăţele să se scrie numerele de la 1 la 49 toate diferite între ele, astfel ca suma numerelor de pe aceiaşi coloană sau linie sau diagonală, să dea acelaşi număr.

(Se poate consulta G.M.F. — B, pag. 550 din decembrie 1955, Caleidoscop matematic).

Adler Iulius, Bucureşti

2209. Într-un cerc dat O se consideră diametrul AB şi două coarde AD şi BC care se taie în interiorul cercului. Fie M mijlocul coardei CD, iar A_1 şi B_1 proiecţiile punctelor A şi B pe dreapta CD. Dacă raportul ariilor triunghiurilor AA_1C şi BB_1D este n să se arate că:

$$\frac{AC^2 - BD^2}{4 \cdot OM^2} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Al. I. Voinea, elev, Craiova

2210. Rezistenţele r_1, r_2, r_3 sînt montate în stea, capetele libere fiind notate cu A, B, C. Măsurînd succesiv rezistenţa între punctele A şi B, B şi C, C şi A se găseşte $R_{AB} = R_3 = 8\,\Omega$, $R_1 = R_2 = 6\,\Omega$, $R_{CA} = R_2 = 4\,\Omega$. Să se calculeze rezistenţele r_1, r_2, r_3.

* * *

2211. Printr-o soluţie de sulfat de cupru trece timp de 3 ore, un curent constant de 10 A. Ce cantitate de cupru s-a depus în acest timp la catod (echivalentul electrochimic al cuprului fiind K = 0,33 mg/C)?

* * *

2212. Se dă ecuaţia $(3m-1)x^2 - (m+4)x + m + 1 = 0$.

a) Pentru ce valori ale parametrului m ecuaţia are ambele rădăcini mai mari decît 3.

b) Pentru ce valori ale lui m ambele rădăcini sînt mai mari decît -1.

c) Pentru ce valori ale lui m rădăcinile ecuaţiei date sînt: una mai mică decît $\frac{3}{4}$ şi alta mai mare decît $\frac{3}{2}$. (Se poate consulta articolul din G.M.F.—B, pag. 202, mai 1955).

L. Domide, Rodna

2213. Fie $A_1A_2A_3A_4$ vîrfurile unui tetraedru oarecare. Din vîrfuri ca centre se consideră sfere egale. Sfera cu centrul în A intersectează muchiile A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 respectiv în C_1, C_2, C_3. Se notează cu D_1, D_2, D_3; E_1, E_2, E_3 punctele analoage. Să se demonstreze că punctele unde muchiile A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 înţeapă respectiv planele $(F_1F_2F_3)$, $(C_1C_2C_3)$, $(D_1D_2D_3)$, $(E_1E_2E_3)$ sînt coplanare. Se poate considera ca o generalizare a problemei 135.

V. I. Soreseu, student

2214. O sirenă instalată pe un vapor ce se deplasează spre mal cu viteza de 50,976 km/h este prevăzută cu un disc ce are 100 orificii şi o turaţie de 375 ture pe minut. Să se calculeze înălţimea sunetului receptat pe mal de un observator.

Alex. I. Voinea, elev, Craiova

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E: 806: Secţia de strungărie a unei întreprinderi are ca sarcină lunară de plan confecţionarea a 75000 piese. Acest număr de piese este repartizat celor trei brigăzi de strungari, compuse din 7, 8 şi 10 muncitori, proporţional cu numărul lor. Printr'o mai bună organizare a muncii şi aplicînd metodele de muncă înaintate, cele trei brigăzi au reuşit, chiar din prima lună a anului, să depăşească norma lunară respectiv cu 124%; 126%; 130%.

Să se afle numărul de piese confecţionate în această lună de către fiecare brigadă precum şi procentul de depăşire a planului întregii secţii.

Ion St. Muşat, profesor

*) Clasa V: (E: 806, 813, 814); VI: (E: 807, 808, 811. 816); VII: (809, 810, 812, 815, 817, 818).

E: 807. Într-un vas în care se află un lichid, este introdus complet cu corp A de greutate $P = 11{,}5$ kg și densitate 7,8; printr-un fir de greutate neglijabilă corpul A este legat de un corp B de greutate $G = 10{,}2$ kg; iar firul este trecut peste un scripete fix, astfel că cele două corpuri își fac echilibru. Reamintiți principiul lui Arhimede și aflați densitatea lichidului.

C. Neeșoiu, București

E: 808. Un sportiv în greutate $G = 63$ kg se află cu schiurile pe zăpadă. Schiurile au o lățime de 12 cm și o lungime de 1,75 m. Care este presiunea exercitată pe un cm^2 asupra zăpezii?

C. Neeșoiu, București

E: 809. În triunghiul ABC dreptunghic în A, se duce înălțimea AA'. Perpendiculara dusă din A' pe mediana AM taie cateta AC în punctul D. Să se arate că suma ariilor triunghiurilor ABA' și MCD este egală cu aria patrulaterului $AA'MD$.

I. Rădulescu, Hagieni

E: 810. Cîte diagonale se pot duce unui poligon convex cu 12 laturi și cîte unui poligon convex cu 100 laturi?

C. I. Ț.

E: 811. Un muncitor zilier a prestat o muncă de a zile cu b lei pe zi, avînd de primit 340 lei. Reducîndu-se plata cu 2 lei pe zi urmează să primească numai 300 lei. Dacă muncitorul ar vrea să primească triplul primei sume, se întreabă cîte zile ar trebui să mai muncească acel muncitor.

B. I. Baieră, Adjud

E: 812. Pe latura BC a unui dreptunghi $ABCD$ se ia un punct M. Dreapta AM taie diagonala BD în punctul N. Să se arate că triunghiurile ANB și DMN au ariile egale.

Mircea Ziberman, elev, Bacău

E: 813. Pentru 60 kg ceapă, 200 kg cartofi și 150 kg fasole s-a plătit 1220 lei. Fasolea costă de 3 ori cît ceapa; iar ceapa de două ori cît cartofii. Care este costul fiecărui aliment?

Ion Grigorescu, elev, R. Vîlcea

E: 814. Trei muncitori evidențiați au primit împreună un ajutor de 755 lei. Dacă primul muncitor are salariu lunar de 450 lei și are 6 copii, al doilea are 400 lei salariu și 4 copii; iar al treilea are 5 copii și 325 lei salariu, să se afle ce ajutor a primit fiecare dacă sumele primite au fost proporționale cu numărul copiilor și invers proporționale cu salariu.

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 815. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{4+x}{4-x}\cdot\frac{6+x}{6-x}+\frac{6+x}{6-x}\cdot\frac{9+x}{9-x}+\frac{9+x}{9-x}\cdot\frac{4+x}{4-x}+1=0.$$

Gh. I. Stoian, student, București

E: 816. Se dă expresia $E = 4n^3 - 7n + 3$. Să se descompună această expresie în factori de gradul întîi. Să se arate că oricare ar fi n întreg și pozitiv expresia dată este un multiplu de trei.

Se poate ţine seama că numărul n poate să mai fie scris sub una din formele $3K$, $3K - 1$ sau $3K + 1$, unde K este număr întreg.

R. Petrovici

E: 817. Să se afle numărul întreg de trei cifre care scris în baza 9 este de forma aob, iar în baza 7 este de forma boa, unde a şi b sînt cifre. Se va ţine seamă că numărul N de forma xyz scris într-o bază v, are $z + y \cdot v + x \cdot v^2$ unităţi.

Stelian G. Mărculescu

E: 818. Dacă între numerele a, b, x,y, m, n, diferite de zero, avem relaţiile

$$ax = by \qquad \text{şi} \qquad mx = ny,$$

să se arate că rezultă şi relaţia $an = bm$.

Gh. Dinu, elev,

POŞTA REDACŢIEI

— *Tov. Simion Ispas*, absolvent, Iaşi. Pentru numere mai vechi din GMF-B vă puteţi adresa la « Librăria Academiei R.P.R. » din Bucureşti, Calea Victoriei 27, serviciul « Cartea prin poştă ». Deocamdată se găsesc Nr. 9 şi 10 din anul 1955 cu 1 leu exemplarul.

— Soluţiile problemelor pentru şcoala de 7 ani pe care le-aţi trimis nu se anunţă la rubrica rezolvitorilor deoarece se anunţă numai soluţiile bune trimise de elevii claselor V—VIII inclusiv.

— Problemele propuse ce aţi trimis nu se pot publica cu numele dv., deoarece sînt cunoscute ; cea de geometrie poartă numele « teorema lui Desargues ».

— *Tov. Păun Gh.*, inginer, Constanţa. Chestiuni amuzante de matematici care pot fi şi educative sau interesante, se publică la rubrica « Caleidoscop ». Asupra extragerii rădăcinii de ordinul 5 fără logaritmi sînt cunoscute unele metode, însă destul de greoaie.

— *Tov. Bîrzan Romanel*, elev, Cluj. Problemele ce aţi trimis pentru propus nu sînt însoţite de rezolvarea lor şi prin urmare nu se pot publica.

— *Tov. Panţuru Dumitru*, elev, Iaşi. Nu este posibil să răspundem fiecărui rezolvitor cît mai urgent, cum doriţi dv. dacă soluţiile au fost bune sau nu, deoarece răspunsul este dat fiecăruia la Rubrica rezolvitorilor. Aşteptăm soluţiile celor 20 colegi din cercul matematic de care scrieţi că s-au hotărît să fie buni colaboratori la G.M.F.—B.

— *Tov. Bercovici Izu*, elev, Bîrlad. Unele noţiuni sau definiţii ca « tetraedru echifacial », « şiruri recurente » sau « inducţie completă » le puteţi cunoaşte îndată apelînd la tov. profesor de matematică din localitate.

— Tovarăşii elevi şi studenţi cărora li s-au acordat premii sau menţiuni în cărţi, pentru activitatea ce au desfăşurat în cursul anului 1955, după cum s-a publicat în G.M.F.—B nr. 2, şi nu au primit cărţile acordate, sînt din nou rugaţi să ne comunice pe o *carte poştală* adresa lor exactă unde doresc să li se trimită pachetul cu cărţi.

— Pînă la apariţia nr. 6 al G.M,F.—B şcolile medii care participă la întrecerea pe ţară între cercurile de matematică şi de fizică din şcoli sînt rugate să întocmească şi să ne trimită fişa cerută, cu viza direcţiei şcolii, după cum s-a anunţat în regulamentul respectiv publicat în G.M.F.—B, 12/1955, pag. 556.

— Plicurile cu probleme, a căror greutate depăşesc 20 grame trebuie să fie francate corespunzător tarifului poştal, altfel ele nu ajung la destinaţie.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

În cursul lunilor decembrie 1955 și ianuarie 1956, s-au evidențiat din localitățile care încep cu inițialele A — G, următorii rezolvitori de probleme:

Bărbuică C. Nicolae (cl. X s.m.1, Craiova), *Stoian I. Gheorghe* (student București), *Grosu G. Florin* (cl. X Galați), *Iordache G. Vasile* (cl. X Brăila), *Bigan Stan* (absolvent Giurgiu), *Dudă Nic.* (absolvent Călărași), *Panaitopol Laurențiu* (cl. X Giurgiu), *Roșianu C. Dragomir* (student București), *Nistreanu Valeriu* (cl. X s.m. 4 București), *Voinea I. Alex.* (cl. X s.m. 1 Craiova), *Stăncescu Emil* (cl. X Giurgiu), *Popescu Paul* (cl. X s. m. 11 București), *Cristea Aurel* (cl. X s. m. 4 București), *Păunescu I. Lucian* (cl. X s. m. 17 București), *Cucu Paul* (cl. X Buzău), *Maftei Nicolae* (cl. X s. m. 7 București), *Filcescu Viorel* (cl. X s. m. 4 București), *Predoescu Marieta* (cl. VII s. m. 10 București), *Arion Adrian* (cl. IX Botoșani), *Hulubei Valeriu* (cl. X s.m.1 Craiova), *Șarpe I. Dumitru* (cl. X Corabia), *Puiu Tiberius* (cl.X s.m.20 București), *Tudor M. Gheorghe* (cl. X s. m. 13 București), *Grofșoreanu Gelu* (cl. VII s. m. 7 București), *Nicolau Cornel* (cl. VIII s. m. 4 București), *Popa Doina* (cl. VII s. m. 15 București), *Ignat Maria* (cl. VII Păunești Adjud), *Torsan Ilie* (absolvent Alba Iulia), *Suciu A. Tița* (cl. IX Buzău), *Encica Traian* (cl. X Constanța).

* * *

În cursul lunilor decembrie 1955 și ianuarie 1956 s-au primit cîte zece soluții bune la problemele propuse în G. M. F.-B în numerele din septembrie, octombrie, noiembrie și decembrie 1955, după cum urmează :

ADJUD. Clasa X-a. Avram N. Constantin (1875—878, 881—884, 886, 891, 908, 915, 919, 920, 922—924, 927, 942). *Școala mixtă de 7 ani Păunești.* Clasa VI-a. Chiriac Maria (E : 687, 695, 696, 710, 724, 727, 736, 737, 739), Novac Gh. Gheorghe (E : 624, 680, 685, 693, 694—696, 700, 703, 707, 709,710, 727, 735, 736, 738, 739), Pintilie Florica (E : 672, 685, 696 709,710, 724, 727, 735, 736, 738, 739), Vasilache Zarafina (: 674, 678, 687, 694—696, 700, 707, 710, 724, 727, 728, 735—739) ; clasa VII-a. Apostu C. Ioana (E : 697, 699, 702, 710, 721, 724, 735, 736, 738, 739, 742), *Ignat Maria* (E: 674, 676, 684, 685, 693—696, 699, 700, 703, 707, 709, 710, 718, 721, 724, 727, 729, 735, 738, 739, 742), Șerbănescu Cornelia (E : 673, 684, 694—696, 704, 710, 718, 721, 724, 726, 729, 735—739, 742), Șerban Ligia (E : 684, 687, 691, 696—698, 704, 709, 710, 718, 721, 724, 727, 729, 730, 735—739, 742), Stoica V. Nicolae (E : 679, 682, 696, 697, 704, 710, 718, 724—727,729, 730, 733, 735—739, 742).

AIUD. Clasa X-a. Fischer Gheorghe (1829, 830, 847, 875, 877, 881, 883, 884), Suciu I. Ioan (1875—877, 881, 882, 884, 885, 889, 891,901, 903, 915, 917, 919, 920, 923, 924, 930, 931, 940, 943, 945) ; *Școala medie romînă din Ocna Mureș.* Clasa X-a. Duca Vasile (1816, 833—837, 847, 851, 858, 861, 866, 875, 876, 882, 884, 891, 908, 911).

ALBA IULIA. Clasa VIII-a. Trifu Mircea (1838, 851, 867, E : 708, 714—716, 718, 720—722, 725, 727, 729, 730, 731) ; clasa X-a. Cojanu Nicolae (1841, 843, 844, 877, 881, 882, 916, 917, 920, 924, 937), Voicu Virgil (1618, 833, 867, 881—884, 916, 917, 924), absolvent *Torsan Ilie* (1833, 836, 842, 848, 849, 857, 859, 867, 868, 874—878, 881—884, 891, 894, 913—915, 919, 924, 925, 931, 940, 943).

ARAD. Clasa VIII-a. Blidaru Cornel (1832, 834, 842, 844, 862, 875, 876, 882, 884, E : 687, 708, 713—715, 718, 722, 725, 727, 730—733, 737, 742, 745), Balint Ion (E : 687, 703, 708, 714—716, 718, 720—722, 731), Codreanu Lucian (1816, 848, 851, E : 701, 703, 707, 708, 714, 718, 722, 727, 731, P), Demișoreanu Brutus (1818, 822, 848, 851, E : 708, 714, 718, 720—723, 725, 727, 729—733), Filoti George (E : 687, 693, 695, 698, 700, 703, 704, 707, 709, 715, 718, 721, 727), Leibu Lică (1851, E : 693, 695, 698, 700, 703, 707,

709, 713, 718, 721), Nistor Gheorghe (1851, E : 687, 708—710, 714, 715, 718, 721, 730, 731), Noian Corneliu (1851, E : 678, 708, 709, 710, 714, 715, 718, 720, 721, 731), Savin V. Virgil (1851, E : 693, 703, 709, 714, 718, 722, 730) ; clasa IX-a. Dumitrescu Marilena (1816, 830, 843, 844, 847, 866, 871, 875, 876, 879, 882), Ghilezan Doina (1830, 832, 843, 844, 847, 866, 876, 879, 882, 915, 940) ; anul III Cotrau Felicia (1830—833, 837, 844, 859, 866, 875, 876, 878, 881—884, 894, 914, 924, 927, 931, 940).

BACĂU. Clasa VIII-a. Dobronăuţeanu M. Silviu (1938, 944, E : 702, 706—708, 712, 714, 716, 727, 729, 731, 742), Tiţaru Ioan (E : 708, 714, 716, 722, 727, 729—731, 742, 746) ; clasa X-a. Ciorcea I. Nicolae (1830, 831, 835, 844, 875, 878, 882—884, 917, 920, 924, 936, 938, 943, 944), Popa Ioan (1875, 878, 881, 884, 915—917, 920, 924, 940, 943, 944), Vasiliu Monica (1618, 783, 830, 831, 833, 842, 859, 875, 877, 881, 882, 894, 911, 915, 917, 920, 924, 925, 940, 941, 943, 944), Zilbermann Mircea (1815, 829, 915—917, 919—921, 923, 926, 930, 931, 938, 940, 942, 944).

BAIA MARE. *Şcoala medie Vişeul de sus.* Clasa VIII-a. Vornicescu Nicolae (1851, E : 716, 718, 720—722, 727, 729—731, 742) ; clasa X-a. Berinde Gheorghe (1660, 838, 851, 859, 874—878, 881—884, 891, 894, 915, 917, 920, 924, 927, 938), Conţiu Ioan (1830, 832, 834—837, 841, 842, 844, 861, 866, 875—878, 881—884, 890—892, 898, 908, P).

BALŞ (Craiova). Clasa IX-a. Neacşu Mihai (1835, 838, 841, 844, 851, 862, 866, 924, 931, 938, 940).

BÎRLAD. Clasa X-a. Hoţoi Zoica (1877, 878, 880—883, 891, 894, 918, 940), Dumitraşcu Cornelia (1831—833, 835, 838, 844, 851, 867, 940, 944).

BLAJ (Stalin). Clasa X-a. Pop Alexandru (1874, 876, 878, 881, 882, 884, 894, 908, 911, 920, 930, 931, 944, P).

BOTOŞANI. Clasa VIII-a. Cojocaru Elena (1851, E : 682, 708, 709, 713, 714, 718, 721 727, 729), Călinescu Dumitru (E : 682, 687, 708, 718, 721, 727, 729, 730—732, 735), Ginga Niculina (1851, E : 687, 708, 709, 713, 714, 718, 727), Helştovschi Eugeniu (1851, E : 669, 672, 692, 703, 704, 715, 718, 727, 729) ; clasa IX-a. Andricioaiei I. Gheorghe (1805, 837, 862, 866, 872, 878, 883, 890, 898, 899, 913, 915, 923, 924, 938, 940, 943—945), *Arion Adrian* (1783, 826, 830, 834, 844, 861, 862, 866, 875—879, 882, 883, 884, 890, 901, 908, 913—915, 919, 924, 931, 938, 940, 943, 944), Gherman Cornelia (1762, 769, 781, 787, 813, 814, 826, 830, 834, 861, 862, 866), Mardare Felicia (1832, 834, 835, 837, 847, 875—877, 898, 940)-816), Prăjinaru Vasile (1833, 835, 842, 844, 847, 876—879, 881—883, 899, 938, 940), Rottemberg R. Martin (1833, 835, 837, 830, 842, 844, 847, 862, 866, 871, 875—877, 879, 881 ,883, 913, 914, 931, 940, 941, 943 , *Vasiliu Monica* (1830, 832, 834, 861, 875, 876, 889, 898, 901, 914, 915, 924, 928, 932, 938, 940, 942, 944, 945).

BRĂILA. Clasa X-a. Costin P. Mircea (1834, 835, 837, 841, 844, 858, 876, 882, 883, 923, 940, 943, 955), Georgescu Laurian (1681, 698, 741, 759, 776, 783, 793, 811, 816, 833, 835, 841, 851, 867, 878, 882—884, 891), *Iordache G. Vasile* (1618, 726, 740, 742, 747, 759, 762, 768, 774, 775, 786, 787, 792, 793, 803, 814, 819—822, 830—835, 837, 838, 842, 843 844, 847, 848, 851, 859, 867, 875, 876, 878, 882, 884, 915, 922—924, 931, 940, 943), Negraru Viorica (1830, 835, 875, 876, 881—884, 916, 938, 940, 943, 944), Popescu Adrian 1832, 835, 843, 844, 851, 867, 875, 882, 884, 931), absolvent Reicher Dan (1771, 783, 829, 835, 839, 844, 857, 874, 877, 880, 883, 885, 889, 890, 891, 917, 940, 743), Vasilescu I. Florentin (1874, 875—878, 881, 883, 884, 886, 889, 891, 894, 900).

BREAZA (Ploeşti). Şcoala militară medie « Dimitrie Cantemir ». Clasa VIII-a. Diaconescu I. Nicolae (1832, 835, 866, E : 682, 698, 701, 703, 704, 706, 708, 718), Grigoraş I. Gheorghe (E : 682, 690, 698, 701, 703, 704, 706, 708, 718, 722), Ostofi Mihai (1832, E : 682, 690, 698, 701, 704, 707, 708, 709, 718, 722).

BUCUREŞTI. *Studenţi* : Popovici I. Radu (Fac. mecanică) (1830, 837, 840, 842, 844, 849, 867, 891, 917, 940), Prisadă Dan (Fac. de mecanică) (1830, 845, 874—878, 881—884,

888, 891, 894, 915, 919—921, 923, 924, 926, 938, 940, 943, 945, 948), *Roşianu C. Dragomir* (Inst. Petrol şi Gaze) (1671, 682, 683, 690, 692, 693, 698, 699, 701, 703, 709, 710, 714, 727, 759, 760, 762, 816, 830, 831, 833, 835, 837, 841, 843, 847, 861, 862, 875, 877—880, 882, 891, 900, 907, P), *Stoian I. Gheorghe* (Fac. de matematică) (1713, 749, 763, 768, 802, 816, 825, 832—837, 841—845, 847, 848, 857, 859, 861, 874—876, 878, 881, 882, 884—886, 888, 890, 891, 898, 900—902, 908, 913—917, 919, 920, 922—925, 937—943, 945, P), absolvent Sima P. Luca (1836, 838, 866, 927, 939, 941, 944, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 1 « N. Bălcescu ». Clasa VIII-a. Ghelmeziu Nicolae (E : 708, 709, 715, 721, 722, 727, 729—731, 735, 738, 742) ; clasa XI-a. Cipere Lucian (1402, 816, 819, 820, 831, 832, 838, 844, 872, 875—877, 882, 884), Brăileanu I. Grigore (1830, 844, 866, 869, 901, 911, 913, 915, 930, 940, 943, 944), Schileru Dinu (1848, 851, 862, 874, 881 884, 915, 917, 919, 920, 924, 940—942) ; clasa X-a. Cernica Radu (1830, 831, 833—838, 841, 843, 844), Moraru Florentin (1814, 816, 819, 834, 836, 841, 844, 861, 875—877, 882, 883, 913, 917, 923, 925, 945) Şerban Adrian (1835, 844, 861, 875—878, 881—884, 889, 891).

Şcoala mixtă nr. 3 Clasa VII-a. Ioachim Alexandru (E: 709—711, 713, 714, 715, 716, 718—723, 725—733, 739—742, 745, 748).

Şcoale medie nr, 4 « Aurel Vlaicu ». Clasa VIII-a. Constantinescu Remus (E: 695, 701 703, 708, 709, 718, 727, 729, 735, 738, 851), Dobre Cornel (1830, 851, 875, 882, 884, 915, 924, 938, E: 721, 722, 746,), Mincu Horst (1875, 876, 878, 882, 884, E: 708, 713, 718, 727, 745), *Nicolau Virgil* Cornel (1914, 935, 938, 940, E: 687, 693, 694, 697, 709, 710, 713, 723—725, 727—733, 735—740, 742, 744, 745, P), Ştefănoiu Viorel (1875, 882, 884, 915, 924, 938, E: 710, 714, 725, 735, 737, 738), Toader M. Gheorghe (1875, 882, 884, 914, 915, 924, 938, E: 714, 721, 727, 729, 731); clasa XI-a. Badea Costel (1820, 827, 828, 847, 865, 867, 884, 898, P), Căleaţă Niculae (1800, 816, 830—833, 835, 837, 844, 851, 861, 882, 937, 941), Cilţea Gheorghe (1830, 831, 833, 834, 837, 844, 851, 861, 867, 875, 877, 883, 893, 898, 927), Ciurea Ilie (1834, 838 842, 851, 865, 867, 875, 877, 880, 882—884), Camburov M Gh. (1827, 830, 842, 844, 848, 851, 865, 875, 876, 882). Ionescu L. Ion (1827, 830, 851, 867, 872, 875, 877, 882, 924, 937), Manu D. Valentin (1830, 834, 838, 842, 851, 865, 875, 877, 882, 884, 885), Marţiş Ioan (1831, 838, 851, 865, 875, 877, 882—884, 924, 937, 940, P), Matei V. Gheorghe (1824, 837, 838, 831, 833—835, 837, 838, 844, 847, 861, 687, 877, 883, 937, 938, 943), Oanea Constantinescu (1655, 668, 784, 800, 816, 827, 830, 847, 848, 865, 882, 898), Pătraşcu Sorin (1816, 821, 830, 840, 878, 915—917, 920, 921, 923—927, 930, 931, 940, 943, 944), Petrescu Octavian (1786, 830, 831, 848, 851, 867, 876, 875, 882, 914), Popescu D. Alexandru (1816, 820, 830, 831, 833, 842, 865, 867, 875, 877, 882, 898, 924, 937), Rădulescu Constantin (1816, 820, 827, 830, 831, 834, 844, 847, 848, 851, 863, 875, 876, 882, 884, 893, 942, P), Schwartz Arnold (1815, 875—877, 892, 898, 937, 943), Stamatoiu Petre (1816, 820, 827, 830, 831, 834, 844, 847, 848, 851, 863, 875, 876, 882, 884, 924, P), Voinescu Constantin (1830, 834, 838, 842, 871, 875, 877, 880, 882, 883, 884); clasa X-a. Baciu Valeriu (1830, 831, 833, 835, 837, 844, 866, 877, 876, 881—884, 915, 920, 923, 931, 940, 943, 944), *Cristache Aurel* (1830, 831, 833, 835, 837, 841, 844, 866, 874—877, 879—884, 891, 893, 894, 915, 917, 920, 923, 924, 928, 931, 940, 941, 943—945), *Filcescu Viorel* (1830, 831, 833, 835, 837, 841, 844, 866, 874, 876, 877, 879—884, 891, 893, 915, 917, 920, 923, 924, 928, 931, 937, 940, 941, 943—945), Lupu Gheorghe (1830, 835, 837, 844, 851, 875, 876, 880, 882, 891, 915, 922, 924), *Nistreanu Valeriu* (1618, 762, 782, 830, 831, 833, 835, 837, 838, 841, 842, 844, 848, 849, 867, 875—878, 881—884, 889, 902, 914, 915, 920, 923—925, 931, 940, 943, 944, P), Popa Mircea (1816, 827, 875, 877, 884, 915, 924, 931, 938, 940), Voinea P. Marin (1838, 835, 837, 844, 881, 882, 884, 915, 920, 924).

Şcoala medie nr. 7 « I. L. Caragiale ». Clasa VII-a. *Groşşoreanu Gelu* Tudor (1833, 848, 849, 851, 876, 940, E: 687, 708—711, 713, 715, 716, 718, 722, 724, 725, 727—733,

735, 738); clasa X-a. *Maftei Nicolae* (1816, 821, 829—833, 835—838, 840, 845, 847, 851, 875—884, 886, 888, 891, 892, 894, 914, 915, 920, 924-926, 938, 940, 943).

Şcoala medie de fete nr. 8. Clasa XI-a. Marinaş Liliana (1762, 876, 882, 884, 924, 938, 940, 943, 944).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa VII-a. Predescu Ioana (E: 687, 693, 695, 700, 703, 709, 710, 715, 724, 727), *Predoescu Marieta* (E: 687, 690, 693—696, 698—701, 703, 704, 706, 708, 709, 711, 713—716, 718, 720, 722, 723, 725—727, 729—733, P); clasa VIII-a. Repciuc Rodica (1816, 862, 872, 876, 882, 910, 911, E: 699, 701, 719).

Şcoala medie de băieţi nr. 11. Clasa X-a. Corbu Ioan (1831, 833, 838, 843, 845, 847, 867, 877, 884—886, 891, 894, P), Mirea Paul (1830, 875, 877, 880, 882, 884, 892, 915, 917), *Popescu Paul Roger* (1727, 728, 732, 734, 736, 743, 747, 751, 759, 762, 776, 783, 793, 794, 795, 799—801, 803, 814, 816, 821, 830, 833, 835—837, 843—845, 847, 851, 866, 875—877, 880—884, 891, 898), Sandu Valeriu (1833, 835, 837, 844, 875, 877, 878, 881—883), Tînţăreanu R. C. (1829—831, 834, 835, 837, 839, 844, 845—847, 859, 866, 874, 875, 877, 880, 882, 884), Velculescu A. Silviu (1816, 835, 837, 844, 861, 866, 875, 877, 878, 882, 884, 889),

Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa VII-a. Petrică Nicolae (E: 681, 682, 689, 701, 702, 708, 713, 716, 718, 722, 729—731); clasa VIII-a. Bănică Dan (1809, 814, 815, 851, E: 693—695, 698, 701, 706, 709, 710, 714, 715, 718, 721); clasa IX-a. Lerner Emil (1832, 834, 844, 860—863, 866, 871, 875, 876, 882, 911, 913, 915, 923, 924, 930, 940, 955, P), *Tudor* M. *Gheorghe* (1814, 827, 830, 832, 834, 838, 843, 844, 847, 851, 861, 866, 875, 876, 882, 898, 908, 911, 913—915, 915—922 922—924, 931, 935, 938, 835, 938, 940, 944, 945, P); clasa X-a. Brăitan Florian (1833, 835, 844, 851, 875—878, 880—884, 889, 902, 908, 914, 931, 940, 941, 943), Caragea V. Dimitrie (1874—879, 881, 882, 884, 890, 894, 898, 916, 917, 919, 920, 923—927, 940, 941, 943, 944), Dobre Ion (1830, 835, 841, 875, 876, 878, 881, 882, 884, 891), Flueraşu Cezar (1832—838, 841—844, 848, 849, 851, 861, 866), Ionescu Dan (1810, 816, 820, 822, 830—835, 837, 838, 840, 841, 843, 844, 847, 849, 848, 851, 861, 871), Şaganai Aclic Nusfet (1783, 814, 816, 818, 822, 827, 830, 832—838, 841—844, 847, 851, 861, 866).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa VII-a *Popa Doina* (E: 708, 714, 716, 718,719, 721, 722, 724, 725, 727, 729—733, 741—744, 746); clasa IX-a. Enescu Cornelia (1816, 828, 830, 831, 833, 843, 837, 859, 872, 875, 876, 878, 879, 881, 882, 898); clasa X-a. Delcescu Rodica (1724, 727, 736, 738, 740, 742, 753, 754, 775, 819), Iosif Smaranda (1830—832, 834, 835, 837, 841, 843—845).

Şcoala medie de băieţi nr. 17. Clasa IX-a. Ceapîru D. Mihai (1838, 844, 848, 849, 851, 863, 867, 877, 883, 914), Mîndroiu Mircea (1830, 831, 861, 872, 877, 882—884, 920, 943); clasa X-a. Coliren I. Ignatz (1830, 875, 881, 883, 884, 886, 887, 915, 917, 922—925), Herşcu Sergiu (1833, 842, 874, 875, 890, 915, 917, 920, 922, 924, 940, 943, 944), Nacev I. (1835, 837, 841, 844, 848, 861, 876, 877, 881—884, 908, 915, 917, 919 920, 923—925, 931, 938, 940, 943, 944), *Păunescu I. Lucian* (1830, 832, 834—838, 841, 842—845, 847, 848, 851, 861, 866, 874—877, 881—884, 891, 896, 915, 917, 919, 920, 924, 925, 940, 943), Prună D. Gheorghe (1783, 814, 816, 818, 819, 821, 822, 835, 842, 848, 849, 851), Suruceanu Nicolae (1816, 835—837, 844, 876, 877, 881, 882, 883).

Şcoala medie de băieţi nr. 18, Clasa VIII-a. Tohăneanu Florin (E: 670, 678, 680, 701, 705, 708, 711, 713, 716, 817, 729); clasa IX-a. Mincin C. (1831, 836, 837, 844, 848, 851, 875, 882, 920, 940, 944); clasa X-a. Kaufman I. Alfred (1832, 833, 841, 875—878, 880, 884, 885, 889—891, 915—921, 924, 925).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. Clasa VII-a. Berceanu Tudor (E: 735, 738, 742, 741, P); clasa VIII-a. Enulescu C. Alex. (1851, 863, 866, E: 687, 708—710, 715, 721, 722, 725, 731); clasa IX-a. Grigorescu Ştefan (1830, 831, 842—844, 871, 875, 882, 884, 890, 915,

924), Iordănescu R. Sorin (1783, 786, 814, 816, 830, 831, 838, 841, 844, 848, 851, 867, 871, 872, 875, 876, 882, 884, 891, 915, 924, 925, 940, 943), Iorgulescu Iulian (1809, 814, 816, 875, 876, 882, 884, 911); clasa X-a. Ene Ion (1830, 835, 837, 838, 842—844, 147, 849, 851, 859, 861, 862, 874—877, 880—884, 886, 891, 898, 913, 915, 916, 924, 940, 944), Gheorghiu Z. (1832—835, 837, 844, 875—877, 833, 835, 836, 859, 874, 876, 881, 882, 884, 891), Puiu Tiberiu (1618, 830—848, 851, 854, 856, 857, 859, 861, 862, 864, 866, 867, 871, P).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa IX-a. Gheorghiţă Mariana (1830, 838, 844, 851, 866, 875, 876, 882, 889, 940).

Şcoala de 7 ani nr. 126. Clasa VII-a. Sărescu Gheorghe (E : 687, 693, 695, 703, 708—719, 713, 735, 737, 742).

Şcoala mixtă de 7 ani nr. 145. Clasa VI-a. Bozdoc Ioana (E: 693, 695, 696, 700, 703, 709, 710, 735, 736, 738), Şoncuţeanu Mircea (E: 687, 693, 695, 700, 703, 709, 710, 713, 735—737); clasa VII-a. Apostol Rodica (E: 687, 693, 695, 700, 703, 704, 708, 709, 737, 738, 742), Barbu Silvia (E: 693, 707, 709, 713, 735, 737, 738, 742), Groşanu Vasile (E: 687, 693, 695, 703, 708—710, 735—738), Ispas Adrian (E: 687, 693, 695, 703, 707, 709, 710, 713, 721, 735, 736, 738), Pascu Ioan (E: 693, 695, 703, 707—710, 721, 737, 738, 742).

Şcoala de 7 ani nr. 147 de fete. Clasa VII-a. Pătru Irina (E: 687, 695, 696, 700, 703, 708—710, 713, 735, 737, 742).

BUZĂU. Clasa VII-a. Bălăţă Adriana (E: 687, 708, 716, 718, 722—724, 727, 729, 731, 732), Blăgoi Gh. Olimpia (E: 708, 716, 718, 724, 726, 727, 729—732); clasa VIII-a. Asproiu Janina (1914, E: 697, 698, 703, 709, 710, 713, 718, 722, 725, 729, 730, 731), Clement Gh. (E: 709, 710, 718, 722, 729, 730, 733, 745), Iacob I. Aurica (1862, E: 708, 709, 716, 722, 724, 727, 729, 731), Iancu Victoria (E: 709, 710, 718, 722, 724, 729, 735, 738, 741), Macarie Liliana (E: 708, 709, 714, 718, 720, 722, 725, 727, 729, 731, 735, 738, 745), Moisescu Dan (1816, 820, 822, 851, 882, E: 700, 701, 703, 704, 707, 709, 715, 721, 725, 727, 730, 731), Vitman Marlene (E: 697, 701, 703, 708, 718, 722, 725, 727, 729, 731), clasa IX-a. Ilie Sidy (1833, 838, 843, 844, 851, 875, 876, 878, 879, 882, 884, 914, 925), Popescu Valentina (1816, 820, 838, 844, 847, 851, 875, 876, 879, 882, 884), Suciu A. Tiţa (1816, 820, 822, 829, 830, 831, 833, 836, 838, 843, 844 847, 848, 851, 852, 874, 875, 877—879, 882—884, 914); clasa X-a. *Cucu Paul* (1816, 829, 830—838, 841, 842, 844, 845, 847, 849, 851, 854, 859, 861, 866, 867, 871, 872, 874—884, 889, 891, 894, 908, 920, 923, 924, 940, 943, 944), Petreanu Aristide (1829, 830, 831, 836, 843, 849, 854, 855, 858, 863, 867, 871, 874, 878, 891, 892, 898, 915, 917, 924).

CALAFAT. Clasa VIII-a. Parapancea C. Marin (1851, 875, 876, 882, 884, 940, E : 708, 714, 722, 735, 738, 745) ; clasa IX-a. Ciurezu C. Radu (1837, 838, 844, 848, 849, 851, 857—877, 881—884, 890), Diaconescu C. Gh. (1837, 851, 857—877, 882—884, 890, 940, 943, 944).

CĂLĂRAŞI. Clasa VIII-a. Stoicescu Petre (E : 687, 713, 718, 727, 729, 835, 837, 875, 877, 941) ; clada IX-a. Strătescu I. (1843, 876, 877, 883, 923—925, 930, 931, 938, 940, 943, 944, P) ; clasa X-a. Bragadiru Lascăr (1831, 833, 835, 836, 838, 842, 843, 848, 874—877, 881—884, 891, 915, 917, 919, 920), Guţulescu Aurel (1835, 843, 875, 876, 880, 881—884, 917), Nicolescu Dan (1830, 831, 833—838, 843, 844, 851, 875—878, 881—884, 889, 891, 894, 914, 915, 917, 920, 924, 926, 940, 943), Stan Aurel (1842, 878, 882, 889, 917, 920, 941, 943), absolvent *Dudă Nicuşor* (1814, 830, 833, 835—837, 840, 841, 843, 844, 874—878, 881—884, 886, 888, 890, 891, 892, 894, 916, 917, 919, 920—922, 924—927, 931, 938—941, 943, 944).

CÎMPINA. Clasa X-a. Moisin Z. Tudor (1811, 816, 819, 820, 822, 824, 830, 831, 835—838, 844, 845, 847), Balea Andrei (1830, 831, 835, 836, 838, 867, 875, 877, 881, 883, 834, 891, 931, 938).

CARACAL. Clasa IX-a. Rădulescu Victor (1830, 831, 875, 877, 883, 884, 915, 920, 940, 943).

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

CARANSEBEŞ. Clasa IX-a. Huţegan Cornel (1829, 830, 833, 834, 842, 849, 852, 875, 876, 882—884, 904), absolvent Lăbău Nicolae (1927, 931, 937, 938, 940, 941, 943, 945).

CÎMPULUNG-Muscel. Clasa V-a. Savin I. Alexandru (E : 672, 693—695, 696, 709, 710, 715, 727, 733, 735, 737—739).

CLUJ. Clasa VIII-a. Bunea Mircea (1882, E : 700, 703, 724, 726, 727, 729, 732, 733, 738, 743) ; clasa IX-a. Bîrzan Romanel (1702, 833, 835, 840, 843, 844, 863, 875, 876, 879, 882, 883, 886, 888, 898, 911, 913, 915, 920, 940, 941, 943) ; clasa X-a. Reich Toma (1875, 876, 877, 881, 883, 884, 894, 914, 920, 924), Vuşcan Teodor (1835, 837, 838, 844, 866, 882, 891, 920, 924, 931, 940, 943), Alexandru V. Mărian (Solstiţiile şi echinocţiile).

CONSTANŢA. Clasa VIII-a. Ciochină Cornel (1851, E : 708, 709, 714, 716, 718, 720, 721, 725, 729—731) ; clasa IX-a. Anghel Constantin (1814, 818, 820, 822, 838, 844, 848, 851, 858, 862, 866, 875, 882—884, 898, 900, 915, 923, 924, 931, 940, 943, 944), Dobriţoiu Petre (1830, 837, 844, 875—877, 879, 881—884), Ianuş I. Stere (1830, 836, 842, 883,885, 908, 911, 915, 923, 925, 935, 940, 943), Ionescu Ion (1830, 837, 841, 842, 844, 875—877, 881—884) ; clasa X-a. Birda Tiberiu (1833—836, 848, 851, 877, 878, 881, 883), Enaica Traian (1830, 1832—838, 844, 867, 875—878, 881, 883, 884, 894, 917, 920, 923, 924, 926, 927, 931, 939, 940, 943, 944), Manolescu I. Ilie (1838, 835, 837, 838, 841, 844, 848, 851, 861, 867), Păun Gh. (Extragerea rădăcinii).

CORABIA. Clasa VIII-a. Petcu Alexandru (E : 708, 709, 727, 729, 731, 738, 741, 745), Voiculescu Emilia (1848, 851, E : 709, 710, 718, 689, 708, 713, 715, 721) ; clasa IX-a. Florescu Mihai (1830—833, 835, 838, 841, 847, 848, 851, 875, 881—884) ; clasa X-a. Delu Ştefan (1832, 834—837, 841, 847, 848, 852, 861, 877, 879, 880, 882, 885, 891, 894, 903, 915—927, 931, 937, 940, 943, 944), Şarpe I. Dumitru (1616, 618, 769, 831, 832, 835, 837, 841, 844, 845, 848, 861—863, 874—876, 878, 880—884, 891 892, 894, 903).

CRAIOVA. *Şcoala medie de băieţi nr. 1 «N. Bălcescu»*. Clasa VIII-a. Duţu N. Corneliu (1838, 842, 848, 851, E : 704, 710, 724, 729, 735, 737, 738) ; clasa X-a. *Bărbuică C. Nicolae* (1613, 762, 806, 810, 811, 814, 816, 817, 819—822, 824, 830—847, 857—859, 861, 863, 864, 866, 874—884, 886, 888—892). Căluţoiu I. (1833, 835, 861, 875, 881, 884, 919, 923, 924, 931, 937, 940), *Hulubei T. Valeriu* (1805, 806, 816, 819—824, 826, 827, 829, 843—847, 857, 859, 861, 863, 864, 866, 868, 872), Roşca Valentin (1848, 859, 867, 868, 875, 876, 878, 881, 914, 916, 920, 926, 926), Stănculescu A. Adrian (1830, 835—837, 875, 876, 878, 881—884, 889, 914, 915, 923, 924, 931, 940), Tăriţă Ion (1814, 816, 821, 844, 858, 876, 878, 881—884, 894, 908, 911, 915, 917, 924, 927, 931, 940, 943, 944, 945), *Voinea I. Alexandru* (1874—878, 880—885, 891, 892, 894, 900, 915—927, 931, 940, 942, 945, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 2 «Fraţii Buzeşti». Clasa X-a. Paraschiva Ion (1676, 783, 818, 829, 830, 833, 835, 838, 844, 851, 859) ; Clasa X-a. fără frecvenţă Daneţi. Dinu Gheorghe (1805, 808, 810, 811, 814, 816, 819—822, 824, 847—850, 857, 859, P), absolvenţi : Cojocaru Ion (1768, 803, 830, 833, 835—837, 844, 849, 874, 876, 878, 882, 842, 857, 864, 872, 875, 878, 881, 882), Sima P. Luca (1833, 834, 842, 844, 851, 858, 876, 878, 881, 883, 893).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VII-a. Păltineanu Gabriel (E : 691, 696, 700, 703, 709, 710, 715, 718, 731) ; clasa IX-a. Ciolac Vasilica (1792, 800, 816, 849, 861, 863, 866, 872, 901, 908).

DEJ. Clasa X-a. Mangu Ileana (1830, 835, 838, 842, 851, 855, 874, 878, 880, 882, 884), Săplăcan Angela (1838, 847, 848, 851, 855, 857, 866, 875—877, 880, 882, 891, 893, 911).

DRĂGĂŞANI. Clasa VII-a. Luculescu C. Constantin (E : 694, 696, 698, 700, 703, 707—710, 715, 718, 721, 722), absolventă Burlănescu Gabriela (1830, 831, 833, 841—844, 849, 851, 864, 876, 881, 882, 894).

FIERBINŢI.—Snagov. Clasa VIII-a. Cislaru Cornel (1822, 827, 849, 851, 862, E : 703, 708, 714, 718, 721, 722, 727, 729—731), Preda Vasilica (1851, 874, 875 877, 882—884, 914, 915, 920, 924, 938, P).

FOCŞANI. Clasa VII-a. Pantelimon Marcela (E : 679, 681, 689, 693, 703, 707—709, 714, 721, 815) ; clasa VIII-a. Arghir George (1806, 816. 819, 821, 830. 831, 835—838, 842, 848, 849, 851, 852, 855, E : 693, 694, 696, 698, 703, 707, P), Dinulescu Horia (1844, 851, 867, 882, E : 676, 687, 689, 690, 695, 697, 701, 703, 706—709, 714, 718, 720, 722, 724—727, 729, 731, P) ; Rădescu Eugen (1830, 848, 851, 875, 884, E : 687, 708—710, 714—716, 718, 721, 722, 724, 727, 729—732, P), Vasiliu Veturia E : 659, 677, 690, 693, 695—700, 702—704, 706).

GĂEŞTI. Clasa VIII-a. Ixariu Liviu (1708. 718. 727. 729—733. 742, 848, 851, P).

GALAŢI. Clasa IX-a. Ariton Vasile (1705, 706, 709, 714, 715, 717, 719, 721, 724, 726, 728, 730, 734, 735, 737, 740, 744, 746, 749, 753, 754, 756, 760, 763, 766, 768, 776, 779, 800); clasa X-a. Gherasim Lucian (1819, 820, 822, 830, 837, 851, 866, 867, 881—884, P), *Grosu G. Florin* (1705, 707, 708, 711, 712, 716, 718, 829—849, 851—859, 861—864, 866—868, 871, 872), Neagu Ştefan (1747, 831, 835, 837, 844, 875—877, 881—883, 886, 891), Timofte Ioan (1820, 822, 829, 830, 835, 837, 838, 844, 851, 864, 878, 881—883).

GIURGIU. Clasa V-a. Stăncescu Olga (E: 709, 713, 715, 722, 724, 727, 729, 733, 735, 737, 738) ; Clasa VII-a. Stăncescu Virgil (E : 659, 690, 709, 713—715, 722, 724—727, 729—731, 733, 735, 737, 738, 742, 745, P) ; clasa VIII-a. Profirescu Marcel (1816, 838, 848, 851, 867, E : 687, 703, 708, 709, 718, 721, 722, 727, 729—731, 742), Vișinescu M. Mihai (E : 725—727, 729—733, 737, 738, 740, 742) ; clasa IX-a. Așenbrener Dumitru (1819, 830, 831, 838, 844, 848, 851, 866, 867, 817, 879, 882, 908, 913), Ianculescu I. Ovidiu (1838, 841, 844, 851, 866, 877, 882, 883, 890, 923, 925, 931, 940, 943), Mustățea Florin (1830, 844, 851, 866, 877, 882, 883, 908, 913, 940, 943), *Panaitopol Laurențiu* (1829, 836, 841, 846, 857, 859, 866, 872, 878, 879, 881, 885, 887, 891, 899, 900, 903, 907, 914, 915, 917, 919—925, 930, 931, 935, 937, 940—945, P), Petre Gheorghe (1830, 831, 838, 844, 848, 851, 866, 867, 877, 879, 882, 883, 890, 908, 913, 925, 940, 943) ; clasa X-a. Botoran I. Petre (1807—809, 812, 814, 818, 819, 824, 833, 835, 837, 844, 865, P), Sin Alexandru (1830, 831, 838, 841, 866, 875, 876, 878, 881, 882, 884, 894, 920, 940, P), *Stăncescu Emil* (1618, 819' 830, 831, 833—835, 837—839, 841, 842, 844, 845, 847, 848, 851, 860, 861, 866, 872, 874, 875, 877, 881—884, 886, 889, 891, 908, 913—915, 940, P), absolvent *Bigan Stan* (1862, 831—839, 841—844, 848—853, 855—857, 859—862, 865, 866, 872, 874—878, 880—884, 891, 892, 915, P),

(continuare în Nr. 6)

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— La exercițiile și problemele propuse pentru școala de 7 ani se primesc rezolvări de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a și a VIII-a, de la elevii anului I al școlilor tehnice de maiștri sau din anul I și II ai școlilor profesionale de pedagogie și învățători. Nu se iau în seamă soluțiile problemelor propuse pentru școala de 7 ani dacă sînt trimise de elevi ai *claselor a IX-a, a X-a, ai școlilor medii tehnice sau de studenți* și nici soluțiile trimise după trecerea a trei luni de la publicarea problemelor respective sau de la publicarea eratei, dacă a fost cazul.

În cazul unor probleme propuse care sînt mai greu de rezolvat sau de la care nu s-au primit soluții bune, termenul de trimitere a soluțiilor se poate prelungi. *Pînă la apariția G.M.F.-B nr. 6*, se mai primesc soluții la problemele : 1932, 1934, 1936, 1938, 1959, 1965, 1968, 1977, 1978, 1980, 1983, 1985, 1987, 1988, 1991, 1993, 1997, 2041, 2047, 2058, 2059, 2070, 2072, 2081, 2085, 2093, 2096, 2098, 2103, 2108 și următoarele ; iar de la elementar, la E :723, 724, 727, 730, 734, 744, 745, 746, 754, 755, 757, 760, 789, 795, 800 și următoarele.

Rezolvitorii de probleme sînt rugați să nu trimită plicuri cu mai puțin de 10 soluții ; iar trimiterea rezolvărilor și propunerilor să se facă numai odată în cursul aceleiași luni, așezînd problemele rezolvate în ordinea lor numerică așa cum vor fi apoi, anunțate la rubrica rezolvitorilor de probleme. Pe o parte a plicului se va scrie : localitatea, școala sau institutul, numele și adresa rezolvitorului ; iar pe cealaltă parte, adresa: « Gazeta Matematică și Fizică », seria B, strada Academiei nr. 14, București I.

Din problemele primite nu se anunță cele incomplect rezolvate, cele care conțin greșeli, cele neglijent redactate, cele care au greșeli de calcul, desene neglijent făcute, sau sînt copiate după altele.

De asemenea, nu se publică problemele propuse de către colaboratori, dacă ele sînt cunoscute sau nu sînt însoțite de soluția lor clar redactată.

— *Deoarece numărul abonaților se apropie de numărul de exemplare tipărite, iar tirajul rămînînd inferior numărului de 15.000 exemplare, G.M.F. seria B va apare la chioșcuri într-un număr foarte redus de exemplare și deaceea colaboratorii sînt astfel anunțați să se aboneze de îndată pentru a nu rămîne cu colecția necompletă.*

* * *

Pentru abonarea pe 6 luni, adică pentru numerele ce urmează: 7—12, se poate achita la Oficiul poștal local suma de 6 lei (prețul fiind 1 leu exemplarul).

Volumul VII • Nr. 5 (GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ SERIA B) mai 1956

C. 352. Întreprinderea Poligrafică Nr. 4 **Prețul Lei 1 exemplarul**

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
UBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár
BUDAPEST

Anul VII — iunie 1956

6

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VII, Nr. 6 — iunie 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *Rezultate ale olimpiadelor de matematică şi de fizică din anul 1956 de T. Roman* 281
2. *Lista celor distinşi la olimpiadele de matematică şi fizică, etapa finală (pe ţară)* 285
3. *Despre semiconductori şi aplicaţiile lor de Acad. Traian Gheorghiu* 288
4. *Ce este calculul probabilităţilor de G. Ciucu* . . . 294
5. *Despre activitatea cercurilor de matematică din şcoli de Ion Muşat* 305
6. *Caleidoscop matematic* 308
7. *Montaj pentru demonstrarea rezonanţei pendulelor, după I. P. Jèrebţov* 311
8. *Note matematice* 312
9. *Probleme rezolvate (1548; 1630; 1703; 1767; 1785; 1791; 1805; 1806; 1809; 1810; 1811, 1812; 1850; 1907; 1909; 1914; 1933; E: 647; E: 681; E: 689)* 313
10. *Chestiuni de examen (2215 — 2222)* 326
11. *Probleme propuse (2223—2245)* 327
12. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 819 — E: 835)* 330
13. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 331

ANUL VII 6 IUNIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

GAZETA
MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VII * Nr. 6 iunie 1956

REZULTATE ALE «OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1956»

De curînd a avut loc închiderea festivă a celei de-a VII-a olimpiade de matematică și de fizică pentru elevii școlilor medii, pedagogice, profesionale și tehnice.

Primul concurs de matematică pentru elevi a avut loc în anul 1902 prin evidențierea celor mai activi rezolvitori de probleme propuse în «Gazeta Matematică». În cele 37 concursuri anuale organizate între 1902 și 1948, «Gazeta Matematică» antrena anual între 14 și 39 elevi (cu excepția anilor 1934—1949 cînd numărul participanților s-a urcat pînă aproape la o sută). Cu toată această participare relativ redusă — cauzată de sprijinul foarte redus acordat de guvernele de pe atunci și de anume condiții restrictive (elev de liceu, abonament și colaborare asiduă la «Gazeta Matematică») — aceste concursuri au exercitat un rol pozitiv în stimularea învățămîntului matematicii.

Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. (SSMF), cu sprijinul larg al Ministerului Învățămîntului și al UTM-ului, a preluat tradiția pozitivă a acestor concursuri, lărgind într-o mare măsură participarea elevilor atît cu privire la număr cît și la diferitele tipuri de școli, extinzînd durata lor dealungul mai multor luni în cursul anului școlar, introducînd și a doua specialitate, fizica.

Pentru a putea urmări evoluția numerică a participării la olimpiadele din ultimii trei ani, dăm următoarele date:

În 1954, Olimpiada de matematică a cuprins aproape 7500 elevi din peste 70 localități la etapa locală; după etapa din cele 4 centre universitare olimpiada s-a încheiat la București cu participarea a 144 elevi din 40 localități.

În 1955, etapa locală a Olimpiadei de matematică și de fizică s-a desfășurat în 118 localități cu participarea a peste 16.000 elevi (din care peste 9800 la matematică). După etapa din cele 18 centre regionale — la care au participat aproape 3000 elevi (1700 la matematică) din 95 localități, — la București a avut loc etapa finală, cu participarea a 298 elevi din 51 localități.

În 1956 etapa locală a Olimpiadei de matematică și fizică s-a desfășurat în 140 localități la matematică și 128 la fizică, cu participarea a peste 16.600 elevi (din care peste 10.800 la matematică). După etapa din cele 16 centre regionale — la care au luat parte la matematică 1963 elevi din 126 localități, iar la fizică 1356 elevi din 108 localități — la etapa finală au participat 319 elevi, din care 152 la matematică, din 70 localități. Lărgirea sferei de acțiune a olimpiadelor a făcut ca în acest an să participe pentru prima dată elevi din regiunile: Cluj, Ploești, Timișoara, Autonomă Maghiară, Hunedoara.

Olimpiadele din acest an au însă și alte caracteristici.

Instrucțiunile SSMF au ajuns la cei interesați, înainte de începerea anului școlar 1955/56, așa că ele au putut fi discutate la consfătuirile raionale din august

1955 și acțiunile corespunzătoare au putut fi prevăzute în planurile anuale de muncă atît ale profesorilor de specialitate și ale cercurilor de elevi, cît și ale școlilor, filialelor SSMF și secțiilor de învățămînt ale sfaturilor populare.

SSMF a luat și alte măsuri în același sens. În GMF- seria B nr. *11/955 s-a publicat programa analitică a olimpiadelor, pe etape, indicînd și materia suplimentară față de programa școlară care se cere la etapa finală cît și la lucrările practice de fizică. Tot în GMF, în seria B, însă, se publică subiectele date la diferite etape ale olimpiadelor din anii precedenți, ca și din acest an, soluțiile lor și uneori chiar discuții mai ample asupra rezolvării unor probleme.*

Pregătirea generală a olimpiadelor s-a făcut în perioada cînd se sărbătoreau 60 de ani dela apariția primului număr al «Gazetei Matematice». Ministerul Învățămîntului cît și presa (Romînia Liberă, Scînteia Tineretului, Informația Bucureștiului, Gazeta Învățămîntului, Gazeta Matematică și Fizică, seria B, ca și unele ziare locale) au sprijinit aceste pregătiri prin instrucțiuni, informații, note, etc.

Pe plan local, filialele SSMF au folosit și alte mijloace de popularizare, la cercurile pedagogice, la consfătuirile cu directorii și șefii secțiilor de învățămînt, în gazetele de perete ale claselor — sau chiar în cea de matematică și fizică — la cercurile de elevi, s-a anunțat desfășurarea olimpiadelor, s-a solicitat concursul cadrelor didactice, au fost stimulați și îndrumați elevii să participe. Organizațiile UTM au sprijinit în multe locuri această acțiune. Munca în acest sens s-a accentuat însă, deabia în perioada olimpiadelor locale. Filialele Pitești și Deva au publicat rezultatele etapei regionale în ziarele locale, pentru a populariza în întreaga regiune elevii evidențiați și acțiunea însăși.

Subiectele date la toate etapele în afară de olimpiada școlii, au fost unice pe țară și considerate potrivite, în general, scopului urmărit. Aceasta a permis evitarea unor defecțiuni organizatorice, a asigurat criterii unitare de apreciere și a permis într-o mai mare măsură gradarea temelor date. Aceste subiecte se publică în numerele 4—7 ale GMF-B.

Descentralizarea fondurilor pentru nevoile etapei regionale și repartizarea unor sarcini și drepturi mai largi filialelor regionale ale SSMF au dus la dezvoltarea inițiativei și la găsirea unor posibilități locale variate. Astfel, spre deosebire de anul 1955 cînd s-au deplasat peste 800 elevi din 75 localități pentru a participa la etapa regională, în acest an s-au deplasat 1478 elevi din 110 localități. Un număr mai mare de profesori din aceste localități au fost antrenați în desfășurarea etapei locale și chiar a celei regionale. S-a asigurat în mai mare măsură disciplina și seriozitatea în desfășurarea probelor scrise ale olimpiadelor. La etapa regională s-au acordat premii la 393 de elevi și au fost menționați aproape 300 elevi (față de 600 elevi evidențiați anul trecut). La etapa finală s-au deplasat 220 elevi și aproape 50 profesori de specialitate.

Păstrarea aceleiași forme organizatorice (4 etape, care s-au desfășurat în jurul acelorași date), cu condiții analoage de admitere în etapele succesive a făcut să crească încrederea școlilor și autorităților locale. În general, olimpiadele de matematică și de fizică pentru elevii școlilor medii devin cu fiecare an mai mult, o tradiție sănătoasă a învățămîntului nostru, o dovadă în plus a asigurării realizării în practică a dreptului la învățătură, la știință, prevăzut în Constituția R.P.R.

În acest an pentru prima dată, au fost solicitați să participe la olimpiada de matematică și elevi ai școlilor profesionale, ca și ai școlilor tehnice de maiștri și tehnice de curînd înființate. Participarea elevilor acestor școli a fost însă, sub așteptări. Școli profesionale au fost antrenate în cele mai multe regiuni, însă

subiectele date au fost în general, mult deasupra cunoștințelor elevilor, așa că la etapa finală au participat doar 20 elevi din 7 localități. Doar cîteva școli tehnice de maiștri au participat în primele etape, iar în finală nu au ajuns decît elevii școlii tehnice de maiștri metalurgiști din București. Dela școlile tehnice nu a participat în finală, nici un elev. Este adevărat că în aceste școli nu se predă în mod special matematica. Dar cei ce le urmează sînt absolvenți de școli medii. Este de dorit ca în anii următori participarea elevilor școlilor profesionale, tehnice și tehnice de maiștri să fie mai numeroasă, să obțină rezultate mai îmbucurătoare și să se folosească și pentru elevii lor olimpiada de matematică și fizică, ca un stimulent la o pregătire mai temeinică.

În acest an, au participat la olimpiade în mai mare măsură și elevii școlilor serale pentru tineretul muncitoresc, deși nu proporțional cu numărul acestor școli. O greutate care s-a ivit a fost însă, decalarea programelor școlare față de aceea a școlilor de zi. Chestiunea rămîne să fie analizată.

După lucrarea scrisă eliminatorie, la etapa finală a olimpiadei 1956, a avut loc pentru prima oară și examinarea orală la matematică, respectiv, lucrări practice de laborator, la fizică. Comisiile de examen oral au fost formate astfel: la matematică: pentru clasa VIII, școli pedagogice, profesionale și tehnice de maiștri: tov. conf. univ. Gh. D. Simionescu, prof. Valentina Nanu (Pitești); I. Grigore (Ploești), D. Mazilu (Iași), M. Țîțăreanu; pentru clasa IX: tov. prof. univ. N.N. Mihăileanu (Timișoara), prof. C. Georgescu (Craiova), C. Ionescu-Țiu; pentru clasa X-a: tov. conf. univ. H. Ionescu -Bis, A. Șaichin, prof. Gabriela Pîslaru (Constanța).

La cele trei laboratoare unde s-au desfășurat lucrările practice și-au dat contribuția următorii: la laboratorul școlii medii de băieți nr. 1 «N. Bălcescu»: tov. prof. N. Rădulescu, V. Dragu (Constanța); la școala medie de fete nr. 15: tov. conf. univ. N. Stănescu, prof. Angela Negulescu, Mircea Gogan (Slobozia); la școala medie de băieți nr. 17: tov. prof. Simion Pamfil, prof. Țarălungă Mircea (Bacău).

La matematică s-au acordat 18 premii și 19 mențiuni, față de 28 premii și 15 mențiuni în 1955; iar la fizică 23 premii, 17 mențiuni și 19 evidențieri pentru lucrări de laborator, față de 25 premii și 11 mențiuni în 1955. Lista acestor elevi se publică în același număr al GMF-B. Ei aparțin școlilor de toate tipurile, din Capitală și toate regiunile țării (în afară de Hunedoara).

Atmosfera care a dominat în tot timpul olimpiadelor a fost în general, tovărășească, de apropiere între elevi și profesori, de seriozitate și sobrietate, permițînd o apreciere obiectivă și justă în selecționarea elevilor fruntași. Multe sute de profesori și-au dat contribuția dezinteresată și prețioasă la desfășurarea olimpiadelor acestui an și este necesar să li se aducă și pe această cale, calde mulțumiri. Este indicat ca filialele SSMF să propună secțiilor de învățămînt orășenești, și regionale evidențierea publică a profesorilor ai căror elevi au obținut cele mai bune rezultate, ca și a acelora care și-au dat concursul cel mai substanțial, în buna desfășurare a primelor etape.

Deplasările la etapa regională și cea finală au și un rol educativ puternic, permițînd cunoașterea orașelor și în special, a Capitalei, cunoașterea reciprocă a elevilor fruntași la matematică și la fizică, întrecerea tovărășească în condiții de egalitate, pentru a dovedi nivelul cel mai ridicat științific.

La etapa regională, unele filiale au organizat un program mai variat elevilor și profesorilor veniți din provincie. La Cluj s-au ținut 2 conferințe de către cadre didactice universitare, la Craiova a avut loc o consfătuire cu cititorii GMF — seria B, la olimpiada de fizică, etc.

La etapa finală, participanții au vizionat piesa de teatru «Nota zero la purtare», filmul «Cetatea științei», «Tinerețea lui Chopin», etc., au vizitat orașul, grădinile sale, unele instituții culturale, au participat la conferința tov. acad. Miron Nicolescu despre «Noțiunea de echivalență», care se va publica în GMF-seria B. De asemeni a avut loc discutarea temelor date la lucrarea scrisă la matematică și la fizică și o consfătuire cu cititorii GMF-seria B. Profesorii au participat la o consfătuire cu conducerea SSMF asupra planului de perspectivă al acesteia, făcînd o serie de propuneri, sugestii și critici utile activității de viitor.

Închiderea olimpiadei s-a făcut într-un cadru festiv, în ziua de 2 mai, într-un amfiteatru al Universității «C.I. Parhon». Au luat cuvîntul tov. acad. Gr. C. Moisil, președintele SSMF, tov. prof. I. Borca, Director general adjunct în Ministerul Învățămîntului, tov. D. Bejan, șeful secției școli medii din CC al UTM și premiantul Gh. Murărescu din clasa X-a a școlii medii de băieți din Roman, în numele elevilor participanți la olimpiadă. Vorbitorii au subliniat rolul deosebit al matematicii și fizicii în formarea tineretului, atenția pe care Partidul Muncitoresc Romîn și guvernul o acordă acestor discipline, unele perspective de dezvoltare științifică și educativă în acest sens și sarcinile ce revin tineretului, Ministerului Învățămîntului, UTM, SSMF.

Elevi și profesori participanți la etapa finală a olimpiadei au încheiat această acțiune printr-o masă tovărășească la restaurantul «Dorna».

În afara acestor laturi ale olimpiadelor 1956, trebuie semnalate și unele lipsuri și scăderi a căror evitare trebuie asigurată în viitor.

Datele diferitelor etape anunțate în august 1955, nu au putut fi respectate. În multe locuri olimpiada școlii s-a prelungit pînă în februarie. Etapa locală în loc să aibă loc în zilele de 19, respectiv 26 februarie a avut loc la 4 martie, din cauza vacanței școlare de primăvară care s-a dat cu anticipație. Aceasta a dus la desfășurarea olimpiadei de fizică în aceiași zi cu cea de matematică și la ținerea ambelor specialități la scurtă vreme după încetarea vacanței, care a contribuit la oarecare întrerupere a pregătirii elevilor. Olimpiada regională de fizică s-a ținut în ziua de sîmbătă 7 aprilie, cu o zi mai devreme, din cauza consfătuirilor raionale din 8 aprilie ale cadrelor didactice, pentru discutarea propunerilor Ministerului Învățămîntului, de îmbunătățire a învățămîntului de cultură generală. Aceste perturbări ale programului stabilit inițial, deși provocate de motive obiective vor trebui evitate pe viitor. Ele au provocat apoi, coincidență cu unele manifestări sportive sau culturale la care au fost antrenați elevi și profesori și astfel, greutăți în buna desfășurare a unora și a celorlalte.

Olimpiadei școlii continuă să nu i se acorde suficientă atenție. Ea a fost organizată în majoritatea cazurilor, sub formă de lucrare scrisă. Dar elevii și profesorii au și așa numeroase lucrări scrise la matematică în special, dar și la fizică. Se folosesc în foarte mică măsură acele forme variate și atrăgătoare ale activității extrașcolare care sînt recomandate în instrucțiunile SSMF (concurs prin corespondență al gazetei de perete, victorine școlare, serate de matematică și fizică, excursii cu program matematic și fizic, soluții variate pentru aceiași problemă, construcții de aparate cu mijloace proprii, lucrări practice de matematică și de fizică, etc.). Este indicat ca pentru olimpiadele viitoare să se acorde mai multă atenție și interes organizării olimpiadei școlii sub această formă. Această etapă poate constitui un stimulent nu numai participanților la etapele următoare dar și pentru întregul învățămînt al matematicii și fizicii în școală. Mai mult, astfel de acțiuni se pot desfășura și mai tîrziu în cursul anului școlar, de pildă paralel cu etapa regională sau finală.

În cursul olimpiadelor s-au semnalat și unele lipsuri ale temelor date: la etapa locală problema de fizică de clasa X-a avea o dată suplimentară, problemele de matematică pentru anul II al școlilor pedagogice cuprindeau doar materia anului I; la etapa regională problema de fizică pentru clasa VIII cuprindea și o chestiune prevăzută doar pentru etapa finală; la etapa finală s-a strecurat o greșală în scrierea unei expresii algebrice. Desigur că repetarea unor asemenea scăpări trebuie împiedicată pentru viitor. Asupra unor alte aspecte ale conținutului temelor există păreri contradictorii în diferite regiuni ale țării, deaceea considerăm că nu este cazul să modificăm linia actuală (de ex.: problemele de fizică sînt prea simple, dar în unele locuri nu se rezolvă decît parțial...; subiectele teoretice de fizică sînt prea vaste, dar... în multe locuri se obțin rezultatele cele mai bune astfel; unele subiecte de matematică necesită și calcul numeric efectiv și dau rezultate aproximative, ceeace nu ar fi «frumos» dar... aplicațiile în fizică și tehnică tocmai acest aspect îl au; alte subiecte de matematici cer o oarecare doză de abilitate sau subtilitate și astfel nu toți elevii reușesc să le rezolve dar... problemele tip și cele din manual nu sînt indicate pentru olimpiade etc., etc.)

Lipsurile cele mai regretabile și prevenirea cărora cere munca cea mai persistentă sînt cele ce privesc cunoștințele elevilor. Elevii clasei a VIII continuă să prezinte un nivel scăzut la matematică, întîmpină greutăți serioase de calcul algebric, în abordarea unei probleme de demonstrație în geometrie. La celelalte clase se semnalează greutăți în conducerea rațională a calculului algebric și trigonometric, în rezolvarea ecuațiilor trigonometrice și scrierea tuturor soluțiilor, în desprinderea clară a etapelor unui raționament de geometrie, în vederea clară a unei chestiuni în spațiu. Rezultate mai slabe s-au obținut în regiunile Constanța, autonomă maghiară, Timișoara, Galați, Iași și Baia Mare. La fizică, nivelul cunoștințelor teoretice se limitează de cele mai multe ori la manual, există unele greutăți în rezolvarea problemelor în care nu-i vorba doar de aplicarea directă a unei formule. Rezultate mai slabe s-au obținut în regiunile Suceava, Hunedoara, Constanța, Bacău.

Vom repeta o recomandare făcută în anii precedenți și care a fost puțin aplicată. Lucrările scrise ale etapei regionale constituie pentru filialele SSMF și pentru cabinetele pedagogice regionale un material util pentru o analiză a nivelului de pregătire a elevilor fruntași dintr-o serie de școli ale regiunii. Rezultatele acestei analize pot fi foarte importante pentru a trage concluzii utile învățămîntului matematicii și fizicii în anul școlar viitor.

Timpul acordat pentru corectarea lucrărilor la etapa regională este scurt. Există propunerea ca această etapă să dureze două zile evitîndu-se inconvenientele care decurg dintr-o corectare făcută într-un ritm grăbit, putîndu-se asigura astfel și cunoașterea mai bună a orașului reședință de regiune ca și participarea la o manifestare culturală; totodată s-ar putea organiza și un schimb de experiență mai larg între profesori de specialitate din regiune.

În general, filialele SSMF și secțiile de învățămînt au sprijinit olimpiadele. Pot fi evidențiate în acest sens: filiala Ploești pentru organizarea etapei locale și mai ales a celei regionale, pentru condițiile bune asigurate elevilor și profesorilor, pentru strînsa colaborare cu forurile locale; filialele Cluj, Bacău, Deva, Craiova pentru organizarea olimpiadei cu seriozitate și conștiinciozitate, ca și filialele București, Orașul Stalin, Tg. Mureș. Filiala Galați este în vădit progres.

În alte regiuni însă, s-au manifestat lipsuri deosebit de serioase: la Pitești și Suceava etapa regională nu a fost aproape deloc pregătită, luîndu-se măsuri

în dimineața zilei respective. Corectarea lucrărilor la Suceava s-a făcut cu mare întîrziere, comunicînd rezultatele la București în ultimul moment. La Baia Mare nu au fost asigurate condiții de cazare și masă pentru participanții la etapa regională de matematică. Din regiunea Oradea (unde mai există încă 3—4 centre școlare în afara orașului de reședință), nu s-a asigurat participarea niciunui elev la etapa regională. Filialele Constanța și Iași nu au antrenat în suficientă măsură participarea școlilor din regiune. Filiala Timișoara și Iași nu au privit cu destulă importanță informarea comisiei centrale de olimpiade asupra desfășurării olimpiadelor (etapa locală în special).

În general, s-au asigurat mijloacele necesare desfășurării etapelor locale și regionale cu concursul școlilor și secțiilor de învățămînt. Un prețios sprijin au dat și Universitățile din Iași (local, cadre didactice, premii), Cluj (local, cadre didactice, conferințe), București (local, cadre ajutătoare), Institutul agronomic Galați (local). Au existat însă, greutăți în asigurarea foilor de drum pentru deplasări (regiunea Stalin, Cluj, Suceava, Galați, nici nu au rezolvat încă în parte) și la asigurarea cazării (Baia Mare, Cluj) și mesei (Galați). Evident că astfel de greutăți vor trebui strict evitate în viitor prin grija organelor locale care au dispoziții în acest sens.

În concluzie, olimpiadele de matematică și fizică din acest an au lărgit sfera de acțiune, au dovedit interesul elevilor și profesorilor pentru această acțiune, entuziasmul tineretului pentru știință, s-au desfășurat în general, într-un mod mai bine organizat. Lipsurile semnalate trebuie evitate printr-o acțiune mai largă și printr-o organizare mai amănunțită ca și prin asigurarea sprijinului permanent al Ministerului Învățămîntului și al UTM.

T. Roman, Secretarul general al S.S.M.F.

LISTA CELOR DISTINȘI LA „OLIMPIADE" — ETAPA FINALĂ, PE ȚARĂ

(BUCUREȘTI 29 APRILIE — 2 MAI 1956)
„OLIMPIADA DE MATEMATICĂ"

PREMIUL I

Clasa VIII: *Angelescu Elena*, s. m. f. 22, București
Clasa IX : *Panaitopol Laurențiu*, s. m. b., Giurgiu
Clasa X : *Harnic Victor*, s. m. 17, București
Clasa X : *Murărescu Gheorghe*, s. m. b., Roman

PREMIUL II

Clasa VIII: *Constantinopol Alexandru*, s. m. 1, Ploești
Clasa VIII: *Stoian Mircea*, s. m. 1, Orașul Stalin
Clasa IX : *Iftimie Viorel*, s. m. b., Rădăuți
Clasa IX : *Baltag Vasile*, s. m. b., Ploești
Clasa X : *Bucur Gheorghe*, s. m. b., Pucioasa
Clasa X : *Puiu Tiberiu*, s. m. 20, București
Anul I : *Casian Ilie*, s. prof. mecano-navală, Giurgiu

PREMIUL III

Clasa VIII: *Ciochină Cornel*, s. m. 1, Constanța
Clasa IX : *Iancu Ovidiu*, s. m. b., Ianca-Galați
Clasa IX : *Dincă Nicolae*, s. m. b., Ploești.
Clasa X : *Popa Gheorghe* , s. m. 4, București
Clasa X : *Popovici Mihai*, s. m. 18, București
Clasa X : *Stoicescu Aurel*, s. m. serală, București
Anul I : *Ionașcu Stoian*, s. m. tehn. maiștri metalurgiști, București

MENȚIUNI

Clasa VIII : *Aniţescu Nicolae*, s. m. b. 2, Tîrgu-Jiu
Clasa VIII : *Baumstark Gertrude*, s. m. f. 2, Timişoara
Clasa IX : *Cantaragiu Gheorghe*, s. m. b. 17, Bucureşti
Clasa IX : *Cserveny Stefan*, s. m. b. 12, Bucureşti
Clasa IX : *Deutsch Herbert*, s. m. b., Rădăuţi
Clasa IX : *Dima Petre*, s. m. b. 12, Bucureşti
Clasa IX : *Filoti Ion*, s. m. 18, Bucureşti
Clasa IX : *Müller Richard*, s. m. b., Sibiu
Clasa IX : *Piso Pompiliu*, s. m. b., Tîrnăveni
Clasa IX : *Tibuleac Florin*, s. m. b., Iaşi
Clasa X : *Bărbuică Nicolae*, s. m. b. 1, Craiova
Clasa X : *Bogdan Mircea*, s. m. b., Ploeşti
Clasa X : *Chirică Andrei*, s. m. b., Ploeşti
Clasa X : *Damian Şerban*, s. m. b., Ploeşti
Clasa X : *Dogaru Viorica*, s. m. f. 21, Bucureşti
Clasa X : *Olteanu Remus*, s. m. b., Reşiţa
Clasa X : *Man Maria*, s. m., Baia Mare
Anul I : *Enache Marin*, şc. pedagogică, Timişoara
Anul IV : *Marinca Simion*, şc. pedagogică, Sighet

„OLIMPIADA DE FIZICĂ"

PREMIUL I

Clasa VIII : *Profirescu Marcel*, s. m. b., Giurgiu
Clasa VIII : *Stănescu Maria*, s. m. f. 15, Bucureşti
Clasa VIII : *Vişinescu Mihai*, s. m. b., Giurgiu
Clasa IX : *Căciularu Marcel* s. m, b. 11, Bucureşti
Clasa X : *Roitman Abraham*, s. m. b., Constanţa

PREMIUL II

Clasa VIII : *Cruceanu Nicolae*, s. m. b., Focşani
Clasa IX : *Bunda Gheorghe*, s. m. b., Oradea
Clasa IX : *Constantinescu Dan*, s. m. b. 7, Bucureşti
Clasa IX : *Damalan Maria*, s. m. f., Turnu Măgurele
Clasa X : *Flueraşu Cezar*, s. m. b. 13, Bucureşti
Clasa X : *Pavelescu Anca*, s. m. f. 15, Bucureşti
Clasa X : *Topor Olga*, s. m. f., Constanţa

PREMIUL III

Clasa VIII : *Oprişor Constanţa*, s. m. f. 17 seral, Bucureşti
Clasa VIII : *Şchiopulescu Dan*, s. m. b. 11, Bucureşti
Clasa IX : *Ceaptru Mihai*, s. m. b. 17, Bucureşti
Clasa IX : *Costinescu Anca*, s. m. f., Iaşi
Clasa IX : *Cozma Gheorghe*, s. m. b., Bacău
Clasa IX : *Cristea Paul*, s. m. b. 1, Bucureşti
Clasa IX : *Gavrilă Horia*, s. m. b. 3, Bucureşti
Clasa IX : *Vecsey Adalbert*, s. m. b., Oraşul Stalin
Clasa X : *Delcescu Rodica*, s. m. f. 15, Bucureşti
Clasa X : *Matei Ion*, s. m. b., Piteşti
Clasa X : *Şerbănescu Dan*, s. m. b., Turnu Severin

MENȚIUNI

Clasa VIII : *Cocoloş Ortansa*, s. m. f. 22, Bucureşti
Clasa VIII : *Ettinger Rudolf*, s. m. b. 17, Bucureşti
Clasa VIII : *Isbăşescu Mihai*, s. m. b. 1, Bucureşti
Clasa VIII : *Vrăjitoru Mihai*, s. m. b., Aiud
Clasa IX : *Ciobănaş Filaret*, s. m. b., Rîmnicul Sărat
Clasa IX : *Pop Andrei*, s. m. b. I7, Bucureşti
Clasa IX : *Sofron Gavril*, s. m. b., Piteşti
Clasa IX : *Spinei Fănică*, s. m., Roman

Clasa X : *Basarab Şerban*, s. m. b.1, Bucureşti
Clasa X : *Brînduş Lucian*, s. m. b., Oraşul Stalin
Clasa X : *Bărglăzan Mircea*, s. m. b., Timişoara
Clasa X : *Colonatti C.*, s. m. b., Cîmpina
Clasa X : *Dragomir Cristian*, s. m. b., Bîrlad
Clasa X : *Milea Aurelian*, s. m. b. 17, seral, Bucureşti
Clasa X : *Păun Dan*, s. m. b., Slobozia
Clasa X : *Sarion I. Virgil*, s. m. b., Rîmnicul Vîlcea
Clasa X : *Trandafir Magdalena*, s. m. f. 15, Bucureşti

CITAŢI PENTRU LUCRĂRI DE LABORATOR

Clasa VIII: *Nagy Ianoş*, s. m. b., Oradea
Clasa VIII: *Popescu Manuela*, s. m. f. 22, Bucureşti
Clasa VIII: *Ţiţaru Ioan*, s. m. b., Bacău
Clasa VIII: *Vintilă Ioana*, s. m. m. 8, Bucureşti
Clasa IX : *Ancuţoiu Gh.*, s. m. b., Rîmnicu Vîlcea
Clasa IX : *Bartalis Ianoş*, s. m. b., Tîrgu Secuesc
Clasa IX : *Coja Marilena*, s. m. f., Constanţa
Clasa IX : *Gălăţuşe Stelian*, s. m., b., Turnu Severin
Clasa IX : *Popa Mircea*, s m. b. 1, Bucureşti
Clasa X : *Ciobanca Doina*, s. m. f., Cluj
Clasa X : *Dragomir Georgeta*, s. m. f. 15, Bucureşti
Clasa X : *Ouatu Teodor*, s. m. b., Iaşi
Clasa X : *Vasiliu Monica*: s. m. f., Bacău

DESPRE SEMICONDUCTORI ŞI APLICAŢIILE LOR

(Conferinţa de la Leningrad)

TRAIAN GHEORGHIU

prof. univ., membru al Academiei R.P.R.

ÎNTRE 14—20 noiembrie 1955, a avut loc la Leningrad conferinţa despre semiconductori. Am luat parte la această conferinţă în calitate de delegat al Academiei R.P.R., în urma invitaţiei făcute de Academia de Ştiinţe din U.R.S.S.

La conferinţă au luat parte patru sute de delegaţi din U.R.S.S. şi şase delegaţi din ţările de democraţie populară: R. Rompe (R. D. Germană), Z. Gyulai (R. P. Ungară), Sosnowski (R. P. Polonă), Ian Tanc (Republica Cehoslovacă), Acad. Siu-Su-Iun (Republica Populară Chineză), Gheorghiu D. Traian (R. P. Romînă).

Academicianul A. F. Joffe, iniţiatorul şi conducătorul conferinţei, a invitat în prezidiul conferinţei pe toţi delegaţii străini, care s-au bucurat în tot decursul conferinţei de o deosebită atenţie.

Conferinţele au avut loc în sălile Academiei de Ştiinţe de pe Splaiul Universităţii. Participarea a fost enormă şi interesul arătat peste toate aşteptările. Şedinţa plenară de luni 14 noiembrie, ora 17, a fost deschisă de academicianul A. F. Joffe. Mai întîi au fost expuse comunicările cu caracter general (Joffe, Pekar, Anselm, iar a doua zi de dimineaţă: W ul, Sosnovski, Laşkarev, Rojunski şi Wolkenstein. Academicianul A. F. Joffe a condus lucrările cu măiestrie şi permanentă bună dispoziţie, care s-a transmis tuturor participanţilor. După comunicările cu caracter general, participanţii s-au împărţit pe secţii şi astfel s-au desfăşurat lucrările pînă la încheierea sesiunii.

Au fost prezentate 180 de comunicări. Miercuri 16 noiembrie, după amiază, în şedinţa prezidată de tov. Calacinikov, profesor la Universitatea «M. V.

Lomonosov » din Moscova, am comunicat lucrarea efectuată de colectivul pe care-l conduc la Institutul de Fizică al Academiei R.P.R.: A. Nicolau, M. Bădănoiu, F. Bădulescu, intitulată « Despre obținerea siliciului pur în vederea cercetărilor cu privire la proprietățile sale de semiconductor » precum și produsul obținut de colectiv. Acest produs a fost examinat cu tot interesul științific, în special de către cercetătorii acestei probleme de la Universitatea « Lomonosov », printre care și un aspirant sovietic.

Au fost examinate apoi, probleme foarte variate legate de proprietățile semiconductorilor: teoria semiconductorilor, proprietățile electrice, magnetice, optice și efectul fotoelectric, fenomene termice și termoelectrice. Un interes deosebit au stîrnit proprietățile feritelor. Au fost prezentate apoi, diferite dispozitive și metode de măsurat. Au fost examinate și probleme din alte domenii — de exemplu, cataliza — comportînd cunoașterea semiconductorilor. Din cauza spațiului restrîns, sau mai curînd a numărului mare de participanți, precum și din cauza timpului scurt al sesiunii — abia o săptămînă — lucrările au fost împărțite pe secții și s-au efectuat în săli diferite.

În cele ce urmează, voi expune unele noțiuni despre semiconductori, aplicațiile și importanța lor, încadrîndu-le în realizările văzute și auzite la conferință.

Ce sînt semiconductorii și ce justifică interesul oamenilor de știință pentru aceste substanțe?

Interesul imens se explică prin faptul că deși sînt încă în studiu, semiconductorii au găsit numeroase aplicații pe cît de folositoare pe atît de neașteptate. Astfel, din aceste substanțe se execută contacte care în anumite condiții lasă să treacă curentul într-un singur sens, fiind influențate de cîmpul electric, de temperatură, de lumină, de cantități foarte mici de subtanțe străine în cuprinsul lor. În general, semiconductorii sînt foarte sensibili la schimbarea condițiilor externe sau interne. De aceea ei servesc ca organe în dispozitive de automatizare, ca transformatoare de energie radiantă în energie electrică, ca dispozitive în care se poate ridica sau coborî temperatura prin trecerea unui curent, folosind efectul Peltier, etc., etc.

Numeroase aplicații ale semiconductorilor au fost expuse în anticamera marii săli de conferințe. Astfel am văzut contacte cu semiconductori capabile să redreseze curenți de sute de amperi, înlocuind așadar, redresorii cu vapori de mercur sau grupurile convertizoare rotative care, ca și lămpile cu mercur, ocupă loc mult, necesită îngrijire deosebită, se strică adesea. Aceste dispozitive se întrebuințează deja la trenurile electrice, care au nevoie de curent continuu. Acesta se obține chiar în tren din curent alternativ, prin semiconductori. Contactele au dimensiuni mici, nu se încălzesc, nu implică o îngrijire deosebită, nu se strică, deci au numai avantaje. Dispuse convenabil, aceste contacte pot înlocui tuburile electronice, funcționînd ca diode, tetrode, pentode, în foarte multe dispozitive care folosesc tuburile. O mașină de calculat, care folosește mii de tuburi electronice se încălzește tare și are dimensiunile unui dulap sau chiar ale unei camere, poate fi redusă la mărimea unui geamantan și chiar mai mult, dacă în loc de tuburi se folosesc semiconductori. Feritele, care au proprietăți magnetice superioare celor ale fierului, însă nu și defectele acestuia,servesc la obținerea undelor electromagnetice scurte și ultrascurte.

Proprietățile fotoelectrice ale semiconductorilor vor permite în curînd, utilizarea energiei solare pentru obținerea energiei electrice, fără mașini electrice. Acoperișul casei prevăzut cu semiconductori va putea transforma energia solară

primită în electricitate necesară pentru uzul casei. În chimie, înțelegerea fenomenelor de cataliză va aduce realizări importante de care biologia și medicina vor beneficia în curînd.

Studiul fenomenului de semiconducție deschide pentru fizică o epocă de înflorire care va fi cel puțin tot atît de bogată în realizări cum a fost epoca ce a urmat după descoperirea radioactivității. Aceasta a permis cunoașterea atomilor, — semiconductorii ne vor învăța cum sînt așezați atomii și electronii în corpuri, cum sînt legați între ei, ce libertăți au, ce mișcări pot face, cum putem comanda aceste mișcări, cum le putem folosi.

Am văzut expusă o baterie de semiconductori ale cărei contacte erau încălzite de o lampă obișnuită de petrol și care dădea un curent electric capabil să pună în funcțiune un aparat de radio.

Și la noi se fac cercetări în acest sens (de către tov. Iarca, din colectivul de cercetări de la I.F.A.); ele sînt pe cale să reușească.

Am văzut un răcitor cu semiconductori, care cobora temperatura la 0°C, consumînd energie electrică abia cît un bec de 25 W. În comparație cu un răcitor cu motor de aceiași capacitate, consumul se reduce aproape la o treime.

Trebuie să subliniez faptul că în Uniunea Sovietică se lucrează intens în toate domeniile, nu numai în acela al semiconductorilor. În nenumăratele laboratoare pe care le-am vizitat la Leningrad și la Moscova, am remarcat o activitate vie a cercetătorilor entuziaști și dornici de a obține realizări utile, dispuși oricînd să comunice și altora, rezultatele cercetărilor lor. Am stat de vorbă cu mulți cercetători și profesori academicieni asupra diferitelor probleme studiate în Uniunea Sovietică și dintre care unele sînt studiate și la noi. Ei au fost foarte mulțumiți aflînd că lucrările lor, cărțile lor, sînt atît de cunoscute, consultate și prețuite la noi.

Ne-am întrebat ce sînt semiconductorii și am enumerat aplicațiile lor fără a arăta cum explică știința proprietățile acestor substanțe. Dece în anumite condiții, ele lasă să treacă curentul într-un sens mai bine, decît în sensul contrar, dece sînt influențate de lumină, de căldură, de adaosuri de substanțe străine, dece unele dintre ele au proprietăți magnetice remarcabile, ș.a.m.d. Vom arăta pe scurt, cum se explică aceste proprietăți. Toate au fost pe larg dezbătute la conferința de la Leningrad.

Unii cercetători afirmă că semiconductorii nu sînt nici conductori, nici izolanți, ci substanțe care lasă să treacă curentul electric mai puțin decît conductorii și mai mult decît izolanții. Această definiție nu explică însă, proprietățile enumerate ale semiconductorilor, deoarece un conductor, chiar dacă este mai puțin bun conductor, lasă să treacă curentul în ambele sensuri. Există însă, o definiție mai explicită: semiconductorii sînt substanțe în care unii electroni sînt liberi, iar alții legați. *In conductorii perfecți electronii sînt liberi* și se pot mișca atunci cînd se află într-un cîmp electric. *In izolatorii perfecți nu există electroni liberi*, ci numai electroni legați de atomi. Ei nu se pot mișca sub influiența unui cîmp electric. Intre aceste două feluri de substanță cu proprietăți extreme, care există numai teoretic, se cuprind substanțele reale, dintre care unele mai mult sau mai puțin conductoare, altele mai mult sau mai puțin izolante. *La unele substanțe izolante*, cînd sînt încălzite pînă *la temperaturi înalte*, apare conducția electrică. In acest caz, cîțiva electroni legați au fost rupți din orbitele lor și se mișcă în interiorul corpului: izolantul a devenit un *semiconductor intrinsec. La alte substanțe izolante conducția poate să apară la temperatura normală în anumite condiții*; și aceste substanțe pot fi considerate ca semiconductori. Pînă acum, se

cunosc două feluri de semiconductori: cei ionici, în care curentul este produs de mişcarea ionilor — cum este clorura de sodiu — şi cei electronici, în care curentul este produs de mişcarea electronilor. Conductibilitatea electrică a semiconductorilor este cuprinsă în limite foarte largi, putînd varia între 100 şi 10^{-8} unităţi. Ea depinde foarte mult de temperatură. Rezistivitatea substanţelor pure care constituie reţeaua cristalină a unui semiconductor este în general foarte ridicată. *O astfel de substanţă pură nu se comportă ca un semiconductor decît la temperaturi înalte sau cînd se află sub acţiunea unei radiaţii de frecvenţă foarte înaltă.*

În ce priveşte *proprietăţile de semiconductor pe care le are aceiaşi substanţă la temperatură normală,* ele *se datoresc prezenţei în reţeaua lor cristalină a unor elemente străine, numite impurităţi.*

Pentru a exemplifica cele expuse, ne vom referi la elementul germaniu (deoarece germaniul a găsit foarte multe aplicaţii şi despre el s-a vorbit mult la conferinţă). Atomul de germaniu se compune dintr-un nucleu pozitiv foarte dens, înconjurat de 32 electroni care se mişcă pe patru orbite eliptice. Pe prima orbită sînt 2, pe a doua 8, pe a treia 18, iar pe a patra, cea exterioară, 4. Aceştia sînt electronii de valenţă care determină comportarea chimică faţă de alţi corpi. Pentru a părăsi orbita sa, un astfel de electron are nevoie de o energie suplimentară în afară de aceea pe care o posedă. Primind această energie el intră într-o zonă de energie în care se poate mişca liber în interiorul cristalului. La corpurile pure această eliberare necesită o energie suplimentară importantă, de aceea electronul rămîne pe orbita sa pentru energii mai mici; corpul este izolant.

Dacă în acest corp pur se introduce o impuritate, energia suplimentară necesară pentru eliberarea electronului scade şi acesta se poate elibera: corpul devine conductor. Dacă atomul impuritate are cinci electroni de valenţă, patru se leagă de atomii germaniului, iar al cincilea se poate mişca liber chiar la temperatură ordinară, sub acţiunea unui cîmp electric. Astfel de atomi impuritate sînt numiţi *donori.* Dacă atomul impuritate ar avea numai trei electroni de valenţă, ar rămîne liberă o valenţă a atomului de germaniu, iar un electron al unui atom vecin ar ocupa această valenţă lăsînd un gol în atomul părăsit. Acest gol va fi ocupat printr-un proces analog, de un electron al altui atom vecin, şi aşa mai departe; din aproape în aproape, golurile se vor produce succesiv în sensul opus mişcării electronilor. Procesul se produce sub acţiunea cîmpului electric; golul pare aşadar, a se propaga, deşi se produc mereu altele. Atomii sau alte impurităţi care determină formarea acestor goluri, se numesc *acceptori.* Golurile pot fi considerate imagini pozitive ale electronului; fiecare gol este echivalent unei sarcini electrice elementare pozitive. Conducţia electrică se poate efectua prin două procese diferite; unul sau altul din aceste procese predomină. Cînd electricitatea este condusă într-o substanţă mai mult prin goluri (imagini pozitive), acea substanţă este un semiconductor de tip P, adică pozitiv. Cînd electricitatea este condusă mai mult prin electroni semiconductorul este de tip N, adică negativ. Cînd două regiuni P şi N se află în atingere, se obţine o legătură de tip P-N; de exemplu, germaniul cu arsen ca impuritate; germaniul cu antimoniu ca impuritate; siliciul cu fosfor ca impuritate sînt semiconductori de tip N. Germaniul cu aluminiu ca impuritate, sau cu galiu ca impuritate, siliciul cu bor ca impuritate sînt semiconductori de tip P.

Dacă prin joncţiunea N-P legăm polul negativ al unei pile de blocul N, iar polul pozitiv al pilei de blocul P, curentul trece prin sistemul N-P. Dimpotrivă, dacă inversăm legăturile, curentul nu mai trece. Avem aşadar, un filtru sau

o supapă care nu lasă să treacă curentul decît în sensul în care electronii din N şi golurile din P se apropie unele de altele, electronii fiind respinşi de polul negativ al pilei, iar golurile de polul ei pozitiv. Pe acest principiu au fost realizate diode prin joncţiunea P-N cu suprafeţe mari de contact. În aceste diode intensitatea curentului poate atinge 25 A în suprasarcină, cu o tensiune inversă de 380 V. O astfel de diodă are un randament de 99 %, pe cînd randamentul unei valve nu poate depăşi 80 %, chiar dacă este folosită în cele mai bune condiţii. Am văzut la conferinţa de la Leningrad, asemenea contacte care lasă să treacă curenţi de 400 A sub o tensiune de 1000 V.

Folosind aceste proprietăţi ale contactelor N-P se pot obţine sisteme cu proprietăţile tuburilor electronice. Astfel, un sistem P-N-P sau N-P-N se numeşte *transistor* şi poate înlocui un tub electronic. Primul electrod este *emiţătorul*, al doilea central, este *baza*, iar al treilea este *colectorul*. Dacă colectorul triodei P-N-P este negativ faţă de bază, trece un curent slab cît timp nu conectăm emiţătorul. Dar dacă acesta este pozitiv faţă de bază, se naşte un curent emiţător care măreşte curentul colectorului. Dioda formată din colector şi bază, *fiind străbătută de curent în sens invers, opune o impedanţă mare*, în timp ce dioda emiţător şi bază, *fiind străbătută direct, are impedanţă mică*. Aşadar, *curentul din circuitul cu impedanţă mare al colectorului poate fi controlat de un curent apropiat ca valoare, dar care trece prin circuitul cu impedanţă mică al emiţătorului. Avem cîştig de putere şi efect de amplificare.* Acest exemplu este suficient pentru a arăta marele rol pe care îl vor avea în viitor asemenea sisteme, ieftine, mici şi rezistente. Deocamdată, obţinerea monocristalelor din care sînt construite ele, este încă o operaţie grea şi îndelungată. Trebuie să subliniem şi faptul că transistorii actuali funcţionează bine numai la frecvenţe joase.

Semiconductorii deschid perspective largi fizicii şi tehnicii, de aceea studiul lor trebuie să se generalizeze şi să se dezvolte mult. Aceasta a şi fost concluzia redactată de conferinţă, după cum se va vedea mai jos. Să reţinem că semiconductorii sînt corpuri care prezintă în grade diferite, un ansamblu de proprietăţi fizice particulare. Să nu uităm că putem după voie, să schimbăm tipul unui semiconductor din N în P sau invers, prin injectarea unor corpuri străine adecvate, în foarte mică cantitate (în foarte mici proporţii), numite agenţi de contaminare. Să reţinem de asemenea, că un gol şi un electron se pot recombina pentru a reface o legătură interatomică completă, dar că această recombinare nu este instantanee. Un gol introdus într-un semiconductor de tip N poate să subsiste de la cîteva microsecunde pînă la cîteva milisecunde. Aşadar, se poate schimba temporar concentraţia purtătorilor de sarcină prin introducerea unui purtător de sarcină opusă şi astfel se pot obţine efecte de semiconducţie diferite.

Semiconductorii sînt o puternică armă nouă a tehnicii. Pentru a fi folosită în practică această armă trebuie să fie bine cunoscută.

La conferinţă au fost examinate şi proprietăţile termice şi fotoelectrice ale semiconductorilor, dîndu-se o foarte mare importanţă acestei probleme. În semiconductori ca grafitul, siliciul, germaniul, în combinaţiile chimice şi în diferite minereuri şi minerale, electronii fiind slab legaţi, pot fi eliberaţi chiar prin ciocnirile determinate de agitaţia termică. Se eliberează cu atît mai mulţi electroni cu cît temperatura este ridicată, deoarece substanţa lasă, în acest caz, să treacă curentul mai bine. Electronii se eliberează de asemenea, sub influenţa luminii şi a radiaţiilor radioactive. Sensibilitatea semiconductorilor la influenţe externe a permis folosirea lor în cele mai diferite aparate de măsurat. Contactele dintre semiconductori constituie termoelemente. Am menţionat

mai sus că au fost realizate frigidere cu o capacitate mai mare decît a acelora cu gaze sau cu motoare, însă cu un consum mai mic de jumătate. Pentru o bună utilizare a acestor preţioase substanţe (semiconductori) şi pentru obţinerea unor aparate utile şi ieftine este necesară colaborarea dintre fizicieni şi practicieni (ingineri, tehnicieni, lucrători specializaţi, etc). În tehnica semiconductorilor colaborarea dintre fizică şi tehnică este absolut indispensabilă; de exemplu, confecţionarea diodelor şi triodelor cristaline implică o muncă precisă şi complexă: de o plăcuţă minusculă de germaniu se sudează o granulă de indiu de care se leagă bucăţele foarte subţiri de sîrmă. Aceasta se leagă la distanţe determinate, de sîrme mai groase care ies afară din tubuşorul în care este fixat întreg ansamblul descris. Multe operaţii se execută sub lupă, în vid sau într-o atmosferă de azot şi sub control electric continuu. Acest exemplu arată cîmpul de muncă care se deschide pentru specialiştii tehnicieni.

Toate ştiinţele contribuie la dezvoltarea tehnicii semiconductorilor. De exemplu, chimia asigură purificarea materialelor semiconductoare. Trebuie găsite metode simple care să asigure o purificare suficientă. Multă vreme chimiştii nici nu au bănuit că au a face cu semiconductori, *cu procese electronice în semiconductori*. Actualmente este un fapt dovedit că aceste procese *au un mare rol în fenomenele de cataliză*. Chimiştii vor putea găsi noi catalizatori care să dirijeze reacţiile chimice. Semiconductorii intervin şi în foto-sinteză. Trebuie descoperită în toate amănuntele, *legea acţiunii reciproce între lumină şi combinaţiile organice;* multe din *aceste combinaţii sînt semiconductori* în care lumina determină procese electrice. Academicianul A. Terenin, luminînd semiconductori coloraţi pulverulenţi, a reuşit să obţină procese care seamănă cu *prima etapă a foto-sintezei*. Un cîmp vast se deschide şi în faţa biologiei, fiziologiei şi medicinii. Tînăra ştiinţă a semiconductorilor se dezvoltă rapid şi stîrneşte un interes deosebit.

Toată lumea trebuie să cunoască importanţa utilizării semiconductorilor în dispozitivele de automatizare, atît de necesare şi care sînt pe cale de a se generaliza, eliberînd pe om de multe sarcini grele, care vor trece asupra maşinilor.

La conferinţă s-au discutat problemele cele mai importante, cele mai urgente: despre lipsurile teoriei semiconductorilor, despre greşelile şi omisiunile experimentatorilor, despre ceea ce trebuie făcut în viitorul apropiat.

Academicianul A. F. Joffe a subliniat la încheierea conferinţei, că posibilităţile legate de folosirea semiconductorilor sînt foarte promiţătoare şi variate, că aceste posibilităţi trebuie folosite nu într-un viitor mai mult sau mai puţin apropiat, ci cît mai repede, iar munca trebuie dusă nu răsleţ, ci în front larg.

Conferinţa a hotărît să se intervină la autorităţile de stat pentru introducerea studiului semiconductorilor în toate universităţile şi institutele superioare, pentru crearea catedrelor şi laboratoarelor de semiconductori. Pentru fizică se deschide un vast cîmp de muncă şi de descoperiri care vor mări avuţia ştiinţifică a omului şi vor da tehnicii şi economiei instrumente noi de putere şi de randament neîntîlnite. După cum afirmă W. Shockley, o mare autoritate în domeniul semiconductorilor, adesea citat la conferinţa de la Leningrad: «*Fizica semiconductorilor este ramura cea mai întinsă a fizicii moderne*». Iar Nesmeianov, preşedintele Academiei de Ştiinţe din U.R.S.S. declară că «semiconductorii şi nucleul atomic sînt cele două probleme precumpănitoare ale actualităţii».

Datoria noastră este să urmăm hotărîrile conferinţei de la Leningrad, care se integrează în directivele congresului al II-lea al P.M.R., să introducem în învăţămînt şi în institutele de cercetări studiul acestor minunate substanţe, să luptăm pentru îmbunătăţirea mijloacelor de lucru şi stimularea colabora-

torilor la colectivele existente, care contribuie la dezvoltarea acestor cercetări. Acad. A. F. Joffe, vorbind despre profilarea institutelor, a insistat asupra libertății de a se cerceta aceiași problemă în mai multe locuri. Acest lucru este cu atît mai necesar în țara noastră unde există foarte puțini fizicieni și este mare nevoie de cadre noi. Problemele cercetării semiconductorilor incumbă munca asiduă atît a experimentatorilor cît și a teoreticienilor, sau mai bine zis, a experimentatorilor teoreticieni și a teoreticienilor experimentatori. Progresul științific este rezultatul activității experimentale luminată de teorie și invers. Un institut superior nu poate trăi dacă nu face cercetări experimentale, adică nu duce o activitate practică bazată pe o vedere teoretică și legată de realități.

Trebuie să preconizăm dezvoltarea fizicii în toate ramurile sale. Trebuie să folosim la maxim mijloacele și forțele existente și să creăm măsuri pentru înființarea cît mai urgentă a numeroase și perfecționate mijloace de lucru. De asemenea în acest scop, *trebuie organizată și intensificată colaborarea dintre fizicieni.*

În vederea atingerii acestor obiective, vom pune în slujba Patriei, bogăția de cunoștințe aduse din Uniunea Sovietică, marea noastră prietenă și îndrumătoare; vom intensifica lucrările de cercetare pentru a prezenta comunicări de valoare la următoarea conferință în legătură cu semiconductorii, care va avea loc la Moscova, peste doi ani.

CE ESTE CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

G. CIUCU

1. INTRODUCERE. Teoria probabilităților este o ramură a matematicii, de o deosebită importanță pentru studiul științelor naturii și al științelor tehnice, științe cu care păstrează un contact permanent, dînd acestora metode noi de cercetare.

Calculul probabilităților se ocupă cu studiul fenomenelor de masă și urmărește să stabilească legile matematice ale acestor fenomene. Dezvoltarea teoriei probabilităților a fost mult frînată de interpretările idealiste date noțiunii de probabilitate, creind divergențe serioase în ceea ce privește conținutul noțiunilor de bază ale teoriei probabilităților. Numai datorită concepției materialiste, școala rusă și sovietică a transformat teoria probabilităților într-un instrument puternic de cunoaștere. Probabiliștii ruși și sovietici au avut un rol hotărîtor în dezvoltarea, fundamentarea și sistematizarea noțiunilor de bază ale Calculului probabilităților.

Ca orice știință și teoria probabilităților este legată de necesitățile practice, de fenomenele naturii, de problemele fizicii și tehnicii.

Articolul de față își propune drept scop de a prezenta cîteva noțiuni de bază ale calculului probabilităților, noțiuni care este bine să fie studiate și adîncite eventual în cadrul cercurilor de matematică ale elevilor, întrucît aceste noțiuni sînt necesare în toate științele bazate pe observații.

2. *Noțiunea de probabilitate.* Să presupunem că la o întreprindere se fabrică în serie rulmenți. Condițiile de fabricare le considerăm invariabile, adică organizarea procesului tehnologic, materia primă, utilajul, calificarea și experiența muncitorilor sînt aceleași. În aceste condiții date să presupunem că în medie, 1,4% din rulmenți fabricați sînt necorespunzători cu indicațiile tehnologice.

Aceasta înseamnă că dintr-un lot format din 1000 de rulmenți vom avea un rebut de 14 rulmenți. Numărul rulmenților rebut poate fi mai mare sau mai mic, însă în medie va fi apropiat de 14. Dacă am împărți producția de rulmenți în grupe de cîte 1000 de rulmenți, numărul rebuturilor va fi în fiecare grupă apropiat de 14.

Putem afirma că *probabilitatea* de a găsi un rulment rebut, pentru întreprinderea de mai sus, este de 1,4% sau 0,014 sau $\frac{14}{1000}$. Pentru determinarea probabilității am ținut seamă de condițiile determinate în care se desfășoară producția în serie a rulmenților. Dacă am modifica condițiile date, am schimba de exemplu utilajul sau materia primă sau calificarea muncitorilor, vom obține o altă probabilitate de a găsi un rulment rebut.

Fie A un eveniment care în n operațiuni se realizează de m ori. Vom spune că probabilitatea evenimentului A, și o vom nota cu $P(A)$, este $\frac{m}{n}$, deci este raportul dintre numărul mediu de rezultate favorabile observate și numărul total al observațiilor posibile. Vom scrie:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Se mai observă următoarele:

a) Probabilitatea unui eveniment este un număr pozitiv sau zero. Deoarece $m \leqslant n$ probabilitatea nu poate fi mai mare ca 1. Pentru orice eveniment A, avem:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

b) Dacă $P(A)$ ia valori cît mai apropiate de 1, atunci putem spune că evenimentul A se realizează cu atît mai mult. Dacă $P(A) = 1$ evenimentul A se realizează cu siguranță. Acest eveniment îl vom nota cu I și-l vom numi eveniment sigur.

c) Dacă $P(A)$ ia valori aproape de zero, evenimentul A se realizează foarte rar. Dacă $P(A) = 0$ evenimentul A nu are loc. În acest caz spunem că evenimentul A este imposibil și-l vom nota cu O.

Exemple.

a) Să presupunem că într-o urnă sînt 90 de bile numerotate de la 1 la 90. Să determinăm care este probabilitatea ca extrăgînd 5 bile din urnă, printre acestea să se găsească 1, 2 sau 3 numere date.

Numărul cazurilor posibile, dacă nu ne interesează ordinea extragerii, este egal cu:

$$\alpha = C_{90}^{5} = \frac{90!}{5!\,85!}.$$

Pe de altă parte, numărul cazurilor favorabile, în cazul în care dorim ca printre cele 5 numere să avem *un* număr dat, este:

$$\beta = C_{89}^{4} = \frac{89!}{4!\,85!}.$$

Deci probabilitatea va fi:

$$P_1 = \frac{\beta}{\alpha} = C_{89}^{4} : C_{90}^{5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} = 0{,}055.$$

Probabilitatea ca printre cele 5 numere să avem două sau trei numere date va fi în mod analog:

$$P_2 = C_{88}^3 : C_{90}^5 = \frac{4 \cdot 5}{89 \cdot 90} = 0{,}0025,$$

$$P_3 = C_{87}^2 : C_{90}^5 = \frac{1}{11\,748} = 0{,}000085.$$

b) Să determinăm probabilitatea producerii unui eveniment biologic. De exemplu, să aflăm probabilitatea ca un copil născut să fie de sex masculin. Astfel, în 1937 s-au născut în țara noastră:

309 083 băieți și

292 219 fete.

Probabilitatea ca un copil să fie de sex masculin este:

$$P = \frac{309\,083}{601\,302} = 0{,}514,$$

iar probabilitatea ca un copil născut să fie de sex feminin este:

$$q = \frac{292\,219}{601\,302} = 0{,}486.$$

c) Să presupunem că într-un atelier de asamblare se primesc piese de la 3 mașini automate, care însă nu lucrează cu aceeași precizie. Prima mașină automată dă 0,8% rebut, a doua 0,6%, iar a treia 0,7%. Prima mașină trimite în atelierul de asamblare 2 000 piese, a doua 3 500 piese, iar a treia 3 000 piese.

Să calculăm probabilitatea de a intra în atelier a unui rebut.

Să aflăm mai întîi numărul total de piese intrate:

$$N = 2\,000 + 3500 + 3000 = 8500.$$

Din ele sînt rebut:

$$m = 16 + 21 + 21 = 58.$$

Deci probabilitatea căutată este:

$$p = \frac{n}{m} = \frac{58}{8500}.$$

3. *Regula de adunare a probabilităților.* Două evenimente A și B spunem că sînt incompatibile între ele, dacă nu pot avea loc în aceiași operație individuală. Faptul că evenimentele sînt sau nu incompatibile este foarte important, deoarece aplicarea regulei de adunare a probabilităților, pe care o vom da mai jos, fără a ține seama de incompatibilitatea evenimentelor, ne poate duce la rezultate absurde. Să examinăm mai întîi următorul exemplu:

Un călător dintr-un punct oarecare, are două mijloace de deplasare: cu tramvaiul sau cu autobuzul, și poate aștepta cinci minute. Să presupunem că probabilitatea de a sosi mai întîi autobuzul este $\frac{1}{3}$, iar aceea ca să sosească mai întîi tramvaiul este $\frac{1}{2}$. Atunci probabilitatea de a se folosi de un mijloc

sau altul este evident egală cu: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Putem da deci, următoarea regulă:

Probabilitatea ca într-o operaţie oarecare să se producă un eveniment oarecare dintre evenimentele A şi B este egală cu suma probabilităţilor acestor evenimente, dacă evenimentele sînt incompatibile. Fie A şi B două evenimente incompatibile. Să notăm cu $P(A)$ probabilitatea evenimentului A şi cu $P(B)$ probabilitatea evenimentului B, iar cu $P(A$ sau $B)$ probabilitatea ca să se producă sau evenimentul A sau evenimentul B. Avem:

$$P(A \text{ sau } B) = P(A) + P(B).$$

Acest rezultat poate fi generalizat pentru n evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ incompatibile două cîte două.

Teoremă: *Dacă probabilitatea evenimentului A este p, atunci probabilitatea evenimentului opus $\overline{A}$, este $1 - p$.*

Fie A un eveniment oarecare, iar $\overline{A}$ evenimentul opus lui A, adică evenimentul care constă în nerealizarea lui A.

Conform regulii de adunare a probabilităţilor avem:

$$P(A \text{ sau } \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Însă evenimentul «A sau $\overline{A}$» este evenimentul I (evenimentul sigur) şi cum $P(I) = 1$ urmează că:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

şi deci:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Dacă notăm $P(A) = p$ şi $P(\overline{A}) = q$, obţinem:

$$q = 1 - p.$$

4. *Probabilitatea condiţionată.* Fie A şi B două evenimente. Vom da o definiţie a probabilităţii condiţionate a evenimentului A în raport cu evenimentul B, astfel încît această probabilitate să ne dea o indicaţie cantitativă privind apariţia evenimentului A, atunci cînd ştim că evenimentul B s-a realizat. Vom nota această probabilitate condiţionată prin $P_B(A)$.

Să examinăm un exemplu dat de B. V. Gnedenco şi Hincin, în «*Introducere elementară în Calculul Probabilităţilor*».

Să presupunem că două fabrici produc becuri electrice, care se vînd într-un magazin şi anume, prima furnizează 70%, iar a doua 30%. Dintr-o sută de becuri produse de prima fabrică numai 83 sînt conform standardului, iar dintr-o 100 de becuri produse de cea de-a doua fabrică: 63.

Să calculăm mai întîi probabilitatea de a cumpăra un bec standard. Avem:

$$0{,}83 \cdot 70 + 0{,}63 \cdot 30 = 77.$$

Probabilitatea căutată este deci $\frac{77}{100} = 0{,}77$. Dacă presupunem că toate becurile aflate în magazin sînt produse de prima fabrică, atunci probabilitatea de a cumpăra un bec conform standardului este:

$$\frac{83}{100} = 0{,}83.$$

Să notăm prin A evenimentul care constă în cumpărarea unui bec conform standardului; prin B evenimentul care constă în furnizarea becului de prima fabrică. Probabilitatea necondiționată a evenimentului A o vom nota prin $P(A)$, iar probabilitatea producerii evenimentului A cu condiția ca să se fi produs evenimentul B, cu $P_B(A)$. Avem:

$$P(A) = 0{,}77 \quad ; \quad P_B(A) = 0{,}83.$$

Să calculăm acum probabilitatea ca becul să fie fabricat de cea de-a doua fabrică. Dintr-o mie de becuri puse în vînzare știm că 770 sînt de calitate conform standardului. Însă pentru fiecare 1000 de becuri 700 sînt fabricate de prima fabrică, iar 300 de cea de-a doua. La fiecare 100 becuri produse de prima fabrică 83 sînt bune. Atunci din 700 becuri furnizate de prima fabrică $700 \cdot 0{,}83 = 581$ becuri au calitate standard. Celelalte 189 becuri standard sînt produse de cea de-a doua fabrică. Dacă notăm cu $\overline{B}$ evenimentul contrar lui B avem:

$$P(\overline{B}) = \frac{300}{1000} = 0{,}3 \quad ; \quad P_A(\overline{B}) = \frac{189}{770}.$$

Probabilitatea evenimentului A condiționat de $\overline{B}$ va fi atunci:

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{189}{300}.$$

Acum putem calcula probabilitatea ca să se producă atît evenimentul A cît și evenimentul $\overline{B}$. Să notăm această probabilitate prin $P(A \text{ și } \overline{B})$. Știm că din 1000 becuri 189 sînt furnizate de cea de-a doua fabrică și sînt de calitate standard. Avem deci:

$$P(A \text{ și } \overline{B}) = \frac{189}{1000} = \frac{300}{1000} \cdot \frac{189}{300} = P(\overline{B})\, P_{\overline{B}}(A).$$

Aceasta este regula de înmulțire a probabilităților.

Vom defini probabilitatea condiționată prin egalitatea:

$$P(A \text{ și } B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (i)$$

Această egalitate se poate stabili ușor. Să presupunem că în n operații evenimentul B se produce de m ori, iar în m operații în care s-a produs evenimentul B, evenimentul A se produce de l ori. În n operații producerea simultană a evenimentului B și A se va obține de l ori. Avem:

$$P(B) = \frac{m}{n} \quad ; \quad P_B(A) = \frac{l}{m}$$

și

$$P(A \text{ și } B) = \frac{l}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m} = P(B) \cdot P_B(A).$$

Egalitatea (i) se mai poate scrie și astfel:

$$P(A \text{ și } B) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (\gamma)$$

Comparînd egalităţile (i) şi (γ) deducem următoarea egalitate:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

sau

$$P_A(B) = \frac{P(B) P_B(A)}{P(A)}.$$

Această ultimă egalitate este aşa numita formulă a lui Bayes, care ne permite să calculăm probabilitatea condiţionată $P_A(B)$ cînd cunoaştem probabilitatea condiţiontă $P_B(A)$.

Dacă luăm ca definiţie a probabilităţii condiţionate egalitatea (γ) şi dacă realizarea evenimentului A nu schimbă cu nimic probabilitatea condiţionată a evenimentului B, vom spune că cele două evenimente sînt independente. Conform relaţiei (γ) evenimentele A şi B sînt independente dacă şi numai dacă:

$$P(A \text{ şi } B) = P(A) \cdot P(B).$$

5. *Valori medii.* Numim variabilă aleatoare (întîmplătoare) o mărime care poate să ia diferite valori în operaţii diferite, oricît de omogene ar fi condiţiile pe care le-am realiza. Valorile diferite sînt legate de deosebiri întîmplătoare, deosebiri care scapă controlului nostru. Problema cea mai importantă constă în determinarea probabilităţilor diferitelor valori posibile ale variabilei aleatoare ce ne interesează.

Să considerăm o mărime X care poate să ia valorile:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

cu probabilităţile respective:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

cu condiţia ca:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Expresia:

$$M(X^r) = p_1 x_1^r + p_2 x_2^r + \ldots + p_n x_n^r$$

este o valoare medie a variabilei X, care mai poartă numele şi de moment de ordinul r. Această ultimă denumire a fost luată din mecanică, deoarece dacă $r = 2$, atunci $M(X^2)$ ne dă momentul de inerţie al forţelor considerate. Uneori e mai comod să scriem:

$$M_r = \sqrt[r]{M(X^r)} = \sqrt[r]{p_1 x_1^r + p_2 x_2^r + \ldots p_n x_n^r}.$$

M_r se numeşte valoare medie de ordinul r. În particular pentru $r = 1$ obţinem valoarea medie $M(X)$ sau speranţa matematică sau momentul de ordinul 1 sau media aritmetică a variabilei X. Deci:

$$M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Valoarea medie a variabilei aleatoare X este suma produselor dintre valorile susceptibile de a le lua variabila X şi probabilităţile respective. Pentru $r = -1$ obţinem:

$$M_1 = \left(\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \ldots + \frac{p_n}{x_n} \right)^{-1}.$$

Această medie poartă numele de medie armonică. Pentru $r = 0$ obținem media geometrică:

$$M_0 = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}.$$

Un alt caz de întîlnit în practică este cazul în care $r = 2$, deci media de ordinul al doilea:

$$M_2 = \sqrt{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2}.$$

Mediile amintite mai sus sînt cele mai des întîlnite în aplicații.

Am văzut mai sus cum se calculează valoarea medie a unei variabile aleatoare. Uneori însă este mult mai ușor să se calculeze valorile medii, a sumei sau produsului unor variabile aleatoare, prin alte metode. Pentru aceasta vom da două teoreme referitoare la valoarea medie a sumei și a produsului. Pentru simplificare ne vom mărgini la două variabile aleatoare X și Y. Presupunem că X ia valorile:

$$x_1, x_2, \dots, x_h$$

cu probabilitățile:

$$p_1, p_2, \dots, p_h.$$

Iar variabila Y ia valorile:

$$y_1, y_2, \dots, y_k$$

cu probabilitățile corespunzătoare:

$$q_1, q_2, \dots, q_k.$$

Să considerăm un eveniment care constă în faptul că X ia valoarea x_i și Y valoarea y_j; fie p_{ij} probabilitatea acestui eveniment. Perechea (X, Y) poate lua valorile:

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_h, y_k)$$

cu probabilitățile:

$$p_{11}, p_{12} \dots p_{1k}, p_{21}, p_{22}, \dots, p_{hk}.$$

Evenimentele X și Y sînt independente și deci:

$$p_{\alpha\beta} = p_\alpha q_\beta \qquad \begin{pmatrix} \text{unde } \alpha = 1, 2, \dots, h \\ \beta = 1, 2, \dots, k \end{pmatrix}.$$

În general între probabilitățile de mai sus există următoarele relații:

$$p_{\alpha 1} + p_{\alpha 2} + \dots + p_{\alpha k} = p_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, h),$$

$$p_{1\beta} + p_{2\beta} + \dots + p_{h\beta} = q_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \dots k)$$

și deci:

$$\sum p_{\alpha\beta} = p_1 + p_2 + \dots + p_h = q_1 + q_2 + \dots + q_k = 1.$$

Teoremă: *valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii*:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Prin definiție avem:

$$M(X+Y) = p_{11}(x_1+y_1) + \dots + p_{1k}(x_1+y_k) + \dots + p_{h1}(x_h+y_1) \dots + p_{hk}(x_h+y_k) =$$
$$= x_1(p_{11}+\dots+p_{1k}) + \dots + x_h(p_{h1}+\dots+p_{hk}) + y_1(p_{11}+\dots+p_{h1}) + \dots$$
$$+ \dots + y_k(p_{k1}+\dots+p_{kh}).$$

Conform relațiilor de mai sus: $p_{11}+\ldots+p_{1k}=p_1$ etc., obținem:

$$M(X+Y)=p_1x_1+\ldots+p_hx_h+q_1y_1+\ldots q_ky_k=M(X)+M(Y)$$

și deci teorema este demonstrată.

În mod analog se demonstrează și următoarea:

Teoremă: *Valoarea medie a produsului variabilelor independente este egală cu produsul valorilor medii.*

Să mai arătăm că:

$$M_2 \geqslant M_1.$$

Pentru aceasta să scriem identitatea lui Lagrange:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2.$$

Să notăm:

$$a_i=\sqrt{p_i}\ ,\quad b_i=\sqrt{p_i}\,x_i \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Înlocuind în identitatea lui Lagrange obținem:

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^2=\sum_{i,j=1}^{n}p_ip_j(x_i-x_j)^2.$$

Ținînd seama că $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ avem:

$$M(X^2)-[M(X)]^2=\sum_{i,j=1}^{n}p_ip_j(x_i-x_j)^2.$$

Însă $\sum p_ip_j(x_i-x_j)^2$ este pozitivă în afară de cazul cînd $x_1=x_2=\ldots=x_n$ și deci

$$M_2^2-M_1^2>0.$$

De unde rezultă inegalitatea de mai sus.

Momentele de diferite ordine se aplică în statistica matematică. Dacă ni se dau primele $2n$ momente, $M_0, M_1, \ldots, M_{2n-1}$, se poate determina în mod unic $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cît și probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Aceasta este așa numita problemă a momentelor care a fost studiată și rezolvată complet de Cebîșev.

Abateri. Valorile medii sînt insuficiente pentru a caracteriza o variabilă aleatoare. În practică este foarte important să cunoaștem abaterea valorilor unei variabile aleatoare, față de valoarea sa medie. Valori caracteristice importante vor fi date și de momentele acestor abateri.

Fie X o variabilă aleatoare care ia valorile:

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

cu probabilitățile:

$$p_1, p_2, \ldots, p_k.$$

Valoarea medie a acestei variabile este dată de expresia:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+p_kx_k=\sum_{i=1}^{k}x_ip_i.$$

Să notăm pentru simplificarea scrierii $M(X) = m$. Diferențele $x_1 - m$, $x_2 - m, \ldots, x_k - m$ se numesc abateri.

Teoremă. *Valoarea medie a abaterilor este egală cu zero.*

Într-adevăr avem:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(x_i - m) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=1}^{k} p_i m = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i - m \sum_{i=1}^{k} p_i = m - m = 0.$$

Această teoremă este des folosită în practică, deoarece întotdeauna putem să ne aranjăm în așa fel încît valoarea medie a unei variabile aleatoare să fie nulă.

Valoarea medie de ordinul doi a variabilei $X - m$ se numește valoarea medie patratică și se notează cu μ. Deci:

$$\mu = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} p_i(x_i - m)^2}$$

sau efectuînd calculele:

$$\mu = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^{k} p_i x_i + m^2 \sum_{i=1}^{k} p_i}.$$

Însă știind că:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = M(X); \quad \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 = M(X^2),$$

obținem:

$$\mu = \sqrt{M(X^2) - [M(X)]^2}.$$

Dacă se ia acum μ ca unitate de măsură pentru abateri, adică avem:

$$x_i' = \frac{x_i - m}{\mu},$$

obținem tot niște abateri, care se numesc *abateri reduse.*

Se observă ușor că valoarea medie a variabilei reduse este egală cu zero, iar valoarea medie de ordinul doi este egală cu 1. Într-adevăr:

$$M\left(\frac{x_i - m}{\mu}\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(\frac{x_i - m}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\sum_{i=1}^{k} p_i x_i - \sum_{i=1}^{k} p_i m\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu}[\sum p_i x_i - m \sum p_i] = 0.$$

Iar:

$$M\left[\left(\frac{x_i - m}{\mu}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(\frac{x_i - m}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}[\sum p_i x_i^2 - 2m \sum p_i x_i + m^2 \sum p_i] =$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\{M(X^2) - [M(X)]^2\} = 1,$$

deoarece:

$$M(X^2) - [M(X)]^2 = \mu^2.$$

6. Ca o aplicație a noțiunilor de mai sus, vom demonstra o teoremă, datorită lui Cebîșev. Să considerăm o variabilă aleatoare a cărei valoare medie este zero. Valoarea medie patratică este dată de:

$$\mu^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 .$$

Dintre valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pe care le ia variabila X să presupunem că

$$|x_1| < |x_2| < \ldots < |x_s| < L,$$

unde L este un număr pozitiv, iar celelalte valori $|x_i| \geqslant L$ (unde $i = s+1$, $s+2, \ldots n$).

În expresia care ne dă valoarea medie patratică să înlocuim primele s valori prin zero, iar celelalte valori $|x_{s+1}|, \ldots |x_n|$ prin numărul L. Evident că vom obține o valoare mai mică decît cea inițială. Avem:

$$\mu^2 \geqslant (p_{s+1} + p_{s+2} + \ldots + p_n) L^2.$$

Deoarece:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

rezultă că:

$$\sum_{i=s+1}^{n} p_i = 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i$$

și deci:

$$\mu^2 \geqslant \left(1 - \sum_{i=1}^{s} p_i\right) L^2$$

sau:

$$\frac{\mu^2}{L^2} \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i .$$

Această inegalitate poate fi scrisă și sub forma:

$$\sum_{i=1}^{s} p_i \geqslant 1 - \frac{\mu^2}{L^2} .$$

Însă $\sum_{i=1}^{s} p_i$ este tocmai probabilitatea ca să obținem pentru X o abatere mai mică decît L. Să notăm această probabilitate cu P_L. Avem:

$$P_L \geqslant 1 - \frac{\mu^2}{L^2} .$$

Să considerăm ca etalon de măsură al abaterilor, valoarea medie patratică și să notăm $L = t\mu$. Obținem:

$$P_{t\mu} \geqslant 1 - \frac{1}{t^2},$$

ceea ce înseamnă că probabilitatea ca o valoare a variabilei aleatoare să fie conținută în intervalul $(-t\mu, t\mu)$, unde t e un număr oarecare, este mai mare decît $1 - \frac{1}{t^2}$.

Această teoremă este cunoscută sub numele de inegalitatea lui Cebîşev.

Ca aplicaţie, să considerăm următorul exemplu. Să presupunem că avem un lot de piei. În conformitate cu regula lui Cebîşev, dat fiind un număr suficient de mare de loturi de piei, probabilitatea ca alungirea lor medie să se deosebească foarte puţin de alungirea medie a tuturor pieilor tuturor loturilor, tinde către unitate.

Fie de exemplu $\mu^2 = 0{,}25$.

Să evaluăm probabilitatea ca abaterea alungirii medii a pieilor, faţă de alungirea medie a tuturor pieilor din loturi, să nu depăşească 1,5 mm. Deci $L = 1{,}5$ mm.

Însă am notat $L = t\mu$ de unde rezultă că:

$$t^2 = \frac{L^2}{\mu^2} = \frac{2{,}25}{0{,}25} = 9$$

şi deci probabilitatea căutată conform inegalităţii lui Cebîşev este:

$$P > 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Deci cu o probablitate egală cu $\frac{8}{9}$ abaterea alungirii medii a pieilor faţă de alungirea medie a tuturor pieilor din loturi, nu va depăşi 1,5 mm. Altfel spus, probabilitatea ca alungirea pieilor să fie conţinută în intervalul $(-t\mu, t\mu)$ este mai mare decît $\frac{8}{9}$.

7. La dezvoltarea teoriei probabilităţilor în secolul al XVI au contribuit încercărilor unor matematicieni de a da o teorie a jocurilor de noroc. Tartaglia, Cardan, Galileu, Pascal, Fermat s-au ocupat de asemenea probleme. În secolul al XVIII-lea Bernoulli a găsit un rezultat esenţial numit «legea numerelor mari». Această lege ne arată că dacă variabilele $x_1, x_2, \ldots$ sînt independente, iar abaterile medii patratice rămîn toate mai mici decît un număr pozitiv, atunci pentru un număr de variabile suficient de mare, media lor aritmetică va avea, cu o probabilitate apropiată de unitate, abateri oricît de mici în valoare absolută. Această teoremă a servit ca punct de plecare pentru o serie de teoreme, numite teoreme de limită şi care au fost studiate de: Laplace, Poisson, Cebîşev, A. Marcov, etc. în secolul XVIII şi XIX.

La începutul secolului al XIX, Laplace şi Gauss au aplicat teoria probabilităţilor la teoria erorilor.

A. A. Marcov a introdus o noţiune nouă, aceea de lanţ de evenimente aleatoare, care are o importanţă deosebită în cercetarea poblemelor ştiinţelor naturii şi ştiinţelor tehnice.

Dintre orientările actuale ale teoriei probabilităţilor amintim:

a) Cercetările esenţei logice a teoriei probabilităţilor, urmărindu-se fundamentarea acestei teorii. Savanţii sovietici Bernstein şi A. N. Colmogorov au dat o definiţie axiomatică a teoriei probabilităţilor.

Semnalăm faptul că definiţia dată în acest articol este criticabilă din mai multe puncte de vedere şi anume: am presupus că evenimentele sînt egal probabile, ceea ce este aproape imposibil de realizat şi de asemeni, probabilitatea nu mai are nici un sens cînd numărul cazurilor posibile creşte la infinit. Pentru clarificarea acestei probleme recomandăm citirea articolului prof. Gh.

Mihoc din G.M.F. seria A unde este expusă definiţia noţiunii de probabilitate.

b) Adîncirea legii numerelor mari, la care au contribuit S. N. Bernstein, A. N. Colmogorov, B. V. Gnedenco, A. S. Hincin, cît şi probabilişti din alte ţări ca Borel, Cantelli, Levi, Fréchet, Feller, Loève.

c) Teoria proceselor stochastice, problemă pusă de cerinţele fizicii moderne în care se studiază procese aleatorii care depind de timp cît şi de valorile numerice pe care le ia variabila aleatoare. Această teorie are aplicaţii în teoria difuziei, mişcării browniene, în problemele de turbulenţă, etc.

d) Cercetările din domeniul statisticii matematice, mai ales aplicarea metodelor statisticii matematice în industrie, în tehnică. Primele încercări au fost făcute de savantul rus M. V. Ostrogradschi (1846) care a publicat o lucrare legată de controlul calitativ al producţiei.

Aplicarea metodelor calculului probabilităţilor şi statisticii matematice în industrie duce la perfecţionarea tehnică a proceselor de fabricaţie şi a folosirii utilajului, la reducerea preţului de cost, la creşterea productivităţii muncii.

Probabiliştii din ţara noastră, prof. O. Onicescu, prof. Gh. Mihoc, prof. C. T. Ionescu Tulcea, au adus contribuţii importante în teoria probabilităţilor. Au studiat lanţurile Marcov cu un număr finit de stări, au rezolvat complet comportarea asimptotică a sumelor de variabile aleatoare înlănţuite, au introdus o nouă schemă a lanţurilor cu legături complete, au dezvoltat cercetările din domeniul mecanicii discontinue, studiind procesele ramificate, etc.

Şcoala romînească de Calculul probabilităţilor, deşi tînără, s-a impus în lumea întreagă prin cercetările sale, aducînd o reală contribuţie la fundamentarea şi dezvoltarea teoriei probabilităţilor.

BIBLIOGRAFIE

O. Onicescu: *Calculul Probabilităţilor şi Statistică Matematică* (Curs litografiat).

O. Onicescu şi Gh. Mihoc: *Calculul Probabilităţilor.*

G. P. Boev: *Elemente de teoria probabilităţilor în şcoală.*

Gh. Mihoc: *Elemente de Calculul Probabilităţilor.*

G. Castelnuovo: *Calcolo delle probabilita.*

B. V. Gnedenco şi A. I. Hincin: *Introducere elementară în Calculul Probabilităţilor.*

A. M. Dlin: *Statistica matematică în tehnică.*

DESPRE ACTIVITATEA CERCURILOR DE MATEMATICĂ DIN ŞCOLI

ION MUŞAT

Directorul şcoalei de 7 ani, Chitila

ÎN faţa poporului nostru stau astăzi sarcini de mare importanţă pentru dezvoltarea continuă a economiei naţionale, în scopul ridicării nivelului material şi cultural al poporului muncitor, sarcini ce decurg din Directivele Congresului al II-lea al Partidului Muncitoresc Romîn.

Din analiza pe care Congresul a făcut-o asupra activităţii în domeniul învăţămîntului reies, pe lîngă unele succese remarcabile, şi o serie de lipsuri a căror lichidare imediată este sarcina actuală a învăţămîntului. Congresul a arătat că nivelul de cunoştinţe al multor elevi este scăzut, mai cu seamă la matematică şi fizică.

Mulţi absolvenţi ai clasei a VII-a se prezintă la examentul de admitere în clasa VIII-a cu lipsuri mari în cunoştinţele lor de matematici. La examenele de admitere în institute şi facultăţi, mulţi candidaţi dovedesc o slabă pregătire la matematică şi la fizică. Aceste rezultate se datoresc faptului că în şcolile noastre nu se folosesc la maximum, toate formele de activitate în clasă şi în afara ei, şi nici nu se caută a se îmbina aceste activităţi.

Una din formele de activitate din afara clasei, este activitatea cercurilor de matematică din şcoli. Deşi în ultimii ani activitatea în aceste cercuri s-a îmbunătăţit, totuşi ea nu ne mulţumeşte încă. În multe şcoli asemenea cercuri nu există sau dacă există nu sînt activizate suficient. Nici organizaţiile U.T.M. din unele şcoli, nu sprijină destul organizarea acestor cercuri.

Importanţa activităţii din cercuri constă în aceea că ea contribuie la dezvoltarea la elevi, a interesului pentru matematică, le lărgeşte orizontul ştiinţific şi îi obişnuieşte cu studiul individual.

Cercurile pe clase sau pe grupe de clase se creiază cu elevii animaţi de acelaşi interes: adîncirea cunoştinţelor dobîndite la lecţii. Ele trebuie astfel organizate încît să satisfacă cerinţele elevilor. Este bine ca la aceste cercuri să fie admişi şi elevi cu lipsuri în cunoştinţele lor, dar care au capacitatea să şi le împlinească.

Aşa a procedat tov. profesor I. Grigore, de la şcoala medie de băieţi nr. 1, Ploeşti, cu grupa elevilor din actualele clase a X-a, la începutul activităţii, adică în clasa VIII-a (în anul şcolar 1953—54). Vorbind despre acest lucru într-o scrisoare trimisă redacţiei noastre, tov. profesor spune: « ...erau puţini, atunci. Am început să lucrez cu elevii cărora le-am descoperit mai multe posibilităţi decît cunoştinţe. Nici unul nu lucrase înainte de asta, la matematică, ceva în plus peste activitatea din clasă ».

În orice caz, în privinţa recrutării elevilor şi a alegerii formelor de organizare, nu se pot da şabloane. Fiecare profesor conducător de cerc caută să găsească cele mai potrivite mijloace pentru a apropia pe elevi de cerc. Ca formă organizatorică, fiecare cerc trebuie să-şi aleagă forma proprie cea mai potrivită, pentru a-şi putea duce viaţa cu adevărat, ţinînd seama de specificul şcolii, de posibilităţile existente şi de condiţiile muncii.

Sugestii şi îndrumări în privinţa aceasta, se pot da totuşi. Revista noastră a publicat în legătură cu aceasta, următoarele articole:

— Din experienţa cercurilor de matematici ale elevilor claselor I—VII din şcoala sovietică, publicat în nr. 9/1954;

— Despre cercurile de matematică şi fizică din şcoli — articol redacţional apărut în nr. 12/1954;

— Din experienţa cercului de matematică şi fizică al elevilor din Capitală — articol apărut în nr. 2/1955.

Din aceste materiale se pot culege multe lucruri interesante. În cele ce urmează vom arăta pe scurt, unele aspecte din munca cercului de matematici al claselor a X-a de la şcoala medie de băieţi nr. 1 din Ploeşti. Este bine să se ştie de la început, că întrecerea între cercurile de matematică şi fizică din şcolile medii din ţară, pe anul 1953, a fost cîştigată de şcoala medie de băieţi nr. 1 din Ploeşti.

Aşa cum am arătat mai sus, activitatea acestei grupe (grupa claselor a X-a), a început acum doi ani, în cadrul grupei claselor a VIII-a de atunci, cu elevii ce dovedeau unele posibilităţi.

În primul an, specificul muncii a fost determinat de necesitatea îmbunătăţirii calculului. De aceea s-a pus accentul pe rezolvări de exerciţii. Tematica

şedinţelor cercului — care se ţin bilunar — a fost completată cu teme suplimentare prezentate de profesor, ca: metode pentru descompunerea polinoamelor în factori, metoda coeficienţilor nedeterminaţi — cu aplicaţii, schimbarea bazei sistemului de numeraţie, ecuaţii reciproce, transformarea expresiilor $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. La geometrie s-au rezolvat probleme din materia clasei a VIII-a şi s-au adus completări ca: teorema lui Stewart, teorema lui Ptolomeu, etc. Activitatea aceasta a avut şi merite, dar şi o mare lacună: nu s-a lucrat destul la geometrie din materia claselor a VI—VII-a, materia de bază a geometriei. Acest lucru a ieşit în evidenţă la Olimpiada Matematică din 1954. Paralel cu aceasta, elevii au început să lucreze la G.M.F. (B).

În al doilea an, învăţînd din greşelile primului an, elevii au hotărît să depună un efort mai mare şi să dea geometriei elementare atenţia cuvenită. S-a hotărît ca o şedinţă să dureze două ore, iar şedinţele să se ţină săptămînal. Prin fixarea şedinţelor săptămînale, nu numai că s-a dublat timpul de lucru, dar şedinţele au devenit tradiţionale. Participarea la şedinţă a fost cam de 40—45 elevi; ele s-au ţinut cu regularitate chiar în condiţii uneori grele. S-au rezolvat probleme de geometrie, algebră, trigonometrie, din culegerile de probleme şi din revistă. Ca teme teoretice s-au prezentat de către profesor sau elevi, următoarele: divizibilitatea numerelor, locuri geometrice, construcţii grafice, în ce constă greşala (articole din G.M.F.-B). S-au tratat de asemenea, teme scoase din programă: înscrierea decagonului şi petagonului, suma patratelor numerelor naturale, etc. Ca unele completări aduse materiei din programă s-au tratat: definiţia geometrică a parabolei, metode de a demonstra colinearitatea a trei puncte (inclusiv teorema lui Menelaus), metoda de a demonstra concurenţa a trei drepte (inclusiv teorema lui Ceva), unghiul a două cercuri. Ca « alte teme »: numerele lui Fibonacci, funcţii homografice, maxime şi minime ale unei funcţii. Elevii au mai prezentat sub formă de referate, diferite articole din G.M.F.(B). Pentru unele lămuriri suplimentare de care elevii aveau nevoie, tov profesor I. Grigore a fixat săptămînal o oră de consultare. Datorită unei mai bune organizări a muncii în cadrul cercului, faţă de anul precedent şi rezultatele muncii au fost mai bune: astfel, responsabilul cercului a fost evidenţiat la Olimpiada Matematică 1955, iar întrecerea pe ţară între cercuri a fost cîştigată tot de acest cerc.

În al treilea an (1955-56) activitatea a început la 12 septembrie şi continuă în mod obişnuit. Şedinţa din 19 septembrie a fost o şedinţă festivă dedicată Gazetei Matematice. Elevii au vorbit despre Ion Ionescu, G. Ţiţeica etc. ca şi despre activitatea Gazetei Matematice. Şi în acest an, tematica a fost întocmită tot pe principiile din anul trecut.

Evidenţa muncii din cerc se ţine într-un registru special de procese-verbale ale cercului. O şedinţă decurge cam astfel: se face întîi, apelul. Urmează apoi, expunerea temei teoretice (circa 45 minute). Se trece apoi, la rezolvarea problemelor. Profesorul anunţă, de exemplu, rezolvarea problemei nr. 108. Elevii care au rezolvat problema se anunţă prin ridicare de mîini şi sînt înscrişi în registrul de procese-verbale. Se anunţă apoi: nr. 109, se fac iar înscrieri, etc. În felul acesta se poate şti ce a lucrat fiecare elev într-o săptămînă. După ce s-a terminat anunţarea problemelor, se reia prima problemă şi se rezolvă la tablă de către unul dintre elevii înscrişi (de obicei dintre cei ce rezolvă probleme mai puţine). Elevii mai buni fac completări sau dau alte soluţii. Problemele pentru care nu se înscrie nimeni, se rezolvă de către profesor. Pentru a preîntîmpina o eventuală lipsă de timp se începe cu rezolvarea acelor probleme

care au mai puțini rezolvitori. În ultimele zece minute se propun problemele noi (8—12).

★

Desigur că mulți dintre cititorii noștri vor avea de învățat cîte ceva din cele expuse mai sus. Rugăm pe tovarășii profesori conducători de cercuri similare, din alte orașe ale patriei, să ne scrie despre activitatea cercurilor de matematică și a celor de fizică din școala sau orașul lor. În felul acesta vom putea face un rodnic schimb de experiență între cercurile existente și vom determina crearea și în alte școli unde în prezent nu există, a unor astfel de cercuri.

Ținînd seamă de necesitățile actuale, Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. sprijină prin filialele sale, crearea a cît mai multe cercuri de matematică și de fizică, atît pe școală cît și pe oraș.

Cercurile de matematică și de fizică din școli pot și trebuie să contribuie din ce în ce mai mult, la o pregătire temenică a tineretului nostru, care plecat de pe băncile școlilor, va aduce aportul său la construirea socialismului în țara noastră.

CALEIDESCOP MATEMATIC

Numere interesante. Grupul de patru numere: (2; 4; 12; 420) are proprietatea deosebită, că produsele numerelor, două cîte două, mărite cu 1 dau patrate perfecte: $1 + 2 \cdot 4 = 3^2$; $1 + 2 \cdot 12 = 5^2$; $1 + 2 \cdot 420 = 29^2$;

$$1 + 4 \cdot 12 = 7^2;\ 1 + 4 \cdot 420 = 41^2;\ 1 + 12 \cdot 420 = 71^2.$$

Unii calculatori au căutat și alte numere avînd această interesantă proprietate și au găsit că dacă notăm cu p și r două numere întregi oarecari, atunci numerele: $a = p$; $b = r(p\,r + 2)$; $c = (r + 1)(pr + p + 2)$; $d = 4(pr + 1) \cdot (pr+p+1)(pr^2+pr+2r+1)$ îndeplinesc această condiție. Într-adevăr, avem:

$$ab + 1 = (pr + 1)^2;\ ac + 1 = (pr + p + 1)^2;$$

$$ad + 1 = (2p^2r^2 + 2p^2r + 4pr + 2p + 1)^2;$$

$$bc + 1 = (pr^2 + pr + 2r + 1)^2;$$

$$bd + 1 = (2p^2r^3 + 2p^2r^2 + 6pr^2 + 4pr + 4r + 1)^2;$$

$$cd + 1 = (2p^2r^3 + 4p^2r^2 + 6pr^2 + 2p^2r + 8pr + 4r + 2p + 3)^2.$$

Unde e greșala? Să sonsiderăm două numere egale $a = b$. Din relația dată deducem succesiv, $ab = a^2$; $ab - b^2 = a^2 - b^2$; $b(a - b) = (a + b)(a - b)$; apoi prin simplificare cu $a - b$ deducem, $b = a + b$, sau $a = 2a$ și prin urmare, $1 = 2$. Rezultat absurd. Lanțul operațiilor pare logic, dar totuși s-a strecurat o greșală în calculele noastre, de vreme ce am ajuns la o absurditate. Undeva am simplificat cu $a - b$ care în condițiile noastre este 0 pentru că $a = b$, ori simplificarea cu 0 este nepermisă.

Cum pot fi rezolvate fără algebră, probleme de aritmetică sau de geometrie care conduc la ecuații de gradul al doilea. Ne propunem să găsim un patrat a cărui arie mărită cu 7 unități echivalează cu aria unui dreptunghi avînd înălțimea cît latura patratului necunoscut și lățimea 8.

Dacă notăm cu x latura patratului, soluția problemei este dată de ecuația $x^2 + 7 = 8x$, pe care o vom rezolva fără metodele algebrei. Considerăm un dreptunghi $ABCD$ (fig. 1) cu lățimea 8 și înălțimea x. Pe latura AB luăm punctele M astfel ca $BM = BC$ și E mijlocul laturii. Prelungim BC cu segmentul $CF = ME$ și ducem din M, E, F paralele la laturile dreptunghiului, ca în figură.

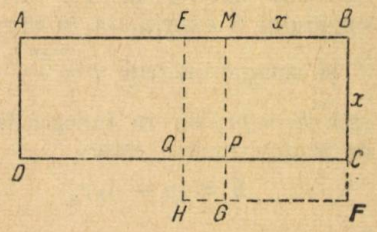


Fig. 1

Pe baza datelor problemei, dreptunghiul AP are aria 7, iar din construcție rezultă că dreptunghiul AQ este egal cu dreptunghiul MF. Cunoscînd aceste lucruri găsim că: aria patratului QG = aria EF − aria EP − − aria MF, însă aria EP + aria MF = aria EP + aria AQ = aria $AP = 7$, și prin urmare: aria patratului QG = aria $EF - 7 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 7 = 9$, deci latura patratului QG este $QP = 3$ și deci $BM = x = BE - QP = 4 - 3 = 1$.

În problemă am admis M situat la dreapta punctului E. Considerînd și cazul că M e situat la stînga lui E, găsim prin același procedeu ca mai sus și soluția $x = 7$.

Mozaic cu poligoane regulate avînd același număr de laturi. Se pune problema de a acoperi o suprafață plană cu poligoane regulate de același număr de laturi n, ca în figurile 2, 3 și 4. Cîte posibilități există și cu ce tipuri de poligoane poate fi realizat un astfel de mozaic?

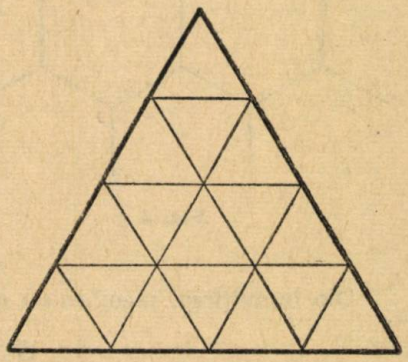


Fig. 2

Unghiul de la vîrful unui poligon de n laturi valorează, după cum se știe, $\frac{2n-4}{n}$ unghiuri drepte, iar acesta trebuie să se poată așeza în jurul unui punct A de un număr exact de ori. Aceasta implică, ca raportul: (4 unghiuri drepte: $\frac{2n-4}{n}$ unghiuri drepte) $= \frac{2n}{n-2}$ să fie un număr întreg. Avem: $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} =$ $= 2 + \frac{4}{n-2}$, de unde rezultă că $n - 2$ trebuie să fie un divizor al lui 4, adică $n - 2$ poate avea valorile 1; 2 sau 4, ceea ce dă pentru n numerele 3; 4 sau 6. Din cele arătate pînă aci rezultă în mod clar, că singurele poligoane regulate care pot fi folosite la realizarea unui mozaic, ca în problema noastră sînt: *triunghiul echilateral, patratul* și *exagonul regulat.*

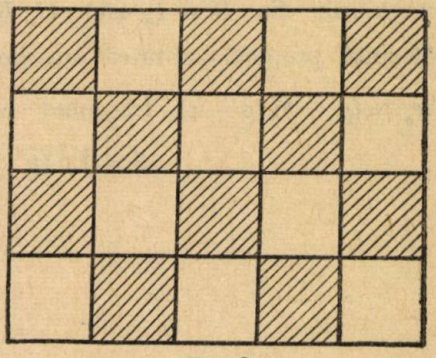


Fig. 3

O demonstrație pentru formula ariei unui triunghi în funcție de laturile sale a, b, c, Considerăm triunghiul ABC (fig. 5), cercul înscris I și cel exînscris laturii a, I_a. Aria triunghiului S exprimată în funcție de r și semiperimetrul $p = \frac{a+b+c}{2}$ este $S = pr$, iar în funcție de r_a și de semiperimetru este

$$S = (p - a)\, r_a .$$

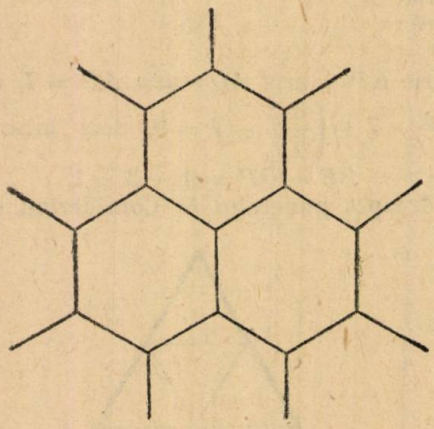


Fig. 4

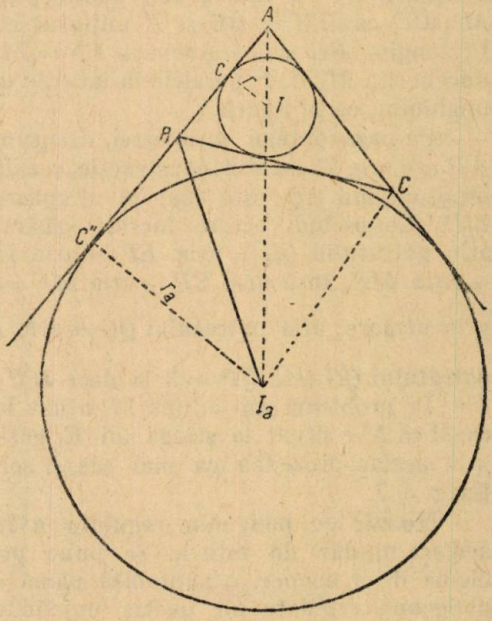


Fig. 5

Din înmulțirea, membru cu membru, a celor două egalități găsim:

$$S^2 = p\,(p - a)\, r\, r_a . \qquad (1)$$

Notăm cu C' și C'' punctele de tangență ale cercurilor I și I_a cu latura AB. Triunghiurile dreptunghice formate, IBC' și $I_a\, BC''$ sînt asemenea avînd unghiurile din B și I_a egale ($I_a B \perp IB$) și $I_a C'' \perp C'B$).

Rezultă proporționalitatea laturilor $\frac{BC'\ (=p-b)}{I_a C''\ (=r_a)} = \frac{IC'\ (=r)}{BC''\ (=p-c)}$ și apoi, $rr_a = (p - b)\,(p - c)$. Înlocuind acest rezultat în (1) obținem:

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

MONTAJ PENTRU DEMONSTRAREA REZONANŢEI PENDULELOR

după I. P. JEREBŢOV

De obicei, pentru demonstrarea rezonanţei pendulelor se atîrnă acestea pe o bară comună relativ scurtă. În felul acesta între pendule se realizează o foarte puternică legătură, iar fenomenul de rezonanţă este însoţit de bătăi. O asemenea complicare a fenomenului de rezonanţă printr-un proces suplimentar nu este de dorit, deoarece distrage atenţia de la fenomenul principal.

Demonstrarea fenomenului de rezonanţă trebuie realizată astfel încît să nu fie însoţit de fenomenul bătăilor. Acest lucru se poate face dacă se stabileşte o legătură slabă între pendule. În acest scop, în loc de o bară comună se foloseşte un fir comun lung de cîţiva metri. Este bine ca firul să fie întins între doi pereţi opuşi. Pe acest fir, lîngă unul din capetele lui, se atîrnă pendulul care va îndeplini rolul de sursă a vibraţiilor, iar lîngă celălalt capăt se atîrnă cîteva pendule de lungimi diferite, care să recepţioneze vibraţiile (fig. 1).

Masa pendulului 1 trebuie să fie mai mare decît a celorlalte pendule. Se pune în mişcare pendulul 1 şi se observă cum intră în rezonanţă pendulul 3 care are aceiaşi lungime a firului ca şi pendulul 1. Amplitudinea mişcării acestui pendul este mult mai mică decît a pendulului 1. Din cauza legăturii slabe dintre aceste pendule nu apare fenomenul de bătăi. Cu timpul, oscilaţiile ambelor pendule se amortizează.

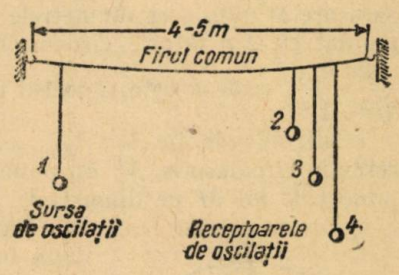


Fig. 1

Este bună şi următoarea experienţă. Drept surse de vibraţii se folosesc pe rînd pendulele 2, 3 şi 4. Schimbînd lungimea pendulului 1 (în acest caz este mai bine să-l luăm de masă mai mică şi să-l atîrnăm pe un fir lung trecut printr-un inel, fixat pe firul comun), putem demonstra uşor că cea mai mare amplitudine o va avea cînd va fi «în acord» cu frecvenţa vibraţiilor sursei date.

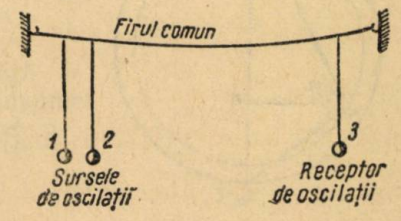


Fig. 2

Trebuie să amintim încă o variantă interesantă a experienţelor de rezonanţă. Dacă îndepărtăm pendulul 1 şi legănăm firul comun cu mîna, cu o amplitudine mică, potrivind frecvenţa acestor vibraţii (legănări) putem determina, după dorinţă, pe oricare din pendulele 2, 3 şi 4 să intre în rezonanţă.

Cu ajutorul pendulelor putem să demonstrăm şi anularea reciprocă a undelor pe care le trimit două surse de vibraţii a căror diferenţă de fază este de 180°. Pentru aceasta trebuie să luăm trei pendule de aceiaşi lungime. Două din ele vor fi atîrnate aproape alături la unul din capetele firului, iar al treilea la celălalt capăt (fig. 2).

Dacă depărtăm pendulele 1 şi 2 în sensuri opuse şi le dăm drumul, ele vor efectua oscilaţii a căror diferenţă de fază este de 180°. Undele trimise de ele pe

firul comun se anulează reciproc şi de aceea pendulul 3 va rămîne nemişcat.

Observăm astfel, un fenomen interesant. Se produc două oscilaţii cu amplitudine mare, însă undele lor nu se propagă, deoarece avînd faze opuse ele se anulează reciproc. În schimb, dacă depărtăm pendulele 1 şi 2 în acelaşi sens, ele vor efectua oscilaţii care vor coincide ca fază, iar undele emise de ele se vor aduna. Pendulul 3, recepţionînd aceste unde, va începe să oscileze. Nu este greu de observat că în acest caz amplitudinea lui este mai mare decît în cazul cînd drept sursă de oscilaţii serveşte numai un singur pendul.

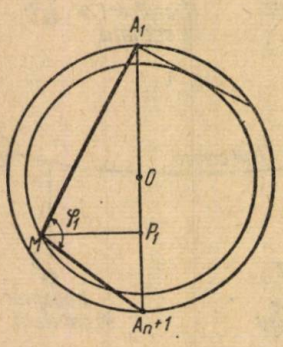
Aceste demonstraţii pot fi considerate ca analogii mecanice ale procesului de radiotransmisie şi recepţie, precum şi ale compunerii sau anulării reciproce a undelor emise de două centre oscilatorii, după cum sînt în concordanţă de fază sau nu.

NOTE MATEMATICE

10. GENERALIZAREA PROBLEMEI 1183

Suma patratelor tangentelor unghiurilor sub care se văd dintr-un punct oarecare al unui cerc diametrele care trec prin vîrfurile opuse ale unui poligon regulat cu $2n$ laturi, circumscris acestui cerc, este constantă şi egală cu $\frac{2n\,k}{(k^2-1)^2}$, unde k este raportul dintre rază şi apotemă.

Într-adevăr, fie $A_1, A_2 \ldots, A_{2n}$ poligonul, a apotema, O centrul, R raza cercului circumscris, M un punct oarecare al cercului înscris, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ proiecţiile lui M pe diametrele $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \ldots, A_nA_{2n}$ (fig.).



Exprimăm suprafaţa triunghiului MA_1A_{n+1} în două feluri şi anume:

$$\overline{MA_1}\cdot\overline{MA_{n+1}}\sin\varphi_1 = \overline{A_1A_{n+1}}\cdot\overline{MP_1}$$

sau

$$\overline{MA_1}\cdot\overline{MA_{n+1}}\sin\varphi_1 = 2R.\,\overline{MP_1}. \qquad (1)$$

Aplicînd teorema cosinusului şi a medianei triunghiului MA_1A_{n+1}, obţinem:

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_{n+1}}^2 - 2\,\overline{MA_1}\cdot\overline{MA_{n+1}}\cos\varphi_1 = 4R^2$$

şi

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_{n+1}}^2 = 2\,(a^2 + R^2).$$

Scăzînd aceste două relaţii, deducem:

$$\overline{MA_1}\cdot\overline{MA_{n+1}}\cos\varphi_1 = a^2 - R^2. \qquad (2)$$

Comparăm relaţiile (1) şi (2) şi avem:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2R}{a^2-R^2}\cdot\overline{MP_1}.$$

Prin urmare:

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{2R}{a^2-R^2}\cdot\overline{MP_k}.$$

Deci vom avea:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \varphi_k = \frac{4R^2}{(a^2 - R^2)^2} \sum_{k=1}^{n} \overline{MP_k}^2. \qquad (3)$$

Ţinînd seamă că punctele P_1, $P_2 \ldots$ P_n formează un poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de diametru OM, vom avea:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{MP_k}^2 = \tfrac{1}{2}\, na^2.$$

Înlocuind în relaţia (3) obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} + \operatorname{tg}^2 \varphi_k = \frac{2n\, k^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

În cazul particular $n = 2$, $k = \sqrt{2}$, obţinem soluţia problemei 1183, publicată în R.M.F. nr. 2, pag. 48, anul V.

Pentru $n = 3$ şi $k = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ se obţine soluţia problemei 1765 publicată în G.M.F. seria B, anul VI, pag. 329.

Gh. I. Stoian
Student Matematici Bucureşti

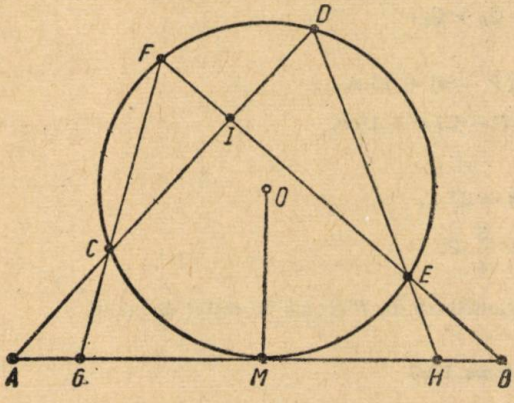
PROBLEME REZOLVATE

Problema 1548

Fie M mijlocul unui segment AB. Se duce un cerc tangent segmentului AB în punctul M. O secantă dusă din A taie cercul în punctele C şi D, iar o secantă oarecare dusă din B taie cercul în punctele E şi F. Dreptele CF şi DE taie dreapta AB respectiv în punctele G şi H. Să se demonstreze că segmentele AG şi BH sînt egale.

* * *

Soluţie dată de **Ion I. Cristea** student şi **Basarab Şerban** elev, Bucureşti. — Fie $I \equiv (AD, BF)$. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului AIB tăiat de transversalele FCG şi DEH, obţinem:



$$\frac{CA}{CI} \cdot \frac{FI}{FB} \cdot \frac{GB}{GA} = 1 \qquad (1)$$

şi

$$\frac{HB}{HA} \cdot \frac{DA}{DI} \cdot \frac{EI}{EB} = 1. \qquad (2)$$

Cum $AM = MB$, rezultă că A şi B au aceiaşi putere faţă de (O) şi deci:

$$AC \cdot AD = BE \cdot BF. \qquad (3)$$

Puterea lui I faţă de (O) este

$$IC \cdot ID = IE \cdot IF. \qquad (4)$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2) şi ţinînd seama de (3) şi (4) obţinem:

$$\frac{BG \cdot BH}{AG \cdot AH} = 1 \text{ sau } \frac{AH}{BH} = \frac{BG}{AG}; \quad \frac{AH - BH}{BH} = \frac{BG - AG}{AG}; \quad \frac{HB}{BH} = \frac{HB}{AG},$$

de unde $AG = BH$.

S-au mai primit soluţii asemănătoare însă mai lungi.

Problema 1630

O cantitate oarecare de fosfat de sodiu se află în stare supratopită la temperatura $t° = 0°C$. *Se aruncă în această substanță o cantitate foarte mică de fosfat de sodiu solid provocînd astfel cristalizarea.*

Dacă cunoaștem: punctul de topire $T = 36°C$, *căldura de topire* $= 24$ cal/g·grad, *căldura specifică în stare solidă* $c = \frac{5}{12}$ cal/g·grad *și căldura specifică în stare lichidă* $c' = \frac{3}{4}$ cal/g·grad *ale fosfatului de sodiu, să se afle ce cantitate de substanță se cristalizează?*

Ing. C. Necșoiu

Soluție. — Să presupunem că avem în stare lichidă o cantitate P grame fosfat de sodiu. Prin aruncarea unei părticele foarte mici de fosfat de sodiu solid, o cantitate de x grame de substanță se cristalizează brusc la temperatura $t° = 0$ degajînd o cantitate de căldură $Q = \lambda x = 24 x$ cal. Această cantitate de căldură este consumată astfel:

1) Cele $(P - x)$ grame de substanță rămasă necristalizată se încălzesc dela $t°$ la $T°$ absorbînd cantitatea de căldură:

$$Q_1 = c' (P - x)(T - t) = \frac{3}{4}(P - x)(36° - 0°) =$$

$$= \frac{36 \times 3}{4}(P - x) = 27 (P - x) \text{ cal.}$$

2) Cantitatea de x grame de substanță cristalizată se încălzește dela $t°$ la $T°$ absorbînd o cantitate de căldură

$$Q_2 = c x (T - t) = \frac{5}{12} x (36° - 0°) = 15 x \text{ cal.}$$

În stare de echilibru putem scrie ecuația:

$$Q = Q_1 + Q_2 .$$

Făcînd înlocuirile, obținem:

$$24 x = 27 (P - x) + 15 x,$$

$$24 x = 27 P - 27 x + 15 x,$$

de unde scoatem:

$$36 x = 27 P,$$

$$x = \frac{3}{4} P.$$

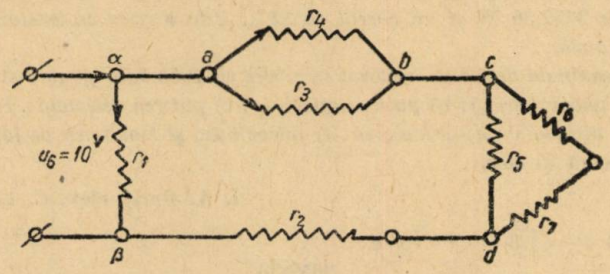
Rezultă că se cristalizează 75 % din cantitatea de P grame de fosfat de sodiu.

Problema 1703

Tensiunea la bornele unui circuit este 10 V (v. fig.). *Valorile rezistențelor din circuit sînt:* $r_1 = 0,4\ \Omega$; $r_2 = 0,8\ \Omega$; $r_3 = 0,7\ \Omega$; $r_4 = 0,1\ \Omega$; $r_5 = 0,5\ \Omega$; $r_6 = 0,7\ \Omega$; $r_7 = 0,3\ \Omega$. *Se cere:* a) *rezistența echivalentă a circuitului*; b) *curentul total din circuit*; c) *valorile curenților ce străbat rezistențele*; d) *căderea de tensiune între punctele ab și cd.*

Nicolae Suciu

Soluție. — Observînd figura și ținînd seama de expresiile care ne dau rezistența echivalentă în cazul legării serie și paralel, se obține:



$$R_{67} = r_6 + r_7 = 0{,}7 + 0{,}3 = 1\ \Omega,$$

$$\frac{1}{R_{567}} = \frac{1}{r_5} + \frac{1}{R_{67}} = \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{1} = 3,$$

$$R_{567} = 0{,}33\ \Omega,$$

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{0{,}7} + \frac{1}{0{,}1} = 11{,}43,$$

$$R_{34} = 0{,}0866\ \Omega,$$

$$R_{234567} = r_2 + R_{34} + R_{567} = 0{,}0865 + 0{,}8 + 0{,}33 = 1{,}2\ \Omega,$$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_{2\ldots7}} = \frac{1}{0{,}4} + \frac{1}{1{,}2} = 3{,}3,$$

$$R_t = 0{,}293\ \Omega.$$

Avem:

$$I = \frac{U_{ab}}{R_t} = \frac{10}{0{,}293} = 34{,}1\ \text{A}.$$

Aplicînd legile lui Kirckhoff în nodul α avem:

$$I = i_1 + i_2 \quad * \quad 34{,}1 = i_1 + i_2$$
$$r_1 i_1 = R_{2\ldots7}\, i_2 \quad * \ * \quad 0{,}4 \cdot i_1 = 1{,}2 \cdot i_2\,.$$

Din rezolvarea acestui sistem de ecuații rezultă:

$$i_1 = 25{,}56\ \text{A} \quad ; \quad i_2 = 8{,}54\ \text{A}.$$

Prin rezistențele din porțiunea *ab* circulă curenții i_3 și i_4

$$i_3 + i_4 = i_2\,, \qquad i_3 + i_4 = 8{,}54,$$
$$r_3 i_3 = r_4 i_4\,, \qquad 0{,}7 \cdot i_3 = 0{,}1 \cdot i_4.$$

Înlocuind valorile și rezolvînd, obținem:

$$i_3 = 1{,}067\ \text{A} \quad ; \quad i_4 = 7{,}48\ \text{A}.$$

Între punctele *cd* se bifurcă curenții i_5 și i_6 ce au valorile date de următoarele relații:

$$i_5 + i_6 = i_2\,, \qquad i_5 + i_6 = 8{,}54,$$
$$i_5 r_5 = i_6 R_{67}\,, \qquad i_5 \cdot 0{,}5 = i_6 \cdot 1,$$

de aci:

$$i_0 = 5{,}7\ \text{A} \quad ; \quad i_0 = 2{,}84\ \text{A}.$$

Căderea de tensiune între punctele *ab*:

$$U_{ab} = i_2 R_{34} = 8{,}54 \times 0{,}0865 = 0{,}739\ \text{V}.$$

Între *cd* căderea de tensiune este:

$$i_2 R_{567} = 8{,}54 \times 0{,}33 = 2{,}82\ \text{V}.$$

Problema 1767

Un motor asincron trifazic cu rotorul în scurtcircuit, cu o pereche de poli pe fază, absoarbe o putere de 3652,36 W *şi un curent de* 12 A, *dela o reţea cu tensiunea de* 220 V *cu* 50 *perioade pe secundă.*

La puterea nominală de 6 CP. *motorul se roteşte cu* 2950 *ture pe minut. Se cere:*

a) *factorul de putere* (cos φ); b) *puterea aparentă*; c) *puterea dewatată*; d) *viteza cîmpului magnetic învîrtitor din stator*; e) *alunecarea*; f) *intensitatea şi tensiunea pe fază în stator dacă înfăşurarea este legată în stea.*

I. A. Opriş, elev, C. Lung Muscel

Soluţie. — a) $P = \sqrt{3}\, U \cdot I \cdot \cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{3652{,}36}{1{,}73 \times 220 \times 12} = 0{,}8.$$

b) $Pa = = \sqrt{3}\, UI = 1{,}73 \,.\, 220 \,.\, 12 = 4567{,}2$ waţi.

c) $\sin\varphi = 0{,}6 \quad Pr = Pa \sin\varphi = 4567{,}2 \cdot 0{,}6 = 2740{,}32$ waţi.

d) $n = \frac{60\, f}{P} = \frac{60 \times 50}{1} = 3000$ ture pe minut.

e) $a = 100\, \frac{n - n_1}{n} = 100\, \frac{3000 - 2950}{3000} = 1{,}66\,\%$.

f) Tensiunea pe fază $\frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{220}{1{,}73} = 127$ volţi.

Curentul pe fază este egal cu curentul de alimentare $I = 12$ A.

Problema 1785

O rază de lumină cade pe o lamă cu feţe paralele, suferind fenomenul de refracţie. Dacă unghiul de incidenţă $i = 30°$, *grosimea lamei* $e = 20$ mm *şi indicele de refracţie al sticlei* $n = 1{,}54$, *să se arate:*

a) *ce poziţie are raza emergentă faţă de raza incidentă,*

b) *care este deplasarea d a punctului I' care se vede în I'' (punctul pe unde trece prelungirea razei incidente),*

c) *care este deplasarea h a razei emergente faţă de raza incidentă.*

D. Tănase

Soluţie. — *a)* Scriem legea sinusurilor:

$$a)\ \frac{\sin i}{\sin r} = n \quad , \quad b)\ \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{1}{n}\ .$$

Înmulţind egalităţile *a)* şi *b)* membru cu membru, avem:

$$\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = 1 \quad ; \quad \sphericalangle\, i_1 = \sphericalangle\, r$$

ca alterne interne; de aci scoatem că $\sin i = \sin r$ şi deci $i = r$. Aceasta ne spune că raza incidentă SI este paralelă cu raza emergentă $I'R$.

b) Considerăm triunghiul $II'I''$ pentru care scriem teorema sinusurilor

$$\frac{I'I''}{\sin(I'II'')} = \frac{I\,I'}{\sin(II''I')} \quad \text{sau} \quad \frac{I'\,I''}{\sin(i-r)} = \frac{II'}{\sin i}. \qquad \text{(c)}$$

Din triunghiul IAI' avem $II' = \frac{IA}{\cos r}$. Deci (c) devine:

$$I'I'' = IA \cdot \frac{\sin(i-r)}{\sin i \cos r} \text{ sau } d = e\frac{\sin(i-r)}{\sin i \cdot \cos r} =$$

$$= e \cdot \frac{\sin i \cdot \cos r - \cos i \sin r}{\sin i \cdot \cos r} = e\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}\right),$$

$$d = e\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}\right) = 20\left(1 - \frac{1}{1{,}54} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}9458}\right) \cong 8{,}12 \text{ mm},$$

$$\sphericalangle r = 18°55'.$$

c) În triunghiul $II'B$ avem:

$$I'B = II' \sin(i-r).$$

Din triunghiul IAI' avem: $II' = \frac{IA}{\cos r}$ sau $I'B = h$ şi $IA = e$, formulele devin:

$$h = \frac{e}{\cos r} \cdot \sin(i-r),$$

$$h = 20\frac{0{,}294}{0{,}946} \cong 6{,}2 \text{ mm}.$$

Problema 1791

O pompă serveşte pentru a ridica un debit de lichid cu greutatea specifică γ la o înălţime oarecare.

Se cere să se afle randamentul mecanic al pompei cunoscînd că randamentul ei total este 0,5 *şi randamentul hidraulic este* 0,75, *iar pierderea de debit se consideră* 4 % *din debitul net; pierderile prin frecare în conducte şi viteza reziduală se apreciază la* 20 % *din înălţimea netă de ridicare.*

N. Sălan, inginer, Constanţa

Soluţie. — Randamentul total al pompei este dat de relaţia:

$$\eta_p = \frac{P_p}{P_m},$$

unde P_p = puterea utilă produsă de pompă; P_m = puterea mecanică absorbită de pompă (puterea motorului de acţionare).

Debitul net şi respectiv înălţimea de ridicare netă fiind Q şi H, puterea utilă produsă de pompă în cai putere va fi:

$$P_p = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H}{75}.$$

Puterea pe care trebuie s-o producă motorul pentru acţionarea pompei este

$$P_m = \frac{\gamma \cdot 1{,}04\,Q \cdot 1{,}2\,H}{75 \cdot \eta_h \cdot \eta_m}$$

şi

$$\eta_p = \frac{\eta_h \cdot \eta_m}{1{,}04 \cdot 1{,}2}, \text{ iar } \eta_m = \frac{1{,}04 \cdot 1{,}2\,\eta_p}{\eta_h} = \frac{1{,}04 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}75} = 83{,}2\ \%.$$

Problema 1805

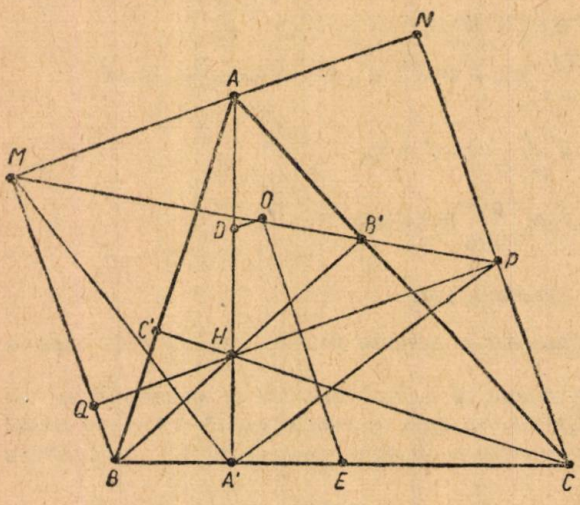
Considerăm triunghiul ABC cu ortocentrul H. Prin punctele A şi H trec două drepte paralele, iar prin B şi C, o altă pereche de drepte paralele perpendiculare pe primele. Se formează astfel dreptunghiul $MNPQ$ căruia îi circumscriem cercul (O). Să se demonstreze că:

1. *Diagonalele dreptunghiului $MNPQ$ trec prin picioarele înălţimilor BH şi CH.*
2. *Cercul (O) trece printr-un punct fix.*
3. *Locul punctului O este cercul lui Euler al triunghiului ABC.*

Mihail I. Popescu, student, Bucureşti

Soluţie. 1. Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic al triunghiului ABC. Din patrulaterele inscriptibile $AMBB'$ şi $HCPB'$ deducem:

$$\sphericalangle AB'M = \sphericalangle ABM \quad \text{şi} \quad \sphericalangle CB'P = \sphericalangle PHC.$$



Însă $\sphericalangle PHC = \sphericalangle ABM$, deoarece au laturile perpendiculare. Deci $\sphericalangle AB'M = \sphericalangle CB'P$, aceasta dovedind coliniaritatea punctelor M, B', P. Analog se arată că şi punctele N, C', Q sînt coliniare.

2. Luînd în consideraţie patrulaterele inscriptibile $PHA'C$ şi $AMBA'$ deducem următoarele egalităţi de unghiuri:

$$\sphericalangle AA'P = \sphericalangle HCP$$

şi

$$\sphericalangle AA'M = \sphericalangle ABM.$$

Cum $\sphericalangle HCP = \sphericalangle BAM$, ca avînd laturile perpendiculare, rezultă:

$$\sphericalangle MA'P = \sphericalangle AA'M + \sphericalangle AA'P = \sphericalangle ABM + \sphericalangle BAM = 90°,$$

prin urmare cercul (O) trece prin punctul fix A'.

3. Într-adevăr, notînd cu D şi E mijloacele segmentelor AH şi BC rezultă că O descrie cercul de diametru DE; care este tocmai cercul Euler al triunghiului ABC.

Problema 1806

Un electromotor de curent alternativ dezvoltă sub o tensiune de 2500 volţi, o putere în plină sarcină de 170 CP. Ştiind că randamentul electromotorului este 80% şi factorul de putere 0,85, să se calculeze cît timp trebue să treacă printr-o soluţie de sulfat de nichel un curent de intensitate egală cu cea a curentului absorbit de electromotor, pentru ca la catod să se depună 6,624 grame nichel.

Tiberiu Colibaba

Soluţie. — Puterea în plină sarcină este dată de formula:

$$P_a = r \cdot \cos \varphi \cdot U \cdot I,$$

*) A se vedea soluţia problemei 1215 din G.M.F.—B, anul VI, pag. 31.

de unde intensitatea curentului absorbit de electromotor este:

$$I = \frac{P_a}{r \cdot \cos \varphi \cdot U} = \frac{170 \times 736}{0{,}8 \times 0{,}85 \times 2500} = \frac{17 \times 736}{170} = 73{,}6 \text{ A.}$$

După prima lege a lui Faraday, avem:

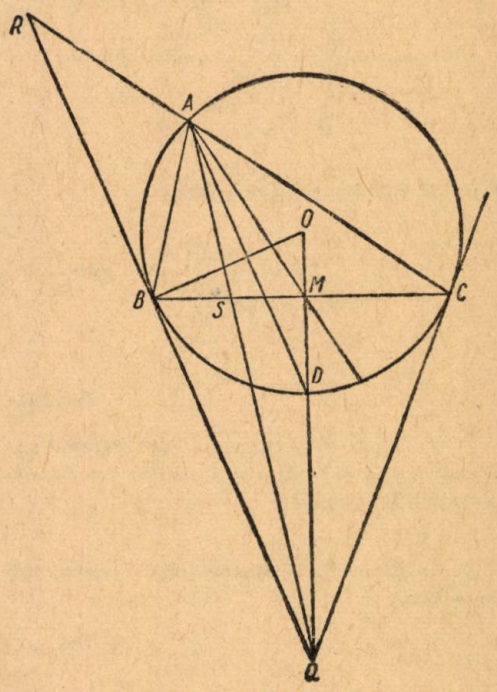
$$m = k \cdot I \cdot t, \quad \text{deci:} \quad t = \frac{m}{k \cdot I} = \frac{6624}{0{,}3 \times 73{,}6} = 300 \text{ s.}$$

Problema 1809

Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd vîrful A, mijlocul M al laturii BC şi punctul de intersecţie al tangentelor în B şi C la cercul circumscris.

Nicolae St. Alexandru, student, Bucureşti

Soluţie. — Considerăm problema rezolvată. Să arătăm că simediana AS trece prin intersecţia Q a tangentelor în B şi C. Prelungim tangenta în B pînă ce taie latura AC în R. Să arătăm că A, S, Q sînt colineare.



În triunghiul dreptunghic BMQ avem:

$$\overline{BQ} = \frac{\overline{BC}}{2\cos(MBQ)} = \frac{a}{2\cos A} = \overline{QC}.$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul QRC:

$$\frac{\overline{QR}}{\sin(A + C)} = \frac{\overline{QC}}{\sin(A - C)},$$

de unde:

$$\overline{QR} = \frac{a \sin B}{2 \cos A \sin(A - C)}.$$

Din triunghiul ARB avem:

$$\frac{c}{\sin(A - C)} = \frac{\overline{AR}}{\sin C},$$

$$\overline{AR} = \frac{c \sin C}{\sin(A - C)}.$$

Facem produsul şi ţinem seama că $\frac{SB}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$, $\frac{AC}{AR} \cdot \frac{QR}{QB} \cdot \frac{SB}{SC} = \frac{b \sin(A - C)}{c \sin C} \cdot \frac{\sin B}{\sin(A-C)} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c \sin B}{b \sin C} = \frac{h_a}{h_a} = 1$. Deci punctele A, S, Q sînt colineare şi deci AS trece prin Q. De aci rezultă următoarea construcţie:

Bisectoarea din A a triunghiului ABC fiind aceeaşi cu bisectoarea unghiului MAQ, construim bisectoarea triunghiului AMQ relativă la unghiul MAQ care taie pe MQ în D.

Mediatoarea segmentului AD taie pe MQ în O care este centrul cercului circumscris.

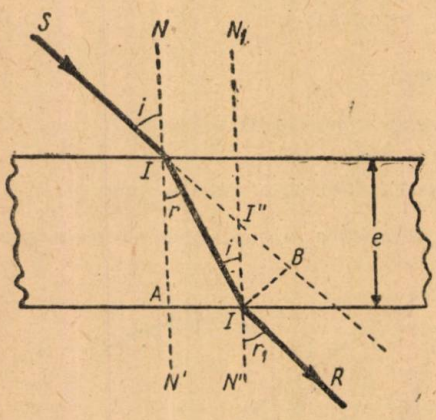
Cu raza $OA = OD$ descriem cercul circumscris triunghiului care taie perpendiculara în M pe MQ, în B şi C.

Observare. — Triunghiul AMQ trebuie ales astfel ca mediatoarea bisectoarei AD să taie latura MQ într-un punct O astfel ca $OM < OA = OD$.

Problema 1810

O rază monocromatică de lumină cade pe faţa unei prisme sub un unghi de incidenţă de 60° *şi iese din prismă tot sub un unghi de* 60°. *Ştiind că indicele de refracţie al materialului din care este făcută prisma este* $\sqrt{3}$, *să se afle unghiul de refringenţă al prismei.*

Virgil Atanasiu



Soluţie. Din enunţ se constată că este vorba de deviaţia minimă. Deci formulele prismei devin:

$$D = 2i - A \quad , \text{ de unde } i = \frac{D + A}{2}$$

şi

$$A = 2r \quad , \text{ de unde } r = \frac{A}{2}.$$

Din relaţia $\sin i = n \sin r$ scoatem prin înlocuire:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \dfrac{D + A}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}}.$$

Folosind datele problemei avem:

$$\sqrt{3} = \frac{\sin 60°}{\sin \dfrac{A}{2}} \quad \text{sau} \quad \sin \frac{A}{2} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ de unde } A = 60°.$$

Problema 1811

Să se afle temperatura la care oxigenul sub presiunea de 20 cm *va avea aceiaşi densitate ca azotul la* 0° *şi la presiunea de* 300 cm. *Densitatea oxigenului este* 1,105, *iar a azotului* 0,967 *(în condiţii normale).*

* * *

Soluţie. — La temperatura t oxigenul sub presiunea de 20 cm are o densitate d, dată de relaţia

$$d \cdot 76 = \frac{1{,}105 \cdot 20}{1 + \alpha t},$$

de unde

$$d = \frac{1{,}105 \cdot 20}{76\,(1 + 0{,}00367\,t)}.$$

La 0° şi presiune 300 cm densitatea azotului este:

$$d' = \frac{0{,}967 \cdot 300}{76}.$$

Din enunţ rezultă că $d = d'$, deci:

$$\frac{1{,}105 \cdot 20}{76\,(1 + 0{,}00037\,t)} = \frac{0{,}967 \cdot 300}{76}.$$

Se găseşte $t = 38°$.

Problema 1812

Să se determine a astfel ca numărul $a\,3^{3k-1}+1$ *să fie divizibil cu* 26.

I. Lupuţiu, Ploieşti

Soluţie. — Numărul 3 fiind prim cu 26 condiţiile de divizibilitate nu se vor schimba dacă vom înmulţi expresia cu 3, adică:

$$a3^{3k}+3=M26;$$

scriem succesiv: $a(3^3)^k+3=M\ 26\ ;\ a27^k+3=M26;$

$a(26+1)^k+3=M26$; de unde $a+3=M26$, sau

$$a=26k-3.$$

O generalizare. — Să căutăm condiţia ca numărul $N=am^{nk-p}+1$ să fie divizibil cu m^n-1; m^n-1 fiind prim cu m. Condiţiunile de divizibilitate nu se vor schimba dacă multiplicăm pe N cu m^p; în mod analog ca mai sus, găsim că trebuie să avem:

$$a=M(m^n-1)-m^p.$$

Problema 1850

Un circuit este compus dintr-o bobină de autoinducţie de 2 *henry o baterie formată din* 3 *condensatoare având fiecare respectiv,* 1, 2, 7 *microfarazi şi un bec electric. Filamentul becului are la* 0°C *rezistenţa de* 15 Ω, *iar temperatura de incandescenţă de* 2000°C. *Ştiind că pulsaţia curentului este* 400 *şi tensiunea alternativă* 110 *volţi, să se calculeze curentul total când elementele sînt legate în derivaţie, astfel încît becul să lumineze normal.*

Tiberiu Colibaba, elev Galaţi

Soluţie. — $C_t=C_1+C_2+C_3=1+2+7=10$ microfarazi $=10^{-5}$ farazi.
Pentru ca becul să lumineze normal:

$$R_t=R_0(1+\alpha t)=15\,(1+2000.0{,}004)=135\,\Omega,$$

Pentru legătura în derivaţie avem:

$$I=U\left(\frac{1}{L\omega}+C\omega+\frac{1}{R}\right)=110\left(\frac{1}{2.400}+\frac{4}{1000}+\frac{1}{135}\right)\cong 1{,}4\ \text{A}.$$

Problema 1907

Să se rezolve ecuaţia

$$x^3-x^2\ (r+4R)+xp^2-Sp=0,$$

unde r, R, p, S *sînt elementele unui triunghi oarecare.*

Radu Stroe, Ploeşti

Soluţie. — Conform relaţiilor dintre rădăcini şi coeficienţi, avem:

$$\Sigma x_1=4R+r,$$

$$\Sigma x_1x_2=p^2$$

şi

$$x_1x_2x_2=Sp,$$

însă,

$$\Sigma x_1x_2=x_1x_2x_3\sum\frac{1}{x_1},$$

de unde

$$\sum \frac{1}{x_1} = \frac{\sum x_1 x_2}{x_1 x_2 x_2} = \frac{p^2}{Sp} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Conform unor relaţii cunoscute,

$$\sum r_a = r + 4R,$$

$$\sum \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r},$$

$$r_a r_b r_c = \frac{S^2}{r} = \frac{S^2}{\frac{S}{p}} = \frac{S^2 p}{S} = p.S.$$

Deci se vede clar că rădăcinile ecuaţiei din enunţ sînt r_a, r_b, r_c.

Problema 1909

Să se calculeze declinaţia (δ) *şi unghiul paralactic al unui astru ştiind că latitudinea observatorului este* $\varphi = 44°10'N$ *şi înălţimea astrului măsurată de observator* $h = 26°20'45''$, *iar unghiul la pol este* $P = 75°20'30''$.

Gh. Badea, elev, Constanţa

Soluţie. — Considerăm triunghiul sferic de poziţie al astrului în momentul luării înălţimii, în care avem:

l = colatitudinea; z = distanţa zenitală; p = distanţa polară; Z = unghiul la Zenit; P_N = = unghiul la pol; $A_{(q)}$ = unghiul paralactic.

Calculul declinaţiei (δ). — Aplicăm formula consinusurilor din trigonometria sferică:

$$\cos (90°-h) = \cos (90° - \varphi) \cos (90° - \delta) + \sin (90° - \varphi) \sin (90° - h) \cos P,$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P$$

sau:

$$\sin h = \sin \varphi \left(\sin \delta + \frac{\cos \varphi \cos \delta \cos P}{\sin \varphi}\right) = \sin \varphi (\sin \delta + \operatorname{ctg} \varphi \cos P \cos \delta).$$

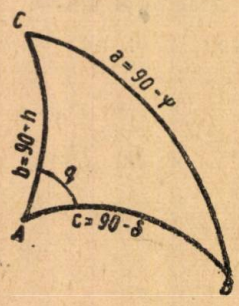
Însemnăm $\operatorname{ctg} \varphi \cos P = \operatorname{tg} \alpha$, deci:

$$\sin h = \sin \varphi (\sin \delta + \operatorname{tg} \alpha \cos \delta) = \sin \varphi \left(\sin \delta + \frac{\sin \alpha \cos \delta}{\cos \alpha}\right),$$

$$\sin h = \sin \varphi \left(\frac{\sin \delta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \delta}{\cos \alpha}\right) = \sin \varphi \frac{\sin (\delta + \alpha)}{\cos \alpha},$$

de unde $\sin h \cos \alpha = \sin \varphi \sin (\delta + \alpha)$. Prin urmare:

$$\sin (\delta + \alpha) = \frac{\sin h \cos \alpha}{\sin \varphi} = \sin h \cos \alpha \operatorname{cosec} \varphi$$



sau:

$\sin (\delta + \alpha) = \sin h. \cos \alpha \operatorname{cosec} \varphi,$

$\operatorname{ctg} \varphi \cos P = \operatorname{tg} \alpha$; $\sin (\delta + \alpha) = \cos \alpha \sin h \operatorname{cosec} \varphi,$

$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{stg} \varphi + \log \cos P,$

$\log \operatorname{ctg} \varphi = 0{,}01263$

$\log \cos P = 9{,}40321$

$\log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}41584$

$\alpha = 14°36'6''.$

Logaritmii și expresia lui $\sin(\delta + \alpha)$:

$$\log \sin(\delta + \alpha) = \log \cos \alpha + \log \sin h + \log \operatorname{cosec} \varphi,$$

$\log \cos \alpha = 9{,}98574$

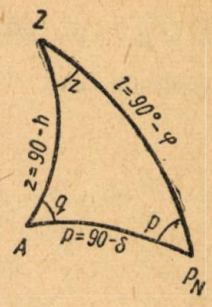
$\log \sin h = 9{,}64719$

$\log \operatorname{cosec} \varphi = 9{,}15692$

$\log \sin(\delta + \alpha) = 9{,}78985$

$(\delta + \alpha) = 38°03'06''$,

$\delta = 38°03'06'' - \alpha = 38°03'06'' - 14°36'06'' = 23°27.$



Calculul unghiului paralactic. — Calculăm laturile triunghiului ABC; a, b, c:

$90° = 89°60' -$
$-\varphi = 44°10'$
$a = 45°50'$

$90° = 89°59'60'' -$
$-h = 26°20'45''$
$b = 63°39'15''$

$90° = 89°60' -$
$-\delta = 23°27'$
$c = 66°33'$

Unghiul paralactic se calculează după formula $\operatorname{tg} \frac{q}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-l)\sin(p-c)}{\sin p . \sin(p-a)}}$:

$a = 45°50'$
$b = 63°39'15''$
$c = 66°33'$
$2p = 176°02'15''$

$$p = \frac{176°02'15''}{2} = 88°01'07''$$

Calculul lui $(p-a)$; $(p-b)$ și $(p-c)$:

$p = 88°01'07'' -$
$a = 45°50'$
$(p-a) = 42°11'07''$

$p = 88°01'07'' -$
$b = 63°39'15''$
$(p-b) = 24°21'52''$

$p = 88°01'07'' -$
$c = 66°33'$
$(p-c) = 21°28'07''$

Calculul lui q: $\operatorname{tg} \frac{q}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p . \sin(p-a)}}$. Logaritmăm expresia lui $\operatorname{tg} \frac{q}{2}$

$$\log \operatorname{tg} \frac{q}{2} = \frac{1}{2}\left[\log \sin(p-b) + \log \sin(p-c) + \operatorname{colog} \sin p + \operatorname{colog} \sin(p-a)\right],$$

$\log \sin(p-b) = 9{,}61546$

$\log \sin(p-c) = 9{,}56347$

$\operatorname{colog} \sin p = 0{,}00026$

$\operatorname{colog} \sin(p-a) = 0{,}17294$

$2 \log \operatorname{tg} \frac{q}{2} = 9{,}35213,$

$\log \operatorname{tg} \frac{q}{2} = 9{,}67606,$

$\frac{q}{2} = 25°22'30'',$

$q = 50°45'.$

Problema 1914

Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 2\sqrt{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{1 - x}.$$

St. Mărculescu, Orașul Stalin

Soluție. — Ecuația se mai scrie:

$$\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^2} - 2\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^2} = \sqrt[4]{1-x}\ ;\ \sqrt[4]{\frac{(1+\sqrt{x})^2}{1-x}} - 2\sqrt[4]{\frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-x}} = 1;$$

sau simplificînd:

$$\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} - 2\sqrt[4]{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} = 1.$$

Facem următoarea substituție:

$$\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = y$$

și avem: $y - \frac{2}{y} = 1;\ y^2 - y - 2 = 0;\ y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},\ y = 2;\ y_2 = -1.$

I. $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = 2\ ;\ \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 16;\quad 1+\sqrt{x} = 16 - 16\sqrt{x};\quad 17\sqrt{x} = 15;\ \sqrt{x} = \frac{15}{17};\ x = \frac{225}{289}.$

II. $\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = -1\ ;\ \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 1;\ 1+\sqrt{x} = 1-\sqrt{x};\ 2\sqrt{x} = 0;\ x = 0.$

Prin verificare se constată că ecuația propusă admite numai rădăcina:

$$x = \frac{225}{289}.$$

Problema 1933

Fie M un punct variabil pe parabola cu focarul în F. Cercul care trece prin F și este tangent în M parabolei, retaie parabola în A și B. Să se demonstreze că dreapta AB trece printr-un punct fix cînd M variază pe parabolă.

Gh. Buicliu

Soluție. — Fie $y^2 = 2px$, ecuația parabolei și λ un parametru variabil. Tangenta comună cercului și parabolei are ecuația:

$$y - \lambda x - \frac{p}{2\lambda} = 0,$$

iar coarda AB va avea ecuația de forma

$$y + \lambda x + \mu = 0.$$

Ecuația generală a conicelor care trec prin M și prin punctele comune parabolei cu tangenta în M și cu coarda AB este:

$$\left(y - \lambda x + \frac{p}{2\lambda}\right)(y + \lambda x + \mu) + m(y^2 - 2px) = 0.$$

Scriind că această curbă trece prin F și este conică, se găsește

$$m = 1 + \lambda^2 \quad \text{și} \quad \mu = \frac{3p\lambda}{2},$$

deci dreapta AB este $y + \lambda\left(x + \frac{3p}{2}\right) = 0$ și trece prin punctul $\left(-\frac{3p}{2},\ 0\right)$.

Problema E: 647

Doi pionieri A şi B au împreună 24 lei. Dacă partea lui A ar fi de 2 ori mai mare, iar aceea a lui B de 5 ori mai mare, ei ar avea împreună 75 lei. Cît de mare este partea lui A şi cît de mare este partea lui B?

Gh. Dobrotescu, Predeal

Soluţie. — Dacă atît partea lui A cît şi partea lui B ar fi de 2 ori mai mare, ei ar avea împreună $24 \cdot 2 = 48$ lei.

Rezultă că diferenţa $72 - 48 = 24$ lei reprezintă $5 - 2 = 3$ părţi ale lui B. Deci partea lui B este de:

$$24 : 3 = 8 \text{ lei},$$

iar partea lui A este de

$$24 - 8 = 16 \text{ lei}.$$

Problema E: 681

A, B, C, D fiind patru puncte aşezate în ordinea dată pe o dreaptă, să se arate că avem relaţia:

$$2\,(AB \cdot BC \cdot CD + AB \cdot AD \cdot CD) + AB \cdot BC \cdot AC + BC \cdot CD \cdot BD = \\ = AC \cdot CD \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD.$$

I. I. Loziciu, student, Timişoara

Soluţie. — Notăm $AB = a$, $BC = b$ şi $CD = c$. Înlocuind în relaţia de la început, avem:

$$2\,[a \cdot b \cdot c + a \cdot c\,(a + b + c)] + ab\,(a + b) + bc\,(b + c) = \\ = c\,(a + b)\,(a + b + c) + a\,(b + c)\,(a + b + c).$$

Desfăcînd parantezele obţinem:

$$4\,abc + a^2b + ab^2 + 2a^2c + 2ac^2 + b^2c + bc^2 = \\ = 4\,abc + a^2b + ab^2 + 2a^2c + 2ac^2 + b^2c + bc^2,$$

adică o egalitate, ceea ce demonstrează că relaţia este adevărată.

Problema E: 689

Să se arate că:

$$(ax - by)^3 + (by - cz)^3 + (cz - ax)^3 = 3\,(ax - by)\,(by - cz)\,(cz - ax).$$

Adr. Dragomir, Oraşul Stalin

Soluţie. — Considerăm identitatea:

$$(X + Y + Z)^3 = X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\,(X + Y)\,(Y + Z)\,(Z + X).$$

Notăm:

$$X = by - cz; \quad Y = cz - ax; \quad Z = ax - by.$$

Adunînd vom avea: $X + Y + Z = 0$.

Înlocuind aceste relaţii în indentitatea propusă avem:

$$0 = (by - cz)^3 + (cz - ax)^3 + (ax - by)^3 + 3\,(by - ax)\,(cz - by)\,(ax - cz),$$
$$0 = (ax - by)^3 + (by - cz)^3 + (cz - ax)^3 - 3\,(ax - by)\,(by - cz)\,(cz - ax).$$

De unde:

$$(ax - by)^3 + (by - cz)^3 + (cz - ax)^3 = 3\,(ax - by)\,(by - cz)\,(cz - ax).$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

DIN PROBLEMELE DATE LA CERCUL DE MATEMATICĂ ŞI LA CERCUL DE FIZICĂ DIN CAPITALĂ, 1956

2215. Se consideră un cerc, o coardă AB în acest cerc, mijlocul C al lui AB. Se duc prin C două coarde oarecare MN şi PQ. Dreapta MP taie AB în S, dreapta NQ taie AB în T.

a) Cum se poate construi cu rigla polara lui C faţă de cerc?

b) Să se arate că această polară este paralelă cu AB.

c) Să se deducă de aici că C este mijlocul segmentului ST.

2216. Fie un triunghi isoscel şi m, n lungimile medianelor lui.

a) Să se găsească expresia suprafeţei triunghiului în funcţie de m şi n.

b) Cum trebuie să fie întregii m, n astfel încît suprafaţa triunghiului să fie un număr întreg?

2217. Se consideră ecuaţia:

$$16\ x^2 - 2\ (m + 1)\ x + 4 - m = 0.$$

a) Presupunînd că x este sinusul unui unghi oarecare, să se spună cîte rădăcini acceptabile are ecuaţia dată.

b) Presupunînd că x este sinusul unui unghi al unui triunghi, să se spună cîte rădăcini acceptabile are ecuaţia dată.

2218. Se consideră un triunghi ABC, pe laturile lui se iau în acelaş sens lungimile egale BD şi CE, pe latura AB începînd din B spre A se aşează $BF = AC$, iar pe AC la fel, $CG = AB$.

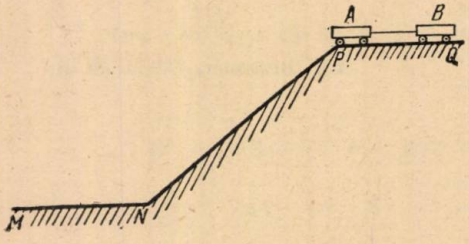
a) Să se arate că FG trece prin intersecţia dreptelor BE şi CD.

b) Să se arate că mijloacele segmentelor AF, AG, BE şi CD sînt colineare.

2219. Se consideră un triunghi ABC şi o dreaptă D. Fie α mijlocul segmentului determinat pe dreapta D de unghiul BAC şi A_1 punctul în care $A\alpha$ taie latura BC. Analog se obţin punctele B_1 şi C_1. Să se arate că punctele A_1, B_1 şi C sînt colineare.

2220. Să se demonstreze că orice dreaptă care trece prin unul din centrele a două cercuri ortogonale determină prin intersecţiile ei cu cele două cercuri o diviziune armonică.

2221. Într-un cerc, prin mijlocul C al unei coarde AB, se duc coardele MN şi PQ. Fie D şi E intersecţiile dreptei AB cu dreptele PN şi MQ, respectiv. Să se demonstreze că segmentele DC şi CE sînt egale.



2222. Două cărucioare A şi B de cîte 2 kg fiecare sînt legate printr-o sfoară lungă de 2 m. Ele se află pe planul orizontal PQ urmat de planul înclinat NP lung de 4 m, care este apoi urmat de planul orizontal MN. Diferenţa de nivel între cele două plane orizontale este 40 cm. Se aşează căruciorul A la capătul de sus al planului înclinat şi se lasă liber.

a) Care va fi poziţia şi viteza celor două cărucioare după 6 secunde?

b) Cînd şi unde se vor întîlni aceste cărucioare?

PROBLEME PROPUSE

2223. O locomotivă cîntărind 150 tone trage un tren format din 6 vagoane de cîte 50 tone fiecare.

a) Trenul pornind din repaos capătă o mişcare uniform accelerată şi atinge o viteză de 5 m/s la capătul unui parcurs de 100 m. Să se calculeze forţa de tracţiune exercitată de locomotivă asupra trenului, considerînd frecările neglijabile.

b) În realitate, frecările există şi cresc cu viteza în aşa fel încît locomotiva trebuie să debiteze o putere de 1200 CP pentru a menţine pe drum orizontal o viteză de 25 m/s. Care este valoarea forţelor de rezistenţă la această viteză?

c) Trenul urcă o rampă care are o pantă de 2 %. Ştiind că forţele de frecare sînt proporţionale cu patratul vitezei, se întreabă ce viteză va atinge trenul pe această rampă dacă locomotiva va da tot o putere de 1200 CP?

d) Locomotiva fiind alimentată cu cărbune care dă prin ardere 6000 kcal pe kilogram de cărbune ars, se întreabă cît consumă locomotiva pe oră dacă numai 7 % din căldura dată de cărbune este transformată în lucru mecanic.

(Cercul de Fizică din Capitală, 1956)

2224. Un automobil cîntăreşte 800 kg, iar forţa de frînare maximă este de 250 kg. Care este viteza maximă admisibilă pentru ca automobilul să poată fi oprit pe o distanţă de 10 m?

(Cercul de Fizică din Capitală, 1956)

2225. Să se afle două numere $abcd$ şi $abgg$ de cîte 4 cifre fiecare astfel ca

$$abcd + abgg = 3903 \text{ şi } abccd + ggba = 7539.$$

C. V. Costăchescu

2226. Centrele feţelor unui dodecaedru regulat sînt vîrfuri ale unui icosaedru regulat, iar centrele feţelor unui icosaedru regulat sînt vîrfurile unui alt dodecaedru regulat. Dacă lungimea muchiei icosaedrului este m, să se calculeze lungimile muchiilor celor două dodecaedre regulate.

C. Ionescu-Ţiu

2227. Pe o sferă de rază R sînt aşezate n sfere egale de raze r astfel că în orice grup de trei sfere vecine, sferele sînt tangente între ele şi tangente sferei de rază R. Să se calculeze raportul $\frac{R}{r}$ în cazurile cînd n este 6 sau 12.

C. Ionescu-Ţiu

2228. Dacă

$$E_1 = \frac{\left(1 + \sqrt{1-x^m}\right)^n + \left(1 - \sqrt{1+x^n}\right)^m}{\left(1 - \sqrt{1-x^m}\right)^n + \left(1 - \sqrt{1-x^n}\right)^m},$$

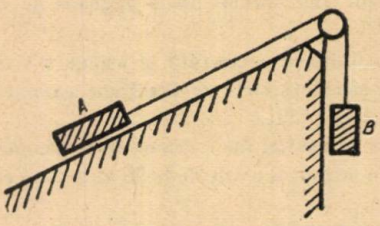
$$E_2 = \frac{\left(1 + \sqrt{1-x^m}\right)^n - \left(1 - \sqrt{1-x^n}\right)^m}{\left(1 - \sqrt{1-x^m}\right)^n - \left(1 - \sqrt{1-x^n}\right)^m},$$

să se arate că $E_1 + E_2 = 0$.

Ion I. Cristea, elev, Constanţa

2329. Un corp A de masă $M = 800$ g este aşezat pe un plan înclinat pe care poate luneca fără frecare. Acest corp este fixat la una din extremităţile unui fir trecut peste un scripete, la cealaltă extremitate fiind atîrnat un corp B de masă $m = 700$ g.

a) Care trebuie să fie înclinarea planului pentru ca sistemul lăsat liber să capete o accelerație de 196 cm/s², mișcarea masei B avînd loc de sus în jos?



b) Este posibil să avem o accelerație de aceiași mărime dar de sens opus?

c) În ce caz accelerația sistemului va fi de 490 cm/s².

Se vor neglija frecările, masa scripetelui și se va lua $g = 980$ cm/s².

(Cercul de Fizică din Capitală, 1956)

2230. Lungimea țevii unei puști este 0,8 m, iar viteza glonțului la ieșire este 600 m/s. Presupunînd că forța exercitată de gaze asupra glonțului este constantă, iar greutatea glonțului este de 70 g, se cere să se spună care este această forță și cît durează drumul glonțului în interiorul țevii.

(Cercul de Fizică din Capitală, 1956)

2231. Un corp este aruncat de jos în sus cu viteza de 85 m/s. După 12 s se aruncă după el un alt corp. Care trebuie să fie viteza inițială a acestuia din urmă pentru ca cele două corpuri să se întîlnească cînd cel de-al doilea este la înălțimea maximă? Se va lua $g = 9{,}8$ m/s².

(Cercul de Fizică din Capitală, 1956)

2232. Fie A_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1$) puncte fixe situate pe o aceiași dreaptă (Δ) și O un punct fix exterior lui (Δ). Dacă M este un punct oarecare pe (Δ) și R_k raza cercului circumscris triunghiului MOA_k, să se demonstreze că:

$$\frac{R_k^n}{R_0 R_1 \cdots R_{k-1} R_{k+1} \cdots R_{n-1} R_n} = \text{const.} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Valeriu Udrescu, student

2233. Să se arate că expresia

$$E = \frac{11 \cdot 16^{2n} + 13 \cdot 18^n - 7}{4 \cdot 15^{2n+1} + 19^{2n+3}}$$

se simplifică cu 17 oricare ar fi n întreg și pozitiv.

M. I. Popescu, student, București

2234. O generatoare AB a unui cilindru circular este împărțită în n părți egale prin punctele $A_1, A_2 \ldots, A_{n-1}$, punctul A_1 fiind cel mai apropiat de A. În punctul diametral opus lui A, se duce tangenta la cercul de bază al cilindrului și prin această tangentă și punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ se duc respectiv planele $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

Să se arate că porțiunile din cilindru cuprinse între baza cilindrului și P_1, între P_1 și P_2 și în general, între P_i și P_{i+1}, sînt echivalente ($i \leqslant n-2$).

Corneliu Georgescu, Craiova

2235. Să se arate că

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17} = \arcsin \frac{77}{85}.$$

George Galațki, elev, Tîrgoviște

2236. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{și} \quad \frac{a-x}{m-x} = \frac{b-y}{n-y},$$

apoi să se arate că:

$$\left(\frac{Aa+Bb+C}{Am+Bn+C}\right)^2 = \frac{(a-x)^2+(b-y)^2}{(m-x)^2+(n-y)^2}.$$

C. Ionescu-Țiu

2237. Să se determine parametrul a întreg și pozitiv astfel ca sistemul

$$x^3 + y^3 = axy, \tag{1}$$

$$(a-2x)\,y^2 = (2a+x)\,x^2 \tag{2}$$

să aibă soluții în numere întregi.

N. C. Ciomu, profesor, București

2238. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin a - 4\sin^3 a - \sin 5a}{5\cos a - 4\cos^3 a - \cos 5a} = \frac{5\sin a - 4\sin^3 a - \sin 5a}{\cos a - 4\cos^3 a - \cos 5a} = -\frac{\operatorname{tg} 2a\,(1+\operatorname{tg}^2 a)^2}{2\operatorname{tg} a \operatorname{tg} 4a}.$$

Albăstroiu I. Petre, student, București

2239. Să se construiască un triunghi cunoscînd: 1) două mediane și o înălțime; 2) două înălțimi și o mediană.

Gh. Buicliu

2240. Să se arate că $4^n + 15n - 1$ se divide cu 9.

Lupuțiu Ion, student, București

2241. Să se rezolve ecuația

$$48x^3 - 4n(n+1)(3n^2+7n+8)x^2 + 4n^2(n+1)^2(n^3+3n^2+4n+1)x - n^4(n+1)^4(2n+1) = 0.$$

H. Dăscălescu, profesor, Ploești

2242. În triunghiul oarecare ABC cu înălțimile AA_1, BB_1, CC_1 se proiectează punctele B_1 și C_1 pe latura BC respectiv în M și N.

Să se demonstreze că $MA_1 \cdot NC_1 = MB_1 \cdot NA_1$.

Dinu Gheorghe, elev, București

2243. Să se arate că

$$p \geqslant 3R^3 \cdot \sqrt{\sin A \sin B \sin C},$$

unde A, B, C sînt unghiuri, iar p și R semiperimetrul și raza cercului circumscris triunghiului.

Roșianu C. Dragomir, student, București

2244. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{S_n}{a_1 a_n},$$

unde $a_1, a_1, \ldots, a_n$ sînt niște numere pozitive în progresie aritmetică, iar S_n suma lor.

N. Gheorghiu

2245. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de tangență ale cercului încris triunghiului ABC cu laturile BC, CA, AB. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd punctele de intersecție ale bisectoarelor în triunghiurile AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1.

Nicolae Alexandru, student, București

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI*)

E: 819. Tata şi fiul lucrează împreună într-o cooperativă meşteşugărească şi îşi fac socoteala că vor primi 935 lei dacă primul lucrează 26 zile şi al doilea 19 zile. Datorită împrejurărilor, tata lucrează numai 20 zile şi ca să primească aceeaşi sumă, fiul lucrează 29 zile. Ce salariu zilnic avea fiecare?

Gh. Mazilu

E: 820. Se dă un triunghi echilateral ABC şi se ia un punct oarecare M pe BC. Paralelele duse din M la laturile triunghiului întîlnesc pe AB şi AC respectiv în D şi E. Fie L şi Q mijloacele segmentelor CD şi BE.

Să se arate că triunghiul MQL este echilateral.

I. Drăgoescu, student, Timişoara

E: 821. Un trapez $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare în punctul E este înscris în cercul de centru O. Să se arate că segmentele EM şi ON sînt egale, M şi N fiind mijloacele bazelor AB şi CD.

Gh. Dobrotescu,

E: 822. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2 \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2},$$
$$ax + by = a^2 + b^2.$$

I. A Rus, student, Cluj

E: 823. Se dau numerele întregi D şi d a căror sumă este 1000. Prin împărţirea lui D la d se obţine cîtul un număr întreg q şi rest tot q. Să se afle D, d şi q.

* * *

E: 824. Să se verifice identitatea:

$$(x+y-z)^2 - (y-z-t)^2 + t^2 - x^2 = 2x(y-z-t) + 2t(x+y-z).$$

H. Dăscălescu, Ploeşti

E: 825. În timp ce un tren trece pe lîngă un observator imobil, un alt observator mobil face 6 paşi; iar cînd trenul traversează o gară lungă de 210 m acelaşi observator face 20 paşi. Să se afle lungimea trenului.

Gh. Dobrotescu, Predeal

E: 826. Să se verifice identitatea:

$$(x-y)^3 + (x+z)^3 + 3(x-y)(x+z)(2x-y+z) =$$
$$= x^3 + (x-y+z)^3 + 3x(x-y+z)(2x-y+z) =$$
$$= (2x+z)^3 - y^3 + 3y(2x+z)(y-2x-z).$$

H. Dăscălescu

E: 827. Să se determine E din relaţia:

$$\frac{E_1+E_2}{E_1-E_2} + 2E = \sqrt{2}+1,$$

în care $E_1 = \sqrt{1{,}5+\sqrt{2}}$ şi $E_2 = \sqrt{1{,}5-\sqrt{2}}$.

* * *

E: 828. Un depozit de vinuri trimite unei cooperative săteşti 300 l vin de 13 grade tărie. Responsabilul cooperativei gradează vinul la primire şi găseşte numai 12 grade. Să se afle cît vin a fost înlocuit cu apă.

Gh. Mazilu

---

*) Clasa V-a (E: 819, 823, 825, 828, 832,); VI-a (E: 814, 826, 829); VII-a (820, 821, 822, 827, 830, 831, 833, 834, 835).

E: 229. Dintr-un oraş pleacă în acelaşi timp spre un sat un biciclist şi un om pe jos; primul merge în medie cîte 12 km pe oră şi al doilea cîte 5 km pe oră.

Peste cîte ore drumul ce-l mai are de parcurs biciclistul este a treia parte din drumul parcurs de pieton, dacă distanţa între oraş şi sat este de 20,5 km?

E: 830. Să dă $\alpha = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$ şi $\beta = \sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}$

şi se cere să se arate că dacă $\alpha^4 + \beta^4 = 2^4$, atunci $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \pm 2$.

* * *

E: 831. Se dau expresiile:

$$A = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1,$$
$$B = x^3 - 8x^2 + 13x - 6.$$

Să se arate că

$$AB = (x - 1)^4 (x^2 + 1) (x - 6).$$

Şt. D. Donescu, student, Bucureşti

E: 832. Într-un magazin de stat s-a vîndut stambă şi pînză pentru aceeaşi valoare. Ştiind că s-au vîndut cu 40 metri pînză mai mult decît stambă şi că un metru de stambă costă 18 lei, iar unul de pînză 14 lei, să se afle cît s-a încasat pentru toată vînzarea.

* * *

E: 833. Să se descompună în factori expresia:

$$E = ax^2 (y - b) + xy (b^2 - a^2) + y^2 b (a - x) + ab (ax - by).$$

I. A. Rus, student, Cluj

E: 834. Să se arate că dacă $x = a + r\sqrt{1 - m^2}$ şi $y = b + rm$, atunci rezultă

$$y - b = \frac{m(x - a)}{\sqrt{1 - m^2}} \text{ şi } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

C. I. Ţ.

E: 835. Dacă $\frac{x - a}{u - a} = \frac{y - b}{v - b} = \frac{z - c}{w - c}$, să se arate că:

$$\frac{x - u}{x - a} = \frac{y - v}{y - b} = \frac{z - w}{z - c} \quad \text{şi}$$

$$\frac{a - u}{u - x} = \frac{b - v}{v - y} = \frac{c - w}{w - z}.$$

C. I. Ţ.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENŢIAŢI

Pînă la 1 februarie 1956 s-au mai evidenţiat din localităţile care încep cu iniţialele I — Z, următorii rezolvitori de probleme:

Morărescu Gheorghe (cl. 10 Roman), *Stoian Mircea* (cl. 8 Oraşul Stalin), *Petrescu M. Răzvan* (cl. 10 Ploeşti), *Pupăzan Nicolae* (Sibiu), *Lungu N. Liviu* (cl. 9 Ploeşti), *Grigorescu D. Ion* (cl. 10 R. Vîlcea), *Tudor N. Constantin* (cl. 10 Tîrgovişte), *Ţugulea Eugen* (cl. 10 R. Vîlcea), *Jilăveanu S. Gheorghe* (Mediaş), *Voicu N. Traian* (cl. 10 Slatina), *Costinescu Anca* (cl. 9 Iaşi), *Văgăunescu George* (cl. 10 Ploeşti), *Gervescu M. Ioan* (cl. 8 P. Neamţ). *Şerbănescu N. Tiberiu* (cl. 10 Slatina), *Popescu Călin* (cl. 10 Ploeşti), *Cuşmaru Ilie* (cl. 9 Iaşi), *Paulescu N. Dan* (cl. 10 R. Vîlcea), *Stănciulescu M. Mihai* (cl. 10 Tîrgovişte), *Dincă Nicolae* (cl. 9

Ploești), *Păpușoiu Gh.* (cl. 9 Lugoj), *Lazăr Gheorghe* (cl. 10 R. Vîlcea), *Alexa I. Dumitru* (absolvent Iași), *Chirică Andrei* (cl. 10 Ploești), *Nerodea Tiberiu* (cl. 10 Timișoara), *Damian Șerban* (cl. 10 Ploești), *Sofron Gavril* (cl. 9 Pitești), *Cimpoeșu Teodora* (cl. 10 P. Neamț), *Jurcă Valeria*(cl.10 Ploești), *Niculescu M. Iulian* (cl.10 T. Măgurele) și *Turiga M. Const.* (absolvent).

IAȘI. — *Școale medie nr.* 1 *de băieți*, Clasa IX-a. *Cușmaru Ilie* (1826, 829, 830, 832, 834, 837, 838, 843, 848, 853, 856, 860—863, 866, 871, 872, 875, 876, 882, 884, 898, 899, 908, 911, 913, 923, 924, 928, 935, 938, 940, 944), Feldman Milu (1847, 848, 851, 856, 858, 860, 861, 866, 872, 875, 876, 882, 898, 899, 901, 908, 911, 913, 940), Iticovici Mihail (1809, 814, 816, 826, 830—832, 834, 837, 843, 844, 847, 848, 851, 858, 860, 871, 875, 876, 898, 908, 913, 924, 935, 940, 943, 944), Popescu Claudiu (1851, 872, 874—876, 882—884, 913, 914, 924, 938, 940, 943); clasa X-a. Brînză M. Alexandru (1831, 832, 834, 864, 874—876, 879, 881—884, 891), Lupu Șura (1830, 835, 845, 872, 877, 882, 884, 899, 901, 902), Nour Vasile (1805, 814, 821, 841, 848, 851, 860, 861, 863, 864, 866, 899, 908, 911); absolvent **Alexa I. Dumitru** (1817, 834, 836, 837, 841, 843, 858, 874, 875, 877, 882—884, 886, 871, 891, 898—901, 903, 914, 915, 917, 920, 922, 924, 933, 937, 938, 940, 942, 945, P).

Școala medie «Mihail Sadoveanu». Clasa IX-a. Cuza Constantin (1830, 832, 836, 860—862, 866, 872, 875, 901, 908), Chișleag Florin (1830, 871, 875, 877, 882, 884, 901, 935, 940, 944), Munteanu Constantin (1809, 831, 838, 844, 848, 851, 856, 860, 866, 871, 872, 875, 876, 882, 884, 898, 901, 908, 913), Sor Liber (1826, 837, 838, 843, 847, 848, 856, 857, 860, 861, 863, 866, 872, 875—877, 884, 898, 899, 901, 908, 911, 913); Clasa X-a. Antonovici C. (1814, 821, 824, 834, 826, 841, 844, 848, 851, 861, 866), Caşcaval Constantin (1809, 814, 833, 841, 844, 861, 862, 866, 875—878, 881, 882), Cheorghievici Pamfil (1805, 814, 848, 851, 899, 908, 911), Roman Valeria (1809, 814, 817, 833, 841, 844, 861, 862, 864, 875, 876, 878, 881, 898), Stegărescu Sorin (1804, 805, 814, 821, 841, 844, 848, 851, 860, 861, 863, 864, 866, 899, 908, 911).

Școala medie Clasa VIII-a. Merchez Constantin (1938, 940, E: 736, 740—743, 745, 746); clasa X-a. Panțuru Dumitru (1830, 831, 833, 835, 844, 846, 874, 875, 877, 878, 881, 882, 886, 891, 908, 911, 914, 917, 924, 931, 938, 940, 944, 945), Pavel P. Ioan (1818, 831, 842, 846, 851, 859, 864, 875, 877, 878, 881—884, 891).

Școala medie de fete nr. 1. Clasa IX-a. **Constinescu Anca** (1804, 809, 814, 816, 826, 829, 830—832, 834, 835, 837, 841, 843—847, 858, 860—863, 866, 871, 872, 875—877, 882—884, 898, 899, 901, 902, 908, 911, 913).

LUGOJ. Școala medie băieți nr. 2, clasa VI-a. Florea Doina (E: 694, 700, 703, 707, 708, 711, 718, 722, 723, 727, 729, 732); clasa IX-a: Boroancă Ioan (1838, 842, 844, 851, 866, 867, 875, 877, 878. 882—884, 940, 944), Daba Dumitru (1816, 819, 831, 843, 845, 847, 866, 871, 874—877, 879, 882—884, 886, 898, 914, 915, 924, 940, 943), Florea Dorel (1816, 819, 874—877, 879, 882—884, 900, 914), **Păpușoiu Gh.** (1830, 845, 848, 853, 861, 874—877, 879, 882—884, 886, 897, 898, 901, 908, 911, 913—915, 920, 923, 924, 937, 940, 943, 944, 945, P), Porumbaru Eugen (1842, 851, 862, 863, 866, 877, 882, 924, 940, 944); clasa X-a. Porumbaru Silviu (1875—878, 881, 882, 384, 914, 920, 924).

MEDIAȘ. Clasa VIII-a. **Jilăveanu S. Gheorghe** (1827, 828, 830, 831, 833—838, 840, 844, 848, 851, 856, 858—862, 864, 865, 870, 874—887, 893, 894, 898, E: 687, 697, 704, 709, 713—716, 718, 720, 722, 724, 727, 729, 730—733), Stănescu Dumitru (1833, 835—837, 844, 859, 875, 881, 883, 884, 891, 892, 914, 915, 920, 924, 931, 940).

NĂSĂUD. Clasa X-a. Roman Fabian (1831, 834, 835, 838, 848, 850, 851, 859, 862, 866, 874, 875, 878, 882, 883, 891), Sîngeorzan Emil (1831, 834, 835, 844, 866, 872, 874, 875, 877, 878, 881—885, 891, 893, 924, 927, 928).

ORADEA. Clasa VII-a. Gal Iuliana (E: 629, 653, 668, 678, 679, 680, 684, 685, 694, 697, 700, 703, 704, 705, 715); clasa X-a. Buciuman Cornel (1816, 830—837, 843, 844, 848, 861, 866).

ORAȘUL STALIN. *Școala medie nr.* 1. Clasa VIII-a. **Stoian Mircea** (1813, 914, E: 657, 659, 677, 679—685, 689—695, 697, 700, 701, 703, 707—711, 713—715, 718, 722, 724—

727, 729, 731—733, 735, 737—740, 742—745), Tarţa Mircea (1851, E: 703, 707, 708, 714, 718, 721, 725, 727, 729, 735, 738); clasa IX-a. Ciurea Vlad (1784, 792, 800, 804, 816, 835, 844, 851, 914, 915, 940, 943), Munteanu Petru (1730, 792, 838, 843, 851, 874, 877, 882—884, 915), Budiu I. Pavel (1826, 875—878, 881—884, 938, 940, 943), absolvent Munteanu Mihai (1833, 835, 837, 838, 844, 849, 857, 861—863, 866, 871, 874, 875, 878, 881—883, 889, 891, 894), *Şcoala medie de fete nr. 5.* Clasa X-a. Petraş Ileana (1831, 835, 836, 875, 881, 882, 884, 891, 915, 917, 920).

PIATRA-NEAMŢ. *Şcoala medie de băieţi nr. 1.* Clasa VIII-a. **Gervescu M. Ioan** (1848, 849, 851, E: 687, 708—711, 713—716, 718—733, 735—740, 742—745). *Şcoala medie de fete nr. 2.* Clasa X-a. Agapei Rodica (1830, 832, 834, 835, 844, 874—878, 880—882, 884, 885, 889—894, 898), **Cimpoeşu Teodor** (1830, 832, 834, 837, 845, 874—878, 880—886, 889—892, 894, 900, 901, 912, 916, 919—923), Gălăţeanu Sidonia (1830, 832, 834, 835, 837, 844, 875—878, 880—883, 885, 886, 889—892, 900, 901, 915—917, 919, 920, 922, 938), Marcovici Ancuţa (1823, 830, 834 837, 874, 876, 880, 881, 883, 885, 886, 889, 890, 900, 915, 916, 923, 924), Munteanu Lelia (1823, 830, 834, 835, 837, 874—876, 878, 880—882, 884—886, 889, 890,900, 917, 919, 922—924), Ranga Elena (1823, 835, 837, 874—876, 881, 882, 884—886, 889, 890, 915, 919, 920, 922, 924), Răţoi Cornelia (1877, 880—882, 884, 898, 901, 916, 917, 922, 938), Tătaru Petrica (1823, 835, 874—876, 878, 880, 882, 884, 885, 916, 917, 919, 922—924, 931).

PITEŞTI. — Clasa IX-a. Olteanu D. Constantin (1816, 818, 822, 838, 839, 843, 844, 847, 848, 851, 866, 871, 872, 875, P), **Sofron Gavril** (1830, 832—836, 841—843, 845, 848, 863, 866, 868, 872, 875, 877, 878, 881—884, 891, 893, 904, 908, 924, 931, 940, 941); clasa X-a. Dumitru Gh. Stan (1812, 814, 819, 827, 830, 831—835, 837, 838, 841, 842, 844, 847—849, 851, 859, 864, 866, 873—878, 883, 884), Marin Ion (1830—835, 837, 841, 843—845, 859, 864, 866, 871).

PLOEŞTI. Clasa VII-a. Dăscălescu H. Mircea (1842, E: 708-711, 714, 718-720, 722, 727, 729, 731, 738, 742); clasa VIII-a. Constantin Gelu (1851, E: 708-710, 714, 725, 727, 729-731), Constantinescu I. Mircea (1851, E: 687, 709, 715, 718, 725, 727, 731, 732, 735, 738), Constantinopol Alexandru (E: 709, 715, 722, 724, 725, 727, 729-733), Ianovitz Rudolf (1816, 819, E: 691, 694, 697, 700, 703, 704, 714, 718, 725, 727, 731), Ionescu Ioan (1851, E: 687, 693, 708, 709, 714, 724, 727, 729, 735, 737, 738, P), Magdu Marian (1848, 851, 867, E: 687, 709, 714, 715, 718, 725, 727), Popescu A. Ioan Adrian (1832, 862, 875, 915, E: 702, 729-732, 735, 738); clasa IX-a. Bageac I. Constantin (1831, 835, 851, 871, 875, 877, 882, 889, 915, 938, 840, P), Bărbieru Pană (1814, 830, 835, 844, 847, 848, 851, 866, 874-876, 880, 882, 891), Căsăndroiu C. Tudor (1804, 814, 816, 822, 830-832, 838, 843, 844, 847, 851, 866, 871, 875, 876, 882, 884, 898, 908, 911), Cojocaru P. Alexandru (1830, 844, 851, 875, 877, 878, 881-883, 915, 938), Delibaş Constantin (1833-835, 837, 843-845, 847, 871, 874-878, 881-884, 890, 914, 915, 921, 924, 931, 938, 940, 943-945, P), *Dincă Nicolae* (1830, 833, 835, 837, 843-835, 866, 871, 874-878, 880, 882, 890, 891, 898, 913, 915, 919, 922-925, 927, 938, 940, 941, 943, 945, P), Drăgan Radu (1831, 842, 871, 874, 889, 911, 920, 922, 940, 943, 944) Dumitrescu Marian (1814, 816, 819, 833, 835, 836, 837, 847, 851, 866, 875-878, 881-884, 894, 920, 926), Georgescu P. Adrian (1831, 835, 843, 844, 851, 871, 875, 877, 884, 889, 915, 940, 943), Gheorghe A. Ioan (1830, 831, 838, 843, 851, 866, 871, 875, 876, 882-884, 914), Gumeni I. Corneliu (1842, 847, 871, 875, 876, 882, 883, 914, 938, 940, 945), Leca Aurel (1831, 835, 843, 844, 851, 871, 875, 877, 880, 884, 889, 914, 940,), *Lungu N. Liviu* (1762, 809, 811, 822, 830, 831, 833, 834, 835, 837, 838, 843-845, 847, 848, 852, 862, 866, 871, 875-870, 881-884, 886, 891, 893, 894, 898, 914, 915, 922-925, 931, 940, 944), Marusi Bruno (1831, 834, 844, 851, 871, 872, 877, 882, 884, 915, 940,), Mihăilă S. Ioan (1804, 816, 819, 830, 831, 851, 866, 867, 875, 877, 878, 881, 882), Minasian Eduard (1830, 835, 843, 844, 871, 874—876, 880, 898), Nedelcu D. Florin (1830, 835, 848, 851, 871, 878, 882, 915, 924, 931), Nedelcu I. Haralambie (1830, 831, 835, 837, 843—845, 847, 851, 866, 875, 878, 882, 883, 914, 915, 924, 931, 938, 940), Savu Naum (1804, 814, 816, 819, 830, 831, 851, 866, 867, 882), Stănescu H. Constantin (1804, 814, 816, 819, 830, 831,

851, 866, 875, 878, 881—883); clasa X-a. Aldea S. Mihai (1829—838, 841—845, 847—849, 851, 857, 859, 861, 866, 875—878, 881, 882, 884), Ana Alexandru (1830, 835, 838, 841, 844, 851, 872, 874, 875, 877, 882, 891), Angelescu P. Alexandru (1455, 618, 804, 830, 831, 833, 835—838, 841—844, 847—849, 851, 859, 861, 866), Anton C. Alexandru (1830, 835, 838, 841, 844, 848, 851, 872, 875, 877, 882, 920), Arion C. Dan (1830—838, 841, 842, 844, 845, 847, 851, 859, 867), Bădescu Adrian (1830—832, 834, 835, 838, 844, 848, 851, 867), Bogdan P. Mircea (1814, 816, 819, 820, 822, 824, 827, 831—838, 841, 843—849, 851, 856, 857, 859, 861, 862, 871, 872, P), Bologa Virgiliu (1830, 831, 833—838, 844, 851, 874, 876, 877, 881, 882, 884, 886), **Chirică Andrei** (1829—838, 841, 843—849, 851, 856, 857, 859, 861, 862, 866, 871, 872, 874—878, 881, 882, 884), Colonati Cristian (1829, 830, 833, 835—839, 841, 843—845, 847, 851), Chivu C. Dumitru (1830—838, 844, 845, 851, 861, 874—877, 880—884, 891), Costache Viorel (1830, 833, 835, 837, 848, 851, 874, 876, 877, 882, 920), Costeanu I. Sorin (1830—835, 837, 841, 844, 851, 861, 866, 875, 881, 915), Curelea D. Iulian (1830, 831, 833, 835, 837, 838, 844, 848, 851, 872, 875—877, 882, 920, P), **Damian Şerban** 1814, 815, 819, 822, 824, 829—838, 841, 843, 846, 848, 857, 859, 861, 862, 867, 871, 874—878, 881—884), Dinescu Sorin (1831, 833, 834, 836, 837, 841—844, 849, 859, 864, 866, 867), Dinu Constantin (1830, 831, 833, 835, 837, 838, 842—844, 848, 851, 859, 864, 866, 867), Dodun Ioan (1830, 831, 833—838, 841, 844, 845, 848, 851, 859, 860, 864, 866, 875, 876, 882, 884, 886—888, 889, 891, 894, 904, 905), Dumitrescu Gheorghe (1830, 831, 833, 835—837, 844, 861, 874, 877, 880, 882, 886, 891), Dumitrescu Nicolae (1618, 830, 831, 833, 835—837, 841—844, 847—849, 859, 861, 866), Enache C. Gheorghe (1830—838, 842, 844, 848, 851, 882—884), Ene V. Gheorghe (1830, 831, 833, 835, 838, 844, 851, 875, 877, 880, 882—884, 914, 920, 924), Gaşcu Mihai (1831, 833—838, 844, 845, 848, 751, 861, 866, 867), Georgescu Ovidiu (1830, 831, 835—838, 844, 861, 874, 876, 877, 880—882, 886, 891), Georgescu Sorin (1830—835, 837, 838, 841—844, 851, 866, 867), Heinrich Paul (1830—838, 841, 859, 861, 871, 874—878, 882), Iancu Petre (1830—833, 835, 837, 838, 851, 874, 876, 877, 880—885, 891), Ionescu Mircea (1829—838, 841, 843—845, 847, 848, 851, 859, 861, 862, 867, 872, 874—878, 880—884, 886, 891), **Jurcă Valeria** (1762, 828—838, 840—849, 851, 852, 859, 861—864, 866, 867, 871, 872), Leonte V. (1831, 833, 835, 836, 838, 841, 844, 848, 849, 851, 861, 875—877, 881, 882, 884, 891), Lipcan Sergiu (1830, 832, 848, 851, 861, 862), Mateescu I. Mircea (1822, 829—837, 841, 845, 875—877, 880—882, 884, 891), Mocanu Florin (1830, 831, 833, 835—837, 841, 842, 844, 847—849, 851, 859, 861, 866), Niţă I. Virgiliu (1830—833, 835—838, 844, 851, 874, 875, 877, 880—882, 884, 924), Pogiţă Cornel (1830, 832—838, 844, 851, 859, 861, 862, 877), **Petrescu M. Răzvan** (1806, 811, 814—816, 819—822, 824, 826, 827, 829—828, 840—849, 851, 852, 855—857, 859, 861—864, 866—868, 871, 872), Pop Mihai (1831, 833—835, 837, 840, 841, 844, 861, 867), *Popescu Călin* (1618, 804, 830, 831, 833, 835—838, 841—844, 847—849, 851, 852, 859, 861, 866, 875—878, 881, 882, 884, 897, 898, 904, 906, 911, 913), Rădulescu Gheorghe (1830—838, 843, 844, 847, 851, 861, 862, 866, 867), Roman Barbu (1818—822, 824, 830—832, 834—838, 841, 843—846, 848, 851, 852, 861, 865—868, 871), Şerbănescu Victor (1829—837, 843, 844, 847, 859, 861, 862, 871, 872), Spătaru Dinu (1831, 833, 835, 836, 838, 843, 848, 849, 851, 859, 861, 876, 877, 881), Ştefănescu D. Ion (1815, 830—834, 836—838, 841, 843, 847, 866, 867, 875, 877, 884), Stoica I. Ioan (1830, 831, 833, 835—837, 841, 844, 847—849, 851, 859, 861, 866), Szombath Alexandru (1829—835, 837, 841, 842, 875, 882), **Văgăunescu George** (1455, 618, 783, 807, 808, 814, 816, 819, 822, 824, 827, 830—833, 835—838, 841—849, 851, 857, 859, 861, 862, 866, 871, 872, P), Vasilescu Marian (1830—833, 835—838, 844, 876, 881, 882, 891), Viniţchi Victor (1830, 833—837, 844, 875—877, 880, 881, 883, 884, 915, 917, 920, 924, 940, 943, 944, 945), Vizireanu Valeriu (1835, 838, 875, 882, 891, 915, 920, 922, 924, 926, 940, 944), Voicu L. Aurică (1830, 833, 835, 837, 838, 844, 848, 851, 875—877, 882, 884, 920).

Şcoala medie de fete nr. 2 «A. Toma». Clasa VIII-a. Mateescu Doina (E: 708—710, 716, 718, 721, 722, 725, 727, 729, 731), Mihai Reveica (1875—877, 881, 931, 940, 944, E: 725, 727, 729, 730, 731, 737, 738, 744, 745); clasa X-a. Lepuş Mioara (1830, 831, 835—

838, 844, 861, 874, 876, 877, 880—882, 891), Manole I. Ioana (1829—837, 841, 875, 880), Mezincescu Anca (1830, 835, 844, 875, 876, 880—882, 884, 914, 920), Niculescu Teodorina (1805, 830, 833, 835, 844, 872, 878, 881, 884, 915, 917); absolvenţi: Gorea Aristide (1575, 885, 887, 919, P), Turiga M. Constantin (1830, 831, 833, 835—838, 840, 841, 844, 845, 847, 849, 851, 859, 875—878, 881—884, 886, 888, 894, 914, 919, 924—926, 940, 943).

RÎMNICUL VÎLCEA. — *Şcoala medie de fete nr. 3.* Clasa VIII-a. Andrei C. Gheorghiţă (1851, 867, E: 704, 707—710, 714, 718); **Şcoala medie de băieţi.** Clasa X-a. Abagiu V. Dorel (1832—834, 842, 844, 845, 848, 851, 858, 861, 875—877, 880—882, 884, 886, 917, 920, 924, 931, 935, 940—945), Băiaşu D. Nicolae (1832, 833, 835, 837, 844, 851, 861, 876, 877, 880—884, 917, 920, 935, 939—943), Ben Gh. Ion (1832—835, 837, 841, 843—845, 847, 858, 861, 871, 874, 876, 881, 883, 891, 908, 917, 920, 924, 938, 940), Boboacă C. Mihai (1833, 835, 837, 841, 842, 847, 876, 881—883, 891, 894, 917, 920, 938), Bojenescu Cornel (1800, 832—834, 837, 842, 844, 848, 851, 858, 875—877, 880, 882, 884, 886, 901, 917, 920, 924, 931, 935, 940, 942, 943), Burduază A. Constantin (1833, 835, 844, 851, 876, 884, 917, 920, 939, 940), Căpăţînă Severian (1827, 832, 834, 835, 837, 845, 851, 880, 884, 887, 901, 908, 911, 920, 924, 931, 935, 940, 942, 943), Cerăceanu C. Gheorghe (1830—832, 834, 835, 837, 838, 843—845, 847—849, 851, 861, 872, 875, 876, 882, 891, 891, 917, 920, 924, 938, 940, 943), Chiriţă Silvestru (1830—835, 837, 844, 845, 847, 851, 858, 861, 871, 875, 877, 880—882, 884, 890, 901, 908, 911, 917, 920, 924, 931), Cornilescu Radu (1832—834, 837, 842, 844, 848, 851, 858, 861, 875—877, 880—882, 884, 886, 901, 908, 917, 920, 924, 931, 935, 940—945), Cosma S. Aron (1833, 935—837, 844, 849, 851, 861, 876, 877, 882, 883, 920), Costescu D. Adrian (1833, 835—837, 841, 844, 847, 851, 861, 867, 876, 877, 882, 884), Drosu Petre (1832, 844, 875—877, 880—882, 884, 886, 908, 917, 920, 924, 931, 940, 943), **Dumitrescu C. Ilie** (1830—835, 837, 838, 843—845, 847—849, 851, 858, 861, 866, 867, 871, 872, 875, 876, 878, 881, 882, 884, 891, 998, 901, 908, 911, 915, 917, 920, 924, 935, 938—943), Enculescu Emilian (1832—834, 837, 844, 845, 848, 858, 861, 875—877, 880, 882, 884, 886, 901, 916, 917, 920, 924, 931, 935, 937, 940, 941—945), Enescu Nicolae (1832, 841, 845, 858, 866, 877, 878, 881, 882, 884, 891, 892, 894, 901, 908, 911, 915, 917, 920, 931, 923—926, 931, 938—940, 943, 945), **Grigorescu D. Ion** (1539, 542, 618, 650, 762, 783, 814, 816, 818—821, 824, 825, 827, 828, 830, 832—835, 837, 838, 840—845, 847—849, 851, 852, 858, 859, 861, 864, 866, 867, 871, 875—878, 881—884, 901, 908, 914, P), Guţu P. Corneliu (1781, 783, 794, 799, 800, 803, 814, 816, 824, 825, 857, 861), Ioaneş O. Sorin (1832, 833, 837, 838, 845, 847, 875—877, 880—882, 884, 901, 908, 917, 924, 940, 943), Lăcraru Gheorghe (1827, 832, 834, 835, 837, 845, 851, 877, 880, 884, 901, 908, 911, 924, 931, 935, 940, 943), **Lazăr Gheorghe** (1779, 794, 827, 830, 823—834, 837, 838, 842—844, 847—849, 851, 861, 962, 866, 867, 871, 872, 876, 881, 884, 891, 893, 894, 920, 924, 938, 940), Marinescu C. Mihai (1833, 834, 841, 844, 847, 861, 883, 908, 917, 920, 924, 940, 943), Moacă A. Dorin (1831—833, 842—844, 848, 851, 861, 866, 875—877, 880—882, 908, 917, 920, 924, 931, 940), Mihăiţă Mihai (1833, 835, 837, 844, 847, 851, 861, 867, 876, 877, 882, 891, 917), Miriţoiu M. Gheorghe (1730, 747, 800, 814, 816, 835, 838, 848, 851, 861, 867, 891, 920, 938, 940), Mităr Corneliu (1830, 833, 835, 837—841, 842, 844, 847, 876, 877, 881—883, 891, 894, 915, 917, 920, 931, 938, 943, 945), Miu I. Ion (1830, 832—835, 837, 844, 845, 851, 861, 871, 875, 876, 882, 915, 917, 920, 924), Moldoveanu I. Constantin (1833, 835, 844, 877, 880—883, 891, 940, 944), Nedelescu A. Marian (1830—835, 837, 843—845, 847, 871), Neferu Mihai (1832, 834—837, 845, 847, 848, 851, 858, 861, 875—877, 880—882, 884, 886, 901, 908, 911, 917, 920, 924, 931, 935, 940, 942—944), Niculescu A. Constantin (1835, 845, 851, 876, 877, 881, 882, 901, 902, 917, 924, 935, 938, 940, 942, 945), **Paulescu N. Dan** (1829, 830—835, 843, 845, 847, 858, 859, 874, 877, 878, 883, 884, 889, 894, 908, 915—917, 920, 924, 925, 927, 931, 938, 940, 941, 943—945, P), Piţigoi I. Gheorghe (1827, 832, 835, 837, 839, 842, 844, 845, 848, 851, 861, 875, 877, 880, 882—884, 886, 901, 908, 911, 917, 920, 924, 931, 935, 940, 942, 943), Popescu C. Dumitru (1837, 844, 848, 851, 877, 880, 882, 886, 917, 920, 924, 931, 935, 940, 943), Puşchilă I. Octavian (1832, 834, 844, 851, 875—877, 880, 882, 884, 908, 919, 920, 924, 935, 938, 940, 941—943), Sarian I. Virgil (1832—835, 841,

843, 845, 871, 874—877, 881—884, 898, 911, 915, 917, 919—921, 923, 924, 931, 938, 940, 944, 945), Şerban Gheorghe (1833, 835—837, 844, 847, 849, 851, 861, 867, 876, 877, 881, 882, 891, P), Spirescu D. Const. (1832, 837, 844, 848, 851, 877, 880, 884, 886, 901, 917, 920,931), *Tugulea Eugen* (1734, 736, 737, 754, 759, 814, 816, 827, 830, 832—835, 837, 844, 845, 847, 851, 858, 861, 871, 875, 876, 877, 880—884, 890, 891, 898, 901, 908, 911, 915, 917, 920, 923—925,931, 938, 940, 943—945).

ROMAN. Clasa X-a. Huţanu Cornel (1830, 835, 837, 844, 874, 876, 881—884, 891, 914, 915, 917, 924), **Morărescu Gheorghe** (1393, 455, 469, 644—660, 665—670, 672, 674, 700, 762, 804, 805, 807, 815, 830—844, 846—848, 851, 857, 864, 866, 871, P). Şcoala tehnică de maiştri, anul I. Niculăiasa Vasile (1881, 882, 924, 939, E: 724, 725, 727, 729, 731, 736, 737, 744, 745).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa VIII-a. Dincă Ion (1939, E: 724, 725, 727, 729—731, 733, 735, 738, 742); clasa IX-a. Bozdog Marin (1816, 835, 844, 851, 862, 875, 877, 879, 880, 882, 914, 924, 937), Filip St. Alexandra (1835, 837, 875, 877, 879, 880, 882, 883, 889, 937, 940, 944);clasa X-a. Mitroi Valeria (1835, 838, 842, 844, 848, 851, 862, 876, 877, 881, 883, 884, 894, 916, 935, 931, 939).

SIGHIŞOARA. Clasa X-a. Karlheinz Engbert (1830—833, 835, 837, 841, 845, 875—877, 879, 880, 882).

SATU MARE. Clasa X-a. Benca Aurel (1786, 793, 794, 825, 830, 831, 833, 836, 838, 842, 844, 851, 859, 867), absolvent Petrescu D.A. (1806, 810, 814, 818—822, 848, 849, 851).

SLOBOZIA (reg. Bucureşti). Clasa X-a. Păun A. Ion (1830, 831, 838, 844, 847, 848, 867, 875, 878, 881, 882, 884, 924).

SIBIU. Clasa VIII-a. Ancuţa Mircea (E: 708—710, 723, 725, 727, 729, 730—732), Ciocu G. Gheorghe (E: 687, 703, 707, 711, 713, 715, 716, 720); absolvenţi: Alexa Ioan (1830—835, 837, 841, 844, 849, 857, 858, 861, 863, 866, 867, 875—878, 882—884, 891, 892, 898, 901, 903, 908, 911, 913, P), **Pupăzan Nicolae** (1830—839, 841—845, 847—849, 851, 854, 856—859, 861—864, 866, 867, 872—885, 887, 888, 890—892, 894, 898, 900, 901, 903, 908, 911, 913).

SLATINA. Clasa VIII-a. Barbu C. Gheorghe (1851, E: 687, 708, 709, 715, 718, 721, 722, 727, 729, 731), Becheanu I. Mircea (1848, 851, 875, 882, E: 687, 708, 709, 714—716, 718, 721, 725, 727, 729—731), Graure I. Veronica (E: 664, 689, 708, 716—718, 722, 727, 729, 735), Ivan F. Constantin (1851, E: 687, 708, 709, 713, 714, 718, 722, 727, 729, 731), Oprea D. Ilie (E: 708—710, 713, 718, 722, 725, 729, 731, 732), Pană Gabriela (E: 724—727, 729—731, 735, 737, 738, 742, 745), Popa G. Ilie (E: 687, 708, 709, 713, 718, 721, 727, 729, 731), Roşulescu I. Florică (1851, 875, E: 687, 708, 709, 714, 718, 721, 727, 729—731), Straton Leonid (E: 713, 714, 725, 727, 728—731), Tighineanu Eugen (1848, 851, E: 687, 708, 709, 713, 714, 715, 718, 721, 727—729); clasa X-a. Bărbulescu Marcel (1835, 837, 844, 863, 866, 875—877, 881—883, 889, 691, 908, 911, 913, 914, 924, 938, 940, 943—945, P), Bratu G. Sever (1830, 835, 837, 844, 856, 875—878, 882, 883, 889, 891, 913, 914, 924, 938, 941, 943, 945), Crăciun Andrei (1830, 837, 844, 859, 874, 875, 877, 881—884, 891, 894, 911, 913, 920, 924, 926, 930, 931, 940, 943), Niţu N. Marin (1832—1836, 841, 849, 861), **Şerbănescu N. Tiberiu** (1618, 762, 831—837, 841—848, 847, 851, 857, 861, 862, 866, 871, 874—878, 881—884, 891, 914, P), **Voicu I. Traian** (1830—838, 840—842, 844, 845, 847—849, 851, 859, 861, 874—878, 881—885, 891, 903, 914, 915, 917, 918, 920—922, 924, P).

TECUCI. Clasa VIII-a. Teodoru Gheorghe (679—681, 693, 703, 718, 722, 727, 736), Vidraşcu Traian (1882, 914, E: 679, 684, 687, 693, 700, 704, 709, 714—716, 722, 724); clasa X-a. Niţă Fănică (1618, 630, 819, 851, 881, 882, 884).

TÎRGOVIŞTE. Clasa VIII-a. Cîrnu I. Mircea (1830, 838, 849, 851, 867, E: 687, 708, 709, 714, 718, 725, 727, 729, 731); clasa X-a. Popovici C. Alexandru (1875, 881—884, 917, 920, 924, 940, 945), **Stănciulescu M. Mihai** (1769, 805, 807, 814, 815, 832—835, 837—845, 847, 866, 867, 874—877, 881—886, 889, 890, 898, 943, P), **Tudor N. Constantin** (1618, 783, 808, 830, 831, 833, 837, 838, 841, 843, 844, 849, 851, 859, 861, 862, 867, 871, 874—879, 881—884, 891, 898, 900, 914—920, 924, 931, 939, 940, 943, 945).

TÎRGU JIU. Clasa X-a. Cătălina D. Ion (1830, 843, 847, 875, 876, 881, 882, 884, 915, 919, 924, 931, 938, 940), Popescu A. Iulian (1830, 833, 844, 847, 851, 864, 875, 876, 881, 882, 884, 924, 931, 938, 940), Stoian I. Gheorghe (1830, 833, 844, 847, 851, 875, 876, 881, 882, 884, 938, 940, 943).

TÎRGUL OCNA. Absolvent Mironescu Dan (1833, 835, 837, 839, 840, 844, 850, 874—876, 881—884).

TÎRGUL MUREŞ. Clasa X-a. Hoţa Marcel (1783, 784, 786, 787, 792, 783, 816, 820, 827, 830, 838, 851, 875, 877, 879, 881, 883, 917, 919, 920, 988).

TÎRGUL NEAMŢ. Clasa X-a. **Foeşăneanu I. Ioan** (1831, 833, 835—838, 840—845, 847—849, 851, 859, 861, 863, 865—869, 871, 872, 874—885, 887—889, 891, 894, 900, 901, 902),

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

Răileanu Mihai (1833, 837—838, 841, 848, 849, 851, 861, 865, 867, 874—878, 880, 884, 887, 891).

TÎRNĂVENI. Şcoala medie «Alexandru Sahia». Clasa IX-a. Piso Pompiliu (1613, 700, 830, 831, 834, 837, 838, 841, 843, 844, 847, 848, 851, 861, 863, 866, 871).

TIMIŞOARA. Şcoala medie nr. 1. Clasa VII-a. Mihăileanu Alexandru (E: 710, 715, 723, 727, 735, 738, 743, 747, 752, 753); clasa IX-a. Mihăileanu N. Constantin (1851, 857, 862, 867, 880, 882, 883, 891, 901, 915, 917, 920, 924, 948, 951, 955, 956, 960, 963); clasa X-a. Arsenovici Tiberiu (1830—832, 834, 841, 844, 875, 877, 878, 882—884, 900, 914), Kory Egon (1830, 835, 837, 838, 841, 844, 848, 863, 866, 867, 882), Popa Laurenţiu (1833, 835, 837, 841—844, 875, 876, 878, 881, 884, 891, 940, 943). Şcoala medie de băieţi nr. 2. Clasa IX-a. Florea Dorel (1832, 836, 845, 866, 886, 898, 915, 924, 940, 943, 945). Şcoala medie de fete nr. 3. Clasa X-a. Cismariu Ionica (1875, 876, 878, 881, 882, 884, 891, 892, 920, 924). Şcoala medie de băieţi nr. 5. Clasa X-a. **Nerodea Tiberiu** (1731 747, 752, 794, 818, 830, 835, 837, 838, 841, 844, 847, 848, 851, 867, 875, 876, 880, 882, 884, 915, 924, 925, 940, 943, 945), Vasilievici Alexandru (1830, 838, 842, 847, 851, 867, 876, 881, 924, 940). Şcoala medie de fete nr. 7. Clasa IX-a. Junger Agata (1830, 844, 851, 866, 867, 875, 876, 882, 884, 915, 924, 940). Şcoala tehnică de radio. Preoteasa A. Ion (1874—878, 881, 882, 884, 894, 895, 900, E: 725, 727, 728, 730, 731).

TRUSEŞTI (Suceava). Clasa X-a. Chihan I. Isac (1830, 831, 833, 844, 847, 851, 862, 875—878, 881, 882, 884, 891, 914, 920, 925, 937, 940, 942), Ciobotaru C. Constantin (1891, 902, 914, 917—919, 921, 922, 937, 938, 940, 943), Creţu Gheorghe (1930, 844, 851, 877, 878, 881—883, 914, 931, 937, 941).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Cojocaru Napoleon (1830, 847, 851, 876, 882, 883, 923, 924, 940, 943). Panaitescu Valeriu (1838, 843, 851, 867, 871, 875—877, 882, 884—898, 914, 915, 924, 940); clasa X-a. **Nicuiescu M. Iulian** (1874—878, 881—884, 886—888, 890, 891, 894, 897, 904, 915, 916, 917, 920, 922, 924—927, 938, 940, 941, 944), absolvent Gazibar Aurel (1821, 835, 837, 855, 878, 881, 927, P).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Ionescu Radu (1876, 878, 883, 884, 908, 915, 917, 940, 943, 944).

TURDA. Clasa X-a. Radu Gabriela (1831 835, 837, 844, 862, 881, 882, 884, 891, 898).

URLAŢI. Clasa IX-a. Dedu Liviu (1830, 838, 844, 849, 867, 882, 883); clasa X-a. Petcu Diamanta (1800, 874, 875, 880, 882—884, 891, 893, 917, 920, 924).

VASLUI. Clasa VII-a. Barbălată Ema (E: 694, 700, 729—731, 733, 735, 736—737, 742).

ZLATNA (Hunedoara). Clasa VIII-a. Cojanu Maria (1882, E: 708, 715, 718, 722, 724—727, 729, 738).

★

Se primesc soluţii pînă la apariţia numărului 7, iulie 1956, numai la problemele apărute în ultimele trei numere şi la problemele: 1998, 2013, 2015, 2023, 2025, 2039, 2047, 2063, 2072, 2075, 2076, 2080, 2093, 2098, 2108 şi următoarele.

POŞTA REDACŢIEI

— Tov. *Stanciu I. Zaharia*, Răhău, Sebeş. — Modul de redactare al soluţiilor este anunţat pe coperta «Gazetei». Dacă în cursul unei luni rezolvitorul a redactat soluţiile multor probleme, trimiterea lor este bine să fie făcută odată, într-un plic de mărimea 22/16 cm, adică de formatul unei file de caiet obişnuit şi francat după tariful poştal.

— Tov. *Pojagă C. şi Paulescu Dan*, elevi R. Vîlcea. — Problemele ce aţi propus sînt cunoscute; mai întîi să vă evidenţiaţi ca rezolvitori de probleme şi apoi să încercaţi a compune probleme diferite de cele publicate sau cunoscute.

— Tov. *Georgescu Ion*, şcoala pedagogică, Craiova. — Studiul individual la matematică a făcut pe unii învăţători să ajungă printre cei mai buni matematicieni. Ca învăţător vă puteţi înscrie la facultatea de matematică şi fizică; secţia fără frecvenţă, de unde veţi primi informaţii şi cursurile necesare studiului individual.

— *Mai multor corespondenţi.* — Plicurile care depăşesc 20 grame trebuie francate după tariful poştal, altfel nu ajung la destinaţie.

— Tov. *Dürr Iosif*, tehnician cadastral Carani, Timişoara. — Preţul abonamentului la G.M.F.-B nu este fixat de redacţie; vă puteţi adresa Direcţiei difuzării presei, Bucureşti. Problemele ce aţi propus nu se pot publica, ele sînt cunoscute.

— Tov. *Leuca Anatolie*, Dej. — Redacţia G.M.F. seria B nu face expedierea revistelor, nici abonamente. Pentru numere vechi vă puteţi adresa Librăriea Academiei R.P.R., Calea Victoriei 27 Bucureşti, serviciul «*Cartea prin poştă*», sau «Direcţiei Difuzării Presei» Bucureşti, piaţa Scînteii nr. 1 Bucureşti. — *Abonamente mai scurte de un an se fac pe restul lunilor din anul 1956, la oficiul poştal cu preţul de un leu exemplarul.*

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu**
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Marcuşevici**
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev**
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov**
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominski**
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc**
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu**
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Marcuşevici**
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi* de **A. I. Ghelfond**
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter**
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu**
12. *Cometele* de **F. I. Zighel**
13. *Radioastronomia* de **S. Sklovski**
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu**
15. *Soarele şi observarea lui* de **V. V. Saronov**
16. *Elemente de calcul vectorial* de **O. Kreindler**
17. *Experienţe simple cu ultrasunete* de **B. B. Kudriavţev**
18. *Nomograme* de **M. V. Pentkovski**
19. *Elemente de teoria congruenţelor de drepte* de **A. Kahane**
20. *Culegere de probleme de geometrie* de **Gh. Ţiţeica** (*revăzută şi complectată* de **G. D. Simionescu**)

Pentru abonarea pe 6 luni se poate achita la oficiul poştal local suma de 6 lei (preţul fiind 1 leu exemplarul)

Volumul VII, Nr. 6 (Gazeta Matematică şi Fizică seria B) iunie 1956

C. 511. — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 **Preţul Lei 1 exemplarul**

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Biblioteca Centrală Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEN - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár
TULAJDONA

Anul VII — iulie 1956

7

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul VII, Nr. 7 — iulie 1956

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Rezultatul Olimpiadei Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni, 1956*	337
2.	*Maşinile electronice de calculat*	338
3.	*Demonstrarea geometrică a unor formule trigonometrice de Silviu Guiaşu*	345
4.	*Gazul de lemn în slujba economiei naţionale de D. Drimbă*	350
5.	*Construcţia şi gradarea unui ampermetru-voltmetru pentru curent continuu şi alternativ de V. Pavlu*	354
6.	*Despre spin de A. Hristev*	361
7.	*Caleidoscop fizic*	364
8.	*Probleme rezolvate (1272; 1501; 1766; 1768; 1769; 1779; 1780; E: 668; E: 690; E: 711)*	366
9.	*Chestiuni de examen (2246—2262)*	374
10.	*Probleme propuse (2263—2287)*	376
11.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 836—E: 850)*	379
12.	*Lista elevilor premiaţi şi menţionaţi la Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni, 1956*	382
13.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	383

ANUL VII 7 IULIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Úszószki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VII • Nr. 7 iulie 1956

REZULTATUL OLIMPIADEI TINERILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1956

OLIMPIADELE prin corespondenţă ale tinerilor matematicieni, elevi ai claselor 5—7, au început din anul 1953. Ele sînt organizate din iniţiativa Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R.

Numărul elevilor participanţi la aceste olimpiade a crescut în anul 1954 şi a culminat în 1955, cînd au participat 18000 elevi din toate regiunile ţării. Rezultatul a fost cu atît mai îmbucurător cu cît în acest an s-a organizat pentru prima dată această olimpiadă simultan pentru matematică şi pentru fizică.

Văzînd succesul înregistrat în anul trecut şi urmărind scopul stimulării studiului acestor discipline, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. a organizat şi în anul acesta Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni cu scopul de a face pe elevi să adîncească legătura între matematică şi fizică, să urmărească dezvoltarea tehnicii şi contribuţia acestor discipline la construirea socialismului.

Anul acesta, nivelul problemelor propuse a fost mai ridicat decît cel din anii precedenţi. În plus a fost organizată etapa II-a regională. La această etapă au participat în centrele regionale elevii ale căror rezolvări la etapa prin corespondenţă au fost evidenţiate.

Această etapă a avut şi scopul ca elevii fruntaşi dintr-o regiune să se cunoască între dînşii şi astfel să se mărească interesul de a căpăta un număr mai mare de cunoştinţe şi de a se pregăti şi mai bine în viitor.

Această etapă a dat posibilitatea să se evite evidenţierea elevilor care au trimis la etapa prin corespondenţă, rezolvări făcute de alte persoane sau copiate.

Anul acesta participarea elevilor la Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni a fost mai redusă. Au luat parte 6000 elevi din toate părţile ţării. Unele cauze care au determinat o participare redusă sînt:

— problemele propuse au fost mai grele decît în anii precedenţi, unele fiind accesibile numai elevilor fruntaşi. Problemele au cuprins subiecte din materia parcursă în întregime în cursul anului şcolar, iar termenul de predare a lor a fost înainte de terminarea anului. O parte din elevi văzînd că nu pot rezolva problemele, au renunţat să mai participe la olimpiadă. S-a făcut o insuficientă popularizare a olimpiadei de către secţiile de învăţămînt şi de către majoritatea profesorilor de matematică şi fizică care predau la clasele 5—7, cu toate că problemele propuse au apărut în nr. 11 din G.M.F.-seria B 1955, iar textul lor tipărit separat a fost difuzat de către Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., cu sprijinul Ministerului Învăţămîntului, în toate şcolile elementare şi medii din ţară.

În genere, din fiecare regiune au participat cam între 200 şi 500 elevi. Se remarcă un număr mai mare de participanţi din regiunile: Timişoara, Autonomă

Maghiară, Piteşti, Bucureşti. Sînt regiuni în care numărul participanţilor a fost prea redus: Baia Mare (90), Craiova (160), Constanţa (130).

Au fost admişi să participe la etapa regională un număr de 1500 elevi adică 25% din totalul participanţilor. Din aceştia au fost premiaţi sau menţionaţi: la clasa V-a, 105; elevi la clasa VI-a, 31 elevi; la clasa VII-a, 73 elevi; adică un total de 209 elevi, reprezentînd 13% din numărul participanţilor la etapa regională.

Organizarea Olimpiadei Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni 1956 a fost făcută de către Comisia centrală a Olimpiadei de pe lîngă Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. Ea s-a bucurat de sprijinul:

— Ministerului Învăţămîntului prin circularele trimise către secţiile de învăţămînt regionale şi raionale, precum şi prin fondurile alocate pentru deplasarea elevilor la regiuni şi pentru achiziţionarea premiilor;

— secţiile de învăţămînt regionale şi raionale au sprijinit olimpiada prin popularizarea ei şi organizarea deplasării elevilor la regiuni, cazarea, masa şi premiile celor evidenţiaţi;

— filialele S.S.M.F regionale au asigurat buna desfăşurare a olimpiadei cu sprijinul profesorilor de matematică şi fizică din regiune.

Olimpiada a oferit un prilej de întrecere tovărăşească între elevi, de verificare şi îmbogăţire a cunoştinţelor lor. Profesorii ai căror elevi au participat la concurs au putut să verifice munca lor depusă la catedră şi felul cum elevii şi-au însuşit cunoştinţele predate.

Ţinînd seamă de scopurile urmărite sfătuim pe elevi să participe cu tot elanul lor tineresc la olimpiada anului 1957, iar pe profesorii de matematică şi de fizică să sprijine şi să popularizeze mai mult această olimpiadă.

Publicăm la pagina 382 a acestui număr lista elevilor premiaţi şi menţionaţi la Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni 1956, felicitîndu-i pentru succesele obţinute şi urîndu-le spor la muncă în viitor.

MAŞINILE ELECTRONICE DE CALCULAT

după conferinţa ţinută de academicianul

B. V. GNEDENKO

la Casa Prieteniei Romîno-Sovietice, la 18 aprilie 1956, Bucureşti

În ultimul timp, în toată lumea a crescut mult interesul faţă de o anumită parte a matematicii, şi anume faţă de matematica calculatorie.

De matematica calculatorie s-au interesat nu numai matematicieni, dar şi oameni de altă specialitate: ingineri, militari şi chiar reprezentanţi ai disciplinelor umanistice.

Ce anume a determinat acest interes? Se ştie că pînă nu demult, matematica nu stîrnea un astfel de interes. În general, oamenii priveau matematica cu respect, însă mai rar cu dragoste şi cu interes. În cele ce urmează vom căuta să explicăm această schimbare de atitudine.

Înainte de a trece la tema propriu-zisă, vom reaminti că în ultimii ani ştiinţele naturii au făcut un enorm salt înainte. Omenirea a reuşit să pătrundă taine adînci ale naturii, despre care acum 20—30 de ani nici nu-şi putea face o idee. Numeroase cercetări care erau considerate rupte de realitate au devenit problemele cele mai actuale şi mai legate de viaţă. Este suficient să menţionăm,

pentru exemplificare, că nu mai departe decît acum 20 de ani, abia un mic număr de fizicieni entuziaşti se dedicaseră studiului fenomenelor care se petrec în nucleul atomic. În momentul de faţă nu există om cult pe faţa pămîntului care să nu cunoască importanţa acestor cercetări şi foloasele pe care le pot da omenirii. Este regretabil numai faptul că omenirea ştie mai mult despre nenorocirile pe care le pot aduce aceste cercetări decît despre avantajele pe care le vor aduce ele într'un viitor apropiat.

Trebuie să subliniem că tocmai cercetările atomice au constituit unul din impulsurile fundamentale care au determinat pe savanţi să se ocupe serios de mijloacele de calcul.

Vom cita cîteva exemple din care se poate vedea cum cercetările atomice au condus la necesitatea revizuirii mijloacelor de calcul de care dispunem.

În diferitele domenii de activitate se întîlnesc calcule mult mai laborioase decît acelea pe care le vom cita, de exemplu, în studiul fenomenelor nucleare, în calculul reactorilor, în studiul şi aplicaţiile energiei atomice.

Aproximativ acum o jumătate de an în urmă a apărut în literatura de specialitate o comunicare asupra dificultăţilor întîmpinate într-unul din institutele din Australia, care se ocupă cu studiul fenomenelor nucleare. S-a constatat că prin observaţiile acumulate s-a strîns un material atît de vast, încît prelucrarea lui statistică cu ajutorul mijloacelor de calcul obişnuite, ar fi necesitat aproximativ 2000 de ani. Este clar că metodele vechi de calcul închideau drumul folosirii materialului respectiv.

Vom da un alt exemplu din care se poate vedea că calculele necesare pentru rezolvarea problemei respective, o problemă mai simplă, erau foarte lungi şi laborioase.

Nu de mult în Uniunea Sovietică s-a efectuat ridicarea geodezică a uneia din regiunile în curs de cercetare. Folosirea rezultatelor experimentale ale măsurării necesita rezolvarea unei probleme de algebră simple, cu care se întîlnesc şcolarii în clasele VII—VIII. Problema constă în rezolvarea unui sistem de ecuaţii de gradul I. Să scriem un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$ax + by = c,$$
$$\alpha x + \beta y = \gamma.$$

Toată lumea îşi aduce aminte cum trebuie rezolvat un astfel de sistem. Apare întrebarea:

— Ce anume i-a speriat pe geodezicieni cînd au trecut la prelucrarea datelor acumulate?

I-a speriat marele număr de ecuaţii şi de necunoscute. Trebuiau rezolvate 800 de ecuaţii cu tot atîtea necunoscute. Este uşor de stabilit că numărul de operaţii aritmetice de efectuat în acest caz este ceva mai mare de 800^3; trebuiau efectuate aproximativ 500 milioane de adunări, scăderi, înmulţiri şi împărţiri. Vă închipuiţi ce înseamnă să adunăm, să scădem, să înmulţim şi să împărţim nişte numere de 500 milioane de ori! Operaţiile cu numere mici pot fi efectuate foarte repede; dimpotrivă, altele, cu numere de multe cifre, necesită timp mai îndelungat. Experienţa arată că fiecare operaţie aritmetică a acestor calcule necesită în medie un minut. În acest fel, într-o zi de lucru de opt ore un calculator poate efectua aproximativ 500 de operaţii. Aşadar, un calculator are nevoie de aproximativ un milion de zile pentru efectuarea acestor calcule! Un milion de zile înseamnă cam 3300 de ani! Să aştepte geologii şi constructorii şi populaţia regiunii respective 3300 de ani rezolvarea

calculelor necesare ! Chiar dacă s-ar aşeza la muncă un mare birou de calcul de 100 de oameni, ei tot ar trebui să aştepte 33 de ani. Atît de mult timp se poate aştepta numai în basme !

Mijloacele moderne de calcul au permis să se rezolve această problemă mult mai repede, şi anume în cîteva ore.

Vom cita încă un exemplu de calcul laborios şi anume calculul liniei de transport a energiei electrice care deserveşte staţiunea de la Kuibîşev, care se construieşte actualmente pe Volga. Pentru efectuarea calculelor cu mijloacele obişnuite într-un mare birou de calcul, ar fi necesari doi ani.

Am putea cita zeci de exemple de acest fel destul de sugestive şi de convingătoare în privinţa necesităţii unei rezolvări rapide a calculelor respective. Problema găsirii unor mijloace de calcul rapid se va pune în deosebi în legătură cu comunicaţiile interplanetare, cînd aceste calcule vor trebui efectuate nu pe pămînt, ci în timpul zborului rachetei. Nu mai vorbim de problema automatizării calculului, sau mai mult, de transmiterea unor ordine de la un aparat la altul, fără intermediul omului, a cărui intervenţie ar întîrzia numai executarea. Tehnica de precizie contemporană implică de asemenea în unele cazuri automatizarea unor procese de producţie; în legătură cu aceasta trebuie efectuate calcule care să ţină seamă de munca efectuată anterior de maşina respectivă. Mecanisme de calcul de acest fel se folosesc actualmente în multe domenii ale tehnicii.

Acum vreo 10 ani, sau chiar mai curînd, a fost construită prima maşină electronică de calcul, care a constituit o revoluţie în problema calculelor. Cele mai multe maşini şi aparate de calcul folosite în diferitele domenii ale economiei naţionale erau construite pe baza transmiterii unei mişcări mecanice. Pe acest principiu este bazată construcţia maşinilor de calcul manuale, a celor electrice, precum şi a maşinilor pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale. Mişcarea mecanică limitează posibilitatea de a accelera efectuarea calculelor. Aceste maşini măresc viteza calculelor într-o măsură relativ redusă.

La baza primei maşini electronice, precum şi a tuturor construcţiilor de maşini electronice ulterioare a fost pus un principiu nou: evitarea oricărei mişcări mecanice în timpul efectuării calculului şi folosirea tubului electronic — tub cunoscut tuturor de la aparatele de radio. Principiul de folosire a tubului electronic pentru calcul este următorul:

Un tub electronic se poate găsi în două stări: într-o stare de conducţie — cînd conduce curentul — sau într-o stare blocată, cînd nu conduce curentul.

Aceste două stări diferite au creat posibilitatea de a se folosi tubul electronic pentru scrierea numerelor. Vom explica acest principiu al construcţiei maşinilor electronice, evitînd, pe cît este posibil, termenii de specialitate.

Pentru maşinile electronice se preferă să se scrie numerele sub forma următoare (vom da mai întîi două-trei exemple simple, iar după aceea vom trece la forma generală):

$$3 = 2 + 1; \quad 10 = 2^3 + 2; \quad 15 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1.$$

În scrierea numerelor se foloseşte următorul principiu: se scriu numerele sub forma unei sume de puteri ale lui 2, şi eventual a unităţii, dacă este nevoie de ea. Vom explica cum se poate scrie un astfel de număr cu ajutorul unor tuburi electronice.

Toate numerele de mai sus pot fi scrise cu ajutorul a patru tuburi electronice:

0 0 0 0

În primul tub din dreapta se scrie 1 sau 0; în al doilea tub se scrie de cîte ori cifra 2 este cuprinsă în numărul dat, odată sau deloc. În al treilea tub se scrie de cîte ori numărul dat conţine pe 2^2 (odată sau deloc). În al patrulea tub se scrie de cîte ori numărul dat conţine pe 2^3 (odată sau deloc etc.)

Dacă în afară de 2^3, 2^2 şi 2 numărul dat conţine şi unitatea, lampa din extrema dreaptă trebuie să se afle în stare de conducţie. Vom nota cu un cerculeţ negru un tub aflat în stare de conducţie şi cu un cerculeţ alb un tub în stare blocată. Principiul descris permite scrierea cifrelor de mai sus sub forma următoare:

0 0 ● ●
● 0 ● 0
● ● ● ●

Să presupunem că trebuie să adunăm două numere, de exemplu primele două. Trebuie să procedăm aşa încît maşina să adune unităţile respective şi, dacă în ambele tuburi este scrisă unitatea, cifra 2 care se obţine urmează să treacă în tubul următor. După adunarea primelor două numere trebuie să se obţină combinaţia următoare:

● ● 0 ●

Actualmente se cunoaşte procedeul pentru automatizarea operaţiilor de acest fel. Maşinile sînt capabile să efectueze tot felul de operaţii, atît aritmetice cît şi logice. Nu ne vom ocupa de instalaţiile tehnice propriu zise, ci vom descrie modul în care probleme matematice complicate pot fi rezolvate cu ajutorul maşinilor; vom face şi unele precizări în legătură cu vitezele care pot fi atinse actualmente în efectuarea operaţiilor aritmetice.

La institutul de matematică din Kiew există de mulţi ani o maşină electronică. Această primă maşină de calcul construită în Uniunea Sovietică este privită ca o băbuţă ramolită, pentru că în domeniul matematicii calculatorii tehnica progresează foarte repede şi ceea ce a fost foarte bun acum opt ani, acum trei ani sau chiar acum un an în urmă, trebuie considerat astăzi, într-o anumită măsură, învechit. Această maşină a fost construită ca un exemplar de încercare, însă ea lucrează foarte bine. Cu ajutorul ei au fost efectuate cîteva miliarde de operaţii aritmetice, mai precis cîteva zeci de miliarde de operaţii aritmetice. După concepţiile moderne această maşină lucrează încet. Ea efectuează numai 60 de înmulţiri pe secundă, de numere a cîte zece cifre. Vom da un exemplu: fie un număr de zece cifre:

2 3 5 4 1 7 8 3 6 5

Maşina poate efectua în timp de o secundă 60 de înmulţiri, adică poate ridica la patrat 60 de numere de acest fel.

Se ştie că folosind o maşină manuală de calculat pentru înmulţirea numai a două numere de acest fel, un om are nevoie de cel puţin un minut; iar dacă face această înmulţire cu creionul, desigur va avea nevoie de un timp mult mai îndelungat. Aşadar maşina amintită înlocuieşte cel puţin 5000 de calculatori.

Actualmente, maşinile cele mai rapide pot efectua 20 de mii de adunări pe secundă şi ceva mai puţine înmulţiri, cam 4000 pe secundă. Aşadar, maşinile de ultimul tip pot calcula cam de 100 de ori mai repede decît maşina

citată. O mașină modernă poate să înlocuiască aproximativ 400 de mii de calculatori. Însă avantajul cel mai important nu este numărul mare de calculatori pe care-l poate înlocui mașina, ci viteza efectuării calculelor.

Matematicienii au început să vorbească despre faptul că vitezele atinse pînă acum nu sînt suficiente pentru unele probleme. Astfel, la consfătuirea care a avut loc nu demult la Moscova și la care au asistat și savanți români — s-a discutat necesitatea construirii unei mașini care să efectueze aproximativ o sută de milioane de operații pe secundă. În principiu se pot construi astfel de mașini; în realitate însă realizarea lor tehnică este destul de complicată.

Una din problemele cele mai importante care se pune cînd mașina este deja construită și poate funcționa, este organizarea lucrului ei; ea trebuie să calculeze fără intervenția omului, după cum este cazul în procesul calculului: numerele intermediare, ordinea efectuării calculelor și operațiilor necesare în decursul calculului se realizează în mod automat, pentru că fiecare intervenție a omului ar dăuna considerabil ritmului de lucru al mașinii, adică ar reduce viteza calculațiilor. În vederea acestui scop mașina este prevăzută cu instalații speciale, în care se introduc datele inițiale ale problemei. Există dispozitivul numit memorie rapidă, care cuprinde relativ puține date și pe care trebuie să o încărcăm cît mai puțin, precum și dispozitivul numit memorie lentă, care poate cuprinde multe date.

Memoria lentă folosește drept principiu înscrierea pe o bandă magnetică sau pe un tambur magnetic; ea poate înregistra zeci de mii de date necesare, înscrise într-o anumită ordine și care pot fi scoase în mod automat din acest dispozitiv al mașinii; pentru aceasta se indică numărul de ordine al numărului respectiv.

Memoria rapidă folosește pentru înscrierea numerelor cele mai diferite aparate printre care și tuburile electronice.

Toate numerele care trebuie introduse în mașină se înscriu într-un mod special. Toate comenzile care trebuie transmise mașinii se înscriu de asemenea sub formă de cifre.

Să presupunem că avem de rezolvat o anumită problemă matematică, de exemplu problema care implică efectuarea a 500 milioane de operații, pe care am mai menționat-o. Se pune întrebarea: trebuie oare să dăm mașinii cîte o comandă separată pentru fiecare din cele 500 milioane de operații? Din fericire acest lucru nu este necesar, întrucît rezolvarea problemei matematice poate fi redusă la un proces cifric de un anumit tip. În mașină se repetă de multe ori aceeași succesiune de operații, însă de fiecare dată cu alte numere, adică cu numerele calculului respectiv. De aceea o problemă de matematică destul de complicată poate fi introdusă în mașină sub forma unui număr de comenzi destul de redus. Vom lămuri această chestiune folosind un exemplu cît se poate de simplu. În general avem a face cu probleme foarte complicate. Pentru rezolvarea lor trebuie întocmită o programă. Din exemplul dat mai jos se poate vedea că numărul mare de operații aritmetice pe care trebuie să-l efectueze mașina nu implică un număr tot atît de mare de comenzi.

Să presupunem că trebuie calculată o tabelă de pătrate ale numerelor întregi, de exemplu pînă la $1.000.000^2$:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ 1.000.000^2.$$

Trebuie să efectuăm un milion de operații aritmetice, un milion de înmulțiri a unor numere succesive cu ele însile. Totuși numărul de comenzi care trebuie date mașinii va fi mult mai mic.

Într-o anumită celulă a memoriei rapide — pe care o notăm cu C — este înscris un număr. Primul ordin este: să se înmulțească numărul aflat în celula C cu el însuși, iar rezultatul obținut să fie înregistrat. Al doilea ordin este: să se adune o unitate la numărul aflat în celula C. Al treilea ordin este: să se efectueze iar primul ordin. Al patrulea ordin este: mașina să se oprească, cînd numărul înscris în celula C ajunge la 1.000 000. Al patrulea ordin nu mai este o operație de aritmetică, ci de logică. De altfel și al treilea ordin privește de asemenea o operație de logică.

Iată în linii generale principiul programării unei probleme matematice. Actualmente există peste 3000 de mașini electronice și aproximativ 2000 de mașini sînt în construcție. Acest fel de mașini se construiesc și există deja în multe țări: în SUA, în Suedia, în Elveția, în Anglia, în Franța, în Australia, în Uniunea Sovietică. Astfel de mașini se proiectează și în Romînia. S-a început de asemenea construirea lor în Polonia și în Cehoslovacia. Ele sînt folosite nu numai pentru efectuarea unor anumite operații matematice abstracte, dar și pentru conducerea automată a unor procese industriale, ținînd seamă de faza în care se găsește operația tehnică respectivă. Desigur că utilizarea mașinilor electronice în conducerea proceselor industriale are perspective foarte largi.

În cercurile oamenilor de știință și chiar în masele largi au trezit un deosebit interes comunicările în legătură cu folosirea mașinilor electronice pentru traduceri dintr-o limbă în alta. Cercetări în această direcție se duc în mai multe țări; cele mai mari succese au fost obținute în Statele Unite și în Uniunea Sovietică.

Pînă în prezent, atît în URSS cît și în SUA, erau folosite așa numitele mașini universale, adică mașini care pot rezolva un cerc larg de probleme. Analiza atentă a modului de lucru al acestor mașini a arătat că este mult mai rațional și mai convenabil să se creeze mașini specializate pentru efectuarea traducerilor. Deocamdată, atît în SUA cît și în URSS, au fost efectuate numai primele lucrări în această direcție, și anume au fost traduse numai texte cu caracter tehnic. Este ușor de înțeles cauza acestui lucru: un text tehnic necesită un număr relativ mic de cuvinte; se folosesc aproximativ 1000 de cuvinte englezești în mașina rusească, sau 1000 de cuvinte rusești în mașina americană. Aproximativ tot atîtea cuvinte se folosesc și în literatura matematică.

Care este principiul efectuării unei traduceri cu ajutorul mașinii electronice? Literele alfabetului rus, cît și cele ale alfabetului englez se scriu sub formă de numere, după principiul folosit în anumite sisteme de transmitere a telegramelor. În acest fel, fiecare cuvînt poate fi scris sub forma unui șir de numere. Se folosește de asemenea un semn care separă cuvintele. În mod corespunzător regulile gramaticale, atît cele ale limbii engleze, cît și cele ale limbii ruse se înscriu sub forma unor poduri de numere. În memoria mașinii se înscrie traducerea cuvintelor englezești în limba rusă. Există cuvinte care au în traducere un singur sens. În acest caz mașina găsește foarte ușor traducerea cuvîntului din limba engleză în limba rusă. Există însă cuvinte care au mai multe sensuri. În acest caz în mașină se înscriu toate variantele posibile ale cuvîntului englez respectiv în limba rusă. În afară de aceasta, dacă înaintea cuvîntului englez respectiv există anumite prepoziții, alegerea devine mult mai ușoară. După ce textul englez este tradus în limba rusă, cuvintele rusești nefiind puse în ordinea proprie limbii ruse, mașina aranjează în mod automat textul brut în conformitate cu regulile gramaticale ale limbii ruse, și anume

efectuează declinarea sau conjugarea, face acordul între verbe şi substantive şi chiar dă o şlefuire literară traducerii.

Dacă întîmplător în textul englezesc se află un cuvînt care nu are în memoria maşinii înregistrată traducerea lui în limba rusă, în mod automat acest cuvînt este înscris în text în limba engleză. Traducerile efectuate la asemenea maşini sînt foarte bune; din punct de vedere literar sînt poate chiar mai bune decît cele făcute de unii traducători.

Din curiozitate, cei ce se ocupă cu traduceri au pus maşina să efectueze o traducere din ziarul englez « Times ». Şi această traducere s-a dovedit a fi foarte reuşită. Maşina s-a împotmolit într-un singur caz: în faţa « cortinei de fier », deoarece nu cunoştea această noţiune, maşina a transcris pur şi simplu aceste cuvinte în limba engleză, nu le-a tradus în limba rusă !

Actualmente există automate electronice cu caracterul unor jucării — distracţii. A fost construit, de exemplu, un automat electronic care joacă şah; dar întrucît constructorul acestui automat era un şahist destul de slab, automatul nu joacă mai bine decît autorul. Constructorii sovietici intenţionează să construiască un automat pentru jocul de dame, ceea ce nu ar fi o chestiune prea grea: trebuie prevăzute 8—10 mişcări. Mai complicată este construirea unui automat de şah, care trebuie să evalueze poziţiile adversarului precum şi propriile poziţii; un asemenea automat implică cercetări mai temeinice. Construirea lui depăşeşte noţiunea de jucărie, deoarece deschide perspective noi tehnicii: ele permit să se dezvolte idei noi, care vor avea ulterior aplicaţii mult mai serioase.

Iată foarte pe scurt, fără amănunte de ordin tehnic şi matematic, fără precizarea aplicaţiilor tehnice, şi nici măcar a importanţei cercetărilor în această direcţie, o idee generală despre maşinile electronice de calculat.

Este un fapt sigur că dezvoltarea tehnicii în viitorul apropiat va implica dezvoltarea construcţiilor maşinilor electronice. Cercetătorii şi constructorii din toate ţările vor trebui să se ocupe foarte temeinic de aceste maşini. De aici decurge necesitatea imperioasă a unei strînse colaborări în această direcţie între diferite ţări, pentru ca ceea ce este cunoscut într-o ţară să devină cunoscut şi altor cercetători, pentru ca să nu muncească nimeni la o invenţie făcută anterior în altă ţară.

★

N. R. Trebuie să remarcăm comunicările şi îndrumările nepreţuite pe care le primeşte ţara noastră în acest domeniu de la marea noastră prietenă, Uniunea Sovietică. Vom răspunde cu toată căldura la apelul unei colaborări cu specialiştii sovietici, care ne pun la dispoziţie experienţa şi realizările lor în construcţia maşinilor electronice de calculat. Într-un viitor apropiat, eforturile destul de tinere, în construcţia maşinilor electronice de calculat vor da rezultate dintre cele mai importante, atît din punct de vedere teoretic, cît şi pentru scopuri practice.

11. DEMONSTRAREA GEOMETRICĂ A UNOR FORMULE TRIGONOMETRICE

SILVIU GUIAŞU,
student an I, matematici

PRINCIPALELE formule trigonometrice se pot stabili geometric (vezi articolul tov. Ionescu-Ţiu, în G.M.F.A. pag. 372, iulie 1955). În figurile de care ne vom servi, presupunem arcele: $a > b$ şi $a + b < 90°$ în cercul de rază 1.

1° Să se demonstreze geometric formulele: $\sin(a \pm b)$ şi $\cos(a \pm b)$.

Demonstrarea acestor formule dată de Cauchy[1]). Fie a şi b două arce având ca origină punctul A şi ca extremităţi punctele B şi C. Ducem perpendicularele BP, CQ pe diametrul AA' şi CI paralelă cu acelaşi diametru. În sfîrşit, trasăm diametrul CC' şi ducem la această linie perpendiculara BD. Avem:

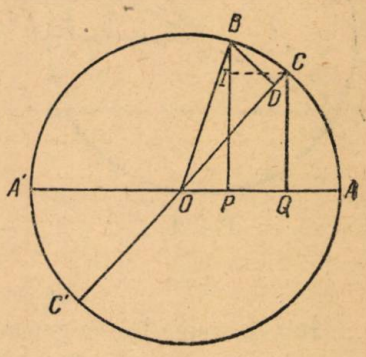


Fig. 1

$$\overline{BC}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2$$

sau

$$\overline{BC}^2 = (\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2.$$

Dezvoltînd membrul al doilea şi ţinînd seamă de faptul că $\sin^2 a + \cos^2 a = \sin^2 b + \cos^2 b = 1$, avem:

$$\overline{BC}^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b). \qquad (1)$$

Însă coarda BC e medie proporţională între proiecţia sa CD şi diametrul CC'. Oricare ar fi poziţia lui BC avem:

$$CD = 1 - \cos(a - b),$$

deci,

$$\overline{BC}^2 = 2[1 - \cos(a - b)]. \qquad (2)$$

Egalăm cele două valori obţinute pentru BC:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Dacă în această formulă schimbăm semnul lui b, avem:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

E suficient să schimbăm în această formulă pe a cu $\frac{\pi}{2} + a$ pentru a obţine

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a.$$

[1]) Complémentes de trigonometrie, de F.G.M.

M. Sarrus a modificat puţin această demonstraţie, în sensul că a putut să se dispenseze de a duce CC' şi BD. Astfel, dacă în (1) facem $b = 0$, această relaţie se reduce la:

$$\overline{BC}^2 = 2 - 2\cos a$$

şi această relaţie, avînd loc oricare ar fi a, devine cînd schimbăm pe a în $a-b$:

$$\overline{BC}^2 = 2[1 - \cos(a - b)].$$

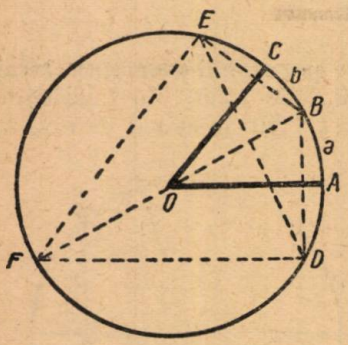


Fig. 2

Astfel relaţia (2) e găsită.

2° Mai putem găsi formula $\sin(a+b)$ prin metoda următoare, care este de o simplicitate remarcabilă: Fie arcele $\overset{\frown}{AB} = a$ şi $\overset{\frown}{BC} = b$. Din punctul B ducem pe razele OA şi OC coardele perpendiculare BD şi BE, apoi ducem DE. Toată coarda fiind dublul sinusului jumătăţii arcului cuprins, avem:

$$BD = 2\sin a;\ BE = 2\sin b;\ DE = 2\sin(a+b).$$

Dacă ducem diametrul care trece prin B şi unim extremitatea sa F cu punctele D şi E avem la fel:

$$DF = 2\cos a \text{ şi } EF = 2\cos b.$$

Însă teorema lui Ptolomeu referitoare la patrulaterele inscriptibile ne dă:

$$BF \cdot DE = BD \cdot EF + BE \cdot DF$$

sau, împărţind cei doi membri cu 4, avem:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

3° În « Gazeta Matematică », vol. I, 1895, I. Ionescu stabileşte aceste relaţii utilizînd numai proprietăţile ariilor, fără a interveni proprietăţile triunghiurilor asemenea.

Considerăm un cerc de rază 1 şi două arce $\overset{\frown}{CA} = a$ şi $\overset{\frown}{CB} = b$.

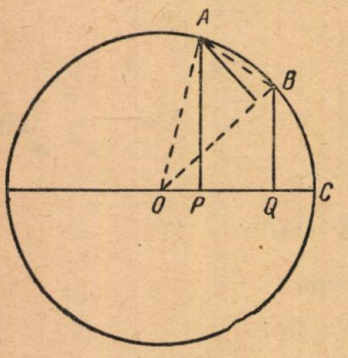


Fig. 3

Din figură avem: $AP = \sin a$; $OP = \cos a$; $BQ = \sin b$; $OQ = \cos b$, (3)

$$PQ = OQ - OP = \cos b - \cos a,$$

$$\text{arc } AB = a - b,$$

$$AR = \sin(a - b),$$

$$OA = OB = OC = 1.$$

Descompunînd în două moduri aria $OABQ$ avem:

$$OAP + PABQ = OAB + OBQ. \qquad (4)$$

Exprimăm valorile ariilor:

$$\frac{1}{2}\overline{OP} \cdot \overline{AP} + \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{BQ})\,\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{AR} + \frac{1}{2}\overline{OQ} \cdot \overline{BQ}.$$

Înlocuind valorile de la (3), obţinem:

$$\cos a \sin a + (\sin a + \sin b)(\cos b - \cos a) = 1 \cdot \sin(a - b) + \cos b \cdot \sin b.$$

Desfăcînd parantezele și reducînd termenii asemenea obținem:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

pe care autorul o consideră drept formula fundamentală a trigonometriei plane.

I. Ionescu mai face aici observația că dacă în formula:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

facem $a = b$, obținem:

$$\cos 0 = 1 = \cos^2 a + \sin^2 a,$$

așadar, relația din urmă se prezintă tot ca o consecință a proprietăților ariilor și prin urmare se stabilește independent de teorema lui Pitagora.

4° Să se stabilească geometric formulele:

$$a)\quad 1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{a}{2},$$

$$b)\quad 1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2},$$

$$c)\quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

Fie arc $AM = a$. Unim M cu punctele A și A', apoi ducem OI perpendiculară pe AM și MP perpendiculară pe AA'.

MI și OI sînt respectiv, $\sin \frac{a}{2}$ și $\cos \frac{a}{2}$.

a) Avem: $A'P = 1 + \cos a$ și $AP = 1 - \cos a$. Însă coarda AM fiind dublul lui MI, patratul va fi:

$\overline{AM}^2 = 4\sin^2 \frac{a}{2}$, de asemenea $\overline{AM}^2 = 2(1 - \cos a)$.

În concluzie:

$$1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{a}{2}.$$

b) La fel: $\overline{A'M}^2 = 4\cos^2 \frac{a}{2}$, deci:

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}.$$

c) $\sphericalangle AMP = \frac{a}{2}$ la fel ca $\sphericalangle A'$. Prin urmare:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{AP}{MP} = \frac{MP}{A'P'},$$

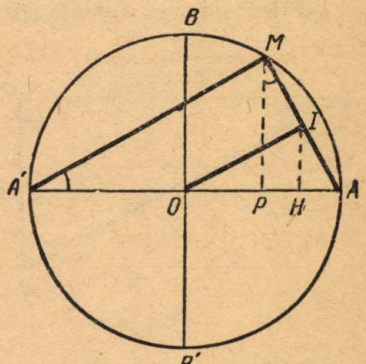


Fig. 4

deci:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{AP \cdot MP}{MP \cdot A'P} = \frac{AP}{A'P} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$$

sau

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

5° Să se demonstreze geometric formulele:

a) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$,

b) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Soluția I. Pe figura precedentă, fie arc $AM = 2a$; coarda $AM = 2 \sin a$ și $OP = \cos 2a$.

a) În triunghiul AMO avem:

$$\overline{AM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OA}^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OP} = 2 - 2\overline{OP},$$

de unde:

$$OP = \frac{2 - \overline{AM}^2}{2} = \frac{1}{2}(2 - 4 \sin^2 a) = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

deci:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

b) În triunghiul AMP avem după teorema proiecțiilor:

$MP = AM \cos (AMP)$, adică $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Soluția II. $\sin 2a = 2\ IH$ și $\cos 2a = OP = OH - AH$. Însă triunghiul dreptunghic OIA ne dă:

$$IH = \frac{AI \cdot IO}{OA} = \sin a \cdot \cos a,$$

de unde:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

și

$$OH = \frac{\overline{OI}^2}{OA} = \cos^2 a; \quad AH = \frac{\overline{AI}^2}{OA} = \sin^2 a,$$

de unde:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

6° Putem ușor calcula $\sin a$ și $\cos a$ în funcție de $\operatorname{tg} a$ utilizînd un triunghi dreptunghic care are cateta alăturată unghiului a, egală cu unitatea. Se vede imediat că:

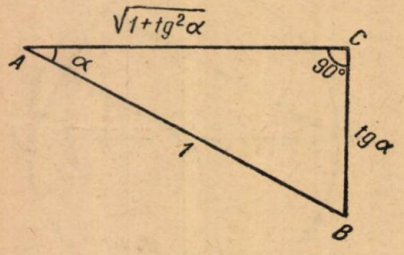


Fig. 5

$$BC = \operatorname{tg} a; \quad AC = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$

deci:

$$\sin a = \frac{BC}{AC} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

și

$$\cos a = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}.$$

De aici putem obține ușor și pe $\sin 2a$ și $\cos 2a$ în funcție de tangenta semiunghiului, utilizînd relațiile cunoscute:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 a)^2}} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$

iar:

$$\cos 2a = \cos a^2 - \sin^2 a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

Considerînd cateta opusă egală cu unitatea, obținem relații analoage în funcție de ctg a.

7° Să se demonstreze geometric formula:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Fie $\overset{\frown}{AB}=a$; $\overset{\frown}{BC}=b$. Avem: $\operatorname{tg} a=BR$, $\operatorname{tg} b=BS$, în care SR este tangenta în punctul B. Ridicăm o perpendiculară în punctul A care întîlnește prelungirea lui OC în punctul T. Fie SH perpendiculara coborîtă din S pe OA:

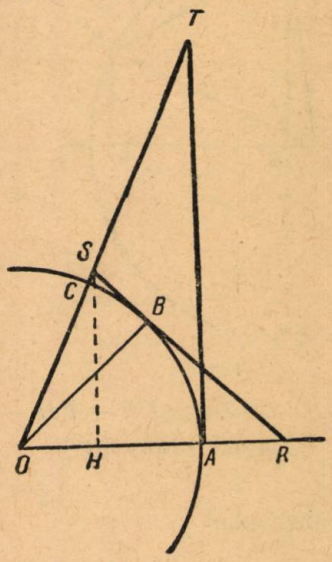


Fig. 6

$$\operatorname{tg}(a+b)=AT.$$

Însă mai avem: $\operatorname{tg}(a+b)=\frac{SH}{OH}$. Determinăm pe SH și OH. Triunghiurile asemenea SHR și OBR dau:

$$\frac{SH}{SR}=\frac{OB}{OR},\ \text{de unde:}$$

$$SH=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{OR}.$$

Însă:

$$\overline{RS}^2=(\overline{BR}+\overline{BS})^2=\overline{OR}^2+\overline{OS}-20R\cdot OH$$

sau:

$$\overline{BR}^2+\overline{BS}^2+2BR\cdot BS=\overline{OR}^2+\overline{OS}^2-2OR\cdot OH,$$

de unde:

$$20R\cdot OH=\overline{OR}^2-\overline{BR}^2+\overline{OS}^2-\overline{BS}^2-2BR\cdot BS=$$

$$=2\overline{OB}^2-2BR\cdot BS=2-2\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b,$$

de unde scoatem:

$$OH=\frac{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}{OR},$$

deci:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{SH}{OH}=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}.$$

În același mod se demonstrează formula $\operatorname{tg}(a-b)$.

8° Să se determine geometric valorile lui $\sin 3a$ și $\cos 3a$. Fie:

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=a.$$

Ducem PH paralelă cu OB.

$$\sin 3a=DG=DF+FH-GH.$$

Însă triunghiurile BOD și BDF sînt asemenea avînd B comun și unghiurile

$$\widehat{BOD} = \widehat{BDF},$$

deci:

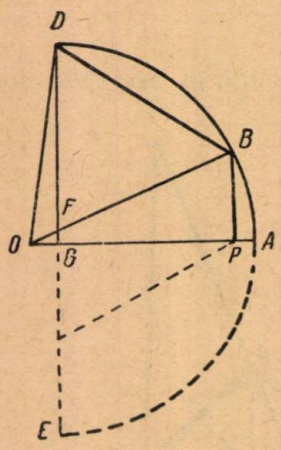


Fig. 7

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BD}{OB},$$

de unde:

$$BF = 4\sin^2 a = PH.$$

Triunghiurile asemenea BPO și HGP dau:

$$\frac{GH}{BP} = \frac{PH}{OB},$$

de unde:

$$GH = 4\sin^3 a.$$

Avem:

$$\frac{PG}{OP} = \frac{PH}{OB}, \quad \text{de unde} \quad PG = 4\sin^2 a \cos a,$$

deci:

$$\sin 3a = DF + FH - GH = BD + BP - GH = 3\sin a - 4\sin^3 a.$$

La fel obținem:

$$\cos 3a = \cos a - 4\sin^2 a \cos a.$$

Substituind

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a,$$

găsim

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

GAZUL DE LEMN ÎN SLUJBA ECONOMIEI NAȚIONALE

Prof. ing. dr. **D. DRÎMBĂ**

DIRECTIVELE Congresului al II-lea al Partidului Muncitoresc Romîn pun în fața industriei noastre problema construcțiilor de noi mașini și utilaje menite să contribuie la dezvoltarea transporturilor și la mărirea numărului de tractoare în SMT și GAS. Astfel, se arată în Directive: «Printre tipurile noi de mașini și utilaje ce se vor asimila și pune în fabricație se vor prevedea: tipuri de cazane de abur pentru arderea combustibililor inferiori, tipuri de gazogene pentru gazificarea lignitului, un nou tip de motor Diesel, etc»....

Deși țara noastră se numără printre primele țări producătoare de petrol, consumul considerabil pe care-l implică condițiile economice actuale ne impun să ne gîndim la economisirea celui mai prețios carburant — benzina — prin întrebuințarea unor carburanți de înlocuire, siguri, ieftini, lesne de produs și din abundență pe tot cuprinsul țării.

Problema carburanților are un mare rol în economia națională a unei țări. Locomoția sub toate formele ei — fie ea terestră, nautică, aeriană — a luat în

zilele noastre o mare dezvoltare devenind un factor de primă importanţă în economie.

Perfecţionarea continuă a motoarelor utilizate în transportul rutier şi aerian, mecanizarea lucrărilor agricole, transportul produselor agricole spre centrele de colectare şi de acolo spre gări, transportul mărfurilor de la oraş la sat, implică rezolvarea problemei aprovizionării cu carburanţi.

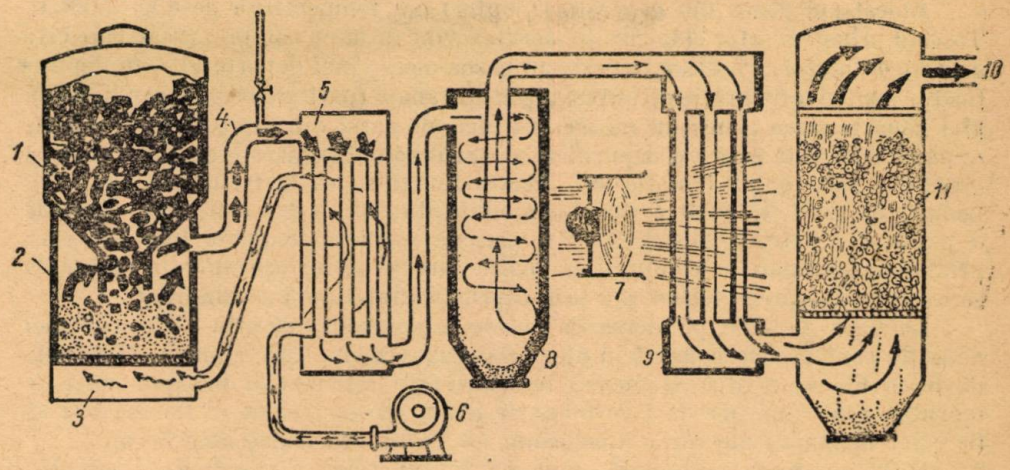


Fig. 1

La toate acestea se adaugă într-o largă măsură, consumul de carburanţi pentru tractoare la munca cîmpului şi pentru exploatările forestiere.

Pentru satisfacerea nevoilor enumerate, pentru raţionalizarea consumului de benzină, folosirea unui carburant de înlocuire este tot mai mult simţită. De aceea, construirea de automobile şi locomotive gazogeneratoare, de instalaţii gazogeneratoare, care permit înlocuirea combustibilului superior prin combustibili inferiori (lignit, turbă, deşeuri de lemn) constituie una din cele mai bune soluţii în rezolvarea acestei probleme.

Noul carburant «gazul de lemn» numit şi «gazul pădurilor» a fost descoperit după primul război mondial. El se obţine din lemn şi din cărbune de lemn prin ardere ne completă.

În URSS, deşi se scot cantităţi mari de petrol, Directivele Congresului al XIX-lea al PCUS, au pus industriei sovietice problema măririi producţiei de automobile gazogeneratoare şi a organizării producţiei de locomotive gazogeneratoare, pentru a folosi în acest scop imensele resurse forestiere şi pentru economisirea combustibilului lichid.

În afară de avantajul că acest gaz se poate obţine din deşeurile de lemn ale industriei forestiere şi din arborii căzuţi sau uscaţi de prin păduri, s-a dovedit că întrebuinţarea lui asigură o economie totală de 75 % în comparaţie cu benzina.

Diferitele instalaţii gazogene (pentru automobile, tractoare, locomotive etc.) se deosebesc numai în amănunte tehnice, deoarece principiul transformării combustibilului solid în gaz combustibil este identic.

În fig. 1 este reprezentată schema generală a unei instalaţii gazogene.

Combustibilul trece din buncăr în cuptorul gazogeneratorului. În partea de jos a cuptorului are loc arderea necompletă a combustibilului solid, lemn sau cărbune de lemn. Gazul format iese prin partea de sus a cuptorului. În compo-

ziţia lui intră 25 % oxid de carbon, 15 % hidrogen, 1—2 % metan, restul fiind alcătuit din gaze necombustibile — bioxid de carbon şi azot.

La gazificarea unui combustibil cu conţinut mare de substanţe răşinoase alimentarea gazogenului cu aer şi modul de conducere a gazului format se schimbă pe alocurea. Totodată are loc o transformare a substanţei răşinoase în gaz combustibil.

Amestecul gazos din generator (cuptor) are temperatura de 400—500° C. Trecînd prin generator el încălzeşte aerul ce vine de la un compresor sau care este aspirat de motor. Pe urmă, amestecul gazos merge mai departe într-un depurificator pentru a fi curăţit de impurităţile antrenate (particule solide sau lichide). Mai departe trece printr-un refrigerent răcit de aerul din atmosferă. În sfîrşit, după ce trece prin încă un depurificator, gazul combustibil este condus—răcit şi curăţit — spre cilindrii motorului. Acesta funcţionează la fel cu un motor cu benzină obişnuit. Întrucît motorul este alimentat cu un gaz mai sărac el pierde o parte din puterea sa (20—30 %); această pierdere se poate însă recupera printr-o funcţionare la compresiune înaltă care se obţine uşor într-un motor de serie, prin alungirea bielelor sau prin căptuşirea interioară a cilindrilor.

La unele sisteme, pierderea de putere se compensează prin injectarea unei anumite cantităţi de benzină în amestecul gazos ce vine spre cilindri. Cărbunele de lemn folosit pentru asemenea instalaţii este sfărîmat în bucăţele mici de mărimea unei nuci, iar dacă se foloseşte lemn, acesta trebuie să fie uscat şi să fie tăiat în bucăţi ale căror dimensiuni nu trebuie să depăşească 8 cm.

După o oprire prelungită, punerea în funcţiune durează 5—7 minute; dacă vehiculul n-a fost oprit mai mult de 20 minute, pornirea sa este aproape instantanee. Unele vehicule utilizează la pornire benzină, pentru demaraj, iar pe

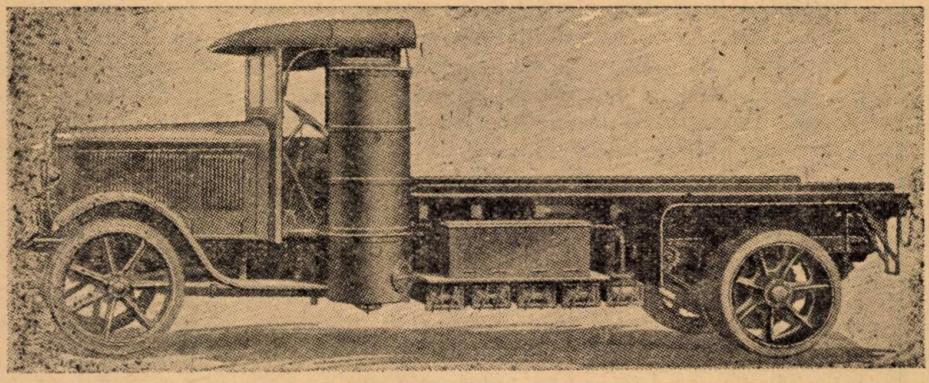


Fig 2

urmă funcţionează cu cărbune de lemn; punerea în funcţiune este atunci imediată. După reîncărcare cu carburanţi vehiculul poate parcurge o distanţă de aproape 200 km.

Regularitatea de mers este remarcabilă atît la utilizarea lemnelor cît şi a cărbunelui de lemn. Viteza camioanelor sau a automobilelor de turism este apropiată de aceea a vehiculelor cu benzină.

Gazogenul şi depurificatorul trebuie întreţinuţi cu mai multă grijă decît organele unei maşini obişnuite; cam la 2000 de km gazogenul trebuie golit şi

curăţit. Această operaţie nu durează însă mai mult de o oră. Curăţirea se efectuează mai uşor la gazogenele cu lemn decît la cele cu cărbune.

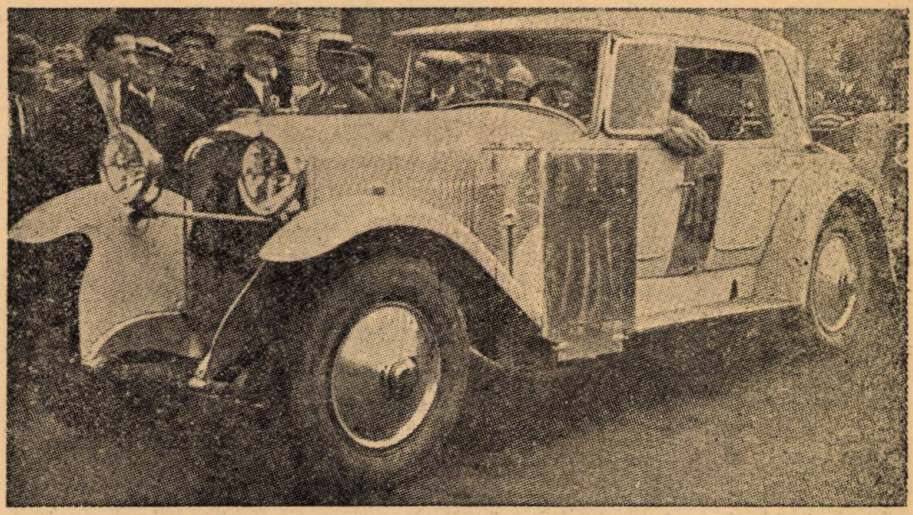


Fig. 3

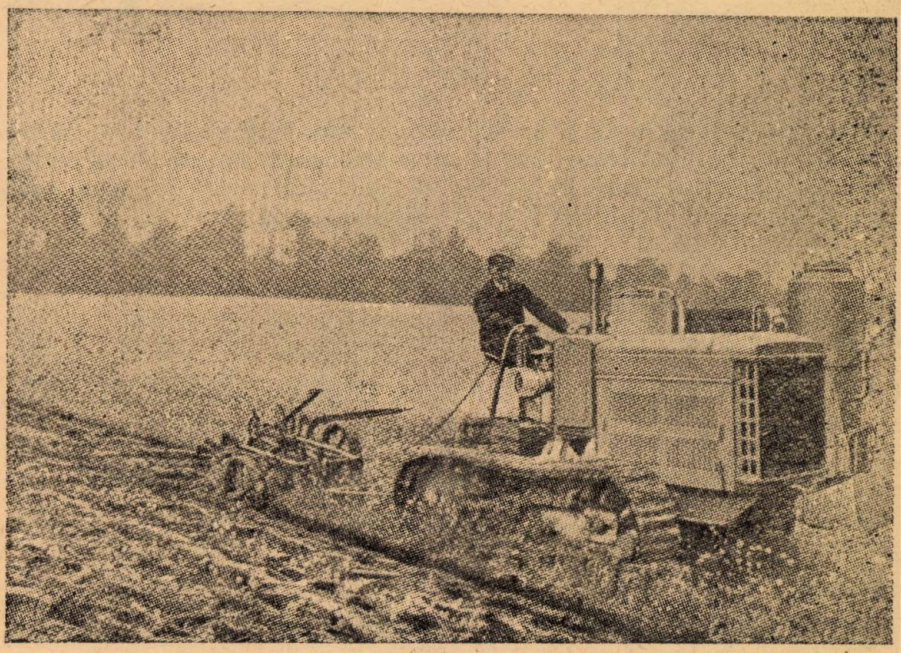


Fig. 4

Actualmente construcţia vehiculelor cu gazogen este pusă bine la punct; perfecţionările privesc numai detaliile. Regularitatea de mers este perfectă,

iar viteza destul de bună. Cheltuielile de carburant nu ating 25 % din cheltuiala cu benzină.

După cum am mai menţionat, vehiculele cu gazogen pot fi folosite şi în ţara noastră, care posedă rezerve însemnate de carburanţi necesari acestora.

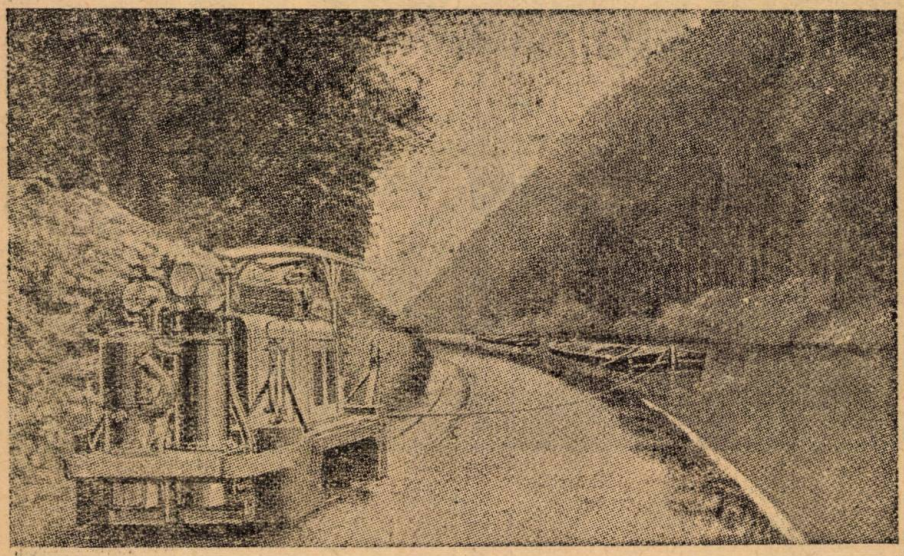


Fig. 5

Mecanizarea agriculturii şi a exploatărilor forestiere va implica utilizarea unor cantităţi considerabile de combustibil şi de aceea se impune să ne preocupe economisirea benzinei, care trebuie să rămînă carburantul principal pentru aviaţie şi motoarele de construcţie mai pretenţioasă.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII
MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUCŢIA ŞI GRADAREA UNUI AMPERMETRU-VOLTMETRU PENTRU CURENT CONTINUU ŞI ALTERNATIV CU SENSIBILITATE VARIABILĂ

Conf. VIRGIL PAVLU

Materiale necesare:

1) planşetă de lemn din esenţă grea, 3 cm. 8 cm. 18 cm;
2) carton de 1 mm grosime, 2 dm^2;
3) sîrmă izolată de Cu, $D = 0{,}15$ mm, 50 g, 333 m;
4) sîrmă izolată de Cu, $D = 1$ mm, 73 g, 11 m;
5) 10 cm fier baton, $D = 0{,}75$ mm;
6) ţeavă de Cu, 15 cm, $D = 1{,}5$ cm;

7) 3 bucşe cu şurub de fixare pentru conexiune din alamă;
8) 1 linie cu secţiune pătrată din lemn cu latura bazei de 0,8 cm;
9) sîrmă de aramă călită, $D = 1{,}5$ mm, 1 dm;
10) 1 fişie de tablă din aluminiu, 0,5 mm. 3 mm. 120 mm;
11) carton alb de 1/2 mm grosime (1 dm^2);
12) 3 şuruburi pentru lemn de 4 cm din alamă;
13) o spiţă de bicicletă, cu bucşă;
14) sîrmă de cupru, $D = 0{,}5$ cm, 3 cm.

Pentru măsurarea intensităţii, respectiv a diferenţei de potenţial a curentului electric continuu se folosesc de obicei instrumente electromagnetice. Pentru curent alternativ se folosesc instrumente termice, bazate pe efectul termic al curentului:

$$Q_{cal} = 0{,}24\, I^2 R t,$$

unde Q este cantitatea de căldură pe care o dezvoltă curentul, exprimată în calorii; R — rezistenţa circuitului exprimată în ohmi; I — intensitatea curentului, exprimată în amperi şi t — timpul, exprimat în secunde, care nu depinde de sensul curentului, deoarece termenul care poartă semnul (I) este la pătrat.

Construcţia unui instrument termic pentru determinări cantitative avînd sunt variabil pentru schimbarea sensibilităţii este însă, o operaţie delicată, ca şi reparaţia lui.

Principiul de funcţionare al instrumentului pentru măsurarea intensităţii şi diferenţei de potenţial a unui curent continuu sau alternativ (în cazul din urmă fiind vorba de intensitatea şi diferenţa de potenţial eficace, adică egală cu aceea a curentului continuu care ar produce acelaşi efect termic în acelaşi interval de timp), este bazat pe acţiunea cîmpului magnetic creat de curent asupra fierului şi folosind ca forţă de echilibrare forţa corespunzătoare devierii cu un anumit unghi a braţului unei balanţe ordinare de sensibilitate variabilă cunoscută.

Construcţia instrumentului. Instrumentul se compune dintr-o balanţă ordinară (fig. 1), avînd planşetă de lemn (A) din esenţa grea, pentru o mai bună stabilitate, cu dimensiunile 3 cm, 8 cm, 18 cm (fig. 2), prevăzută cu un orificiu central cilindric de 1,5 cm diametru, în care se introduce prin forţare o ţeavă de cupru lungă de 14 cm (B), care serveşte drept suport. La partea superioară ţeava este scobită şi are părţile laterale îndreptate (fig. 2, det. 1) şi pilite cu o pilă rotundă; ele servesc drept lăcaş de sprijin pentru cuţitul central al pîrghiei balanţei. Pîrghia balanţei (C), cu distanţa între cuţitele extreme de 10 cm, este alcătuită dintr-o linie cu secţiune patrată de lemn cu diametrul de 0,8 mm, suficient de rezistentă pentru a nu fi deformată, cînd balanţa este încărcată, ceea ce ar duce la variaţia sensibilităţii. Este absolut necesar ca suportul, pîrghia şi în special acul indicator (D) să fie confecţionate din materiale nemagnetice. Acul indicator se confecţionează dintr-o fişie de tablă din aluminiu groasă de 0,5 m şi lată de 3 mm şi se fixează prin încovoiere şi strîngere cu cleştele la extremitatea anterioară a cuţitului central. Cuţitul central se confecţionează din sîrmă de oţel cu diametrul de 1,5 mm, cu tăişul prismatic obţinut prin pilire şi se introduce în poziţia corectă prin forţare într-un orificiu cu diametrul de cca 1 mm, executat în pîrghie cu un burghiu fin. Lungimea lui va fi astfel potrivită, încît să depăşească cu 1 mm suportul de cupru la partea posterioară şi cu 4 mm la partea anterioară, pentru a se putea fixa acul indicator de aluminiu

(fig. 2, det. 2). La partea superioară a suportului de cupru se fixează cu ajutorul unei sîrme de cupru (*E*, det. 3) o cumpănă confecționată dintr-un fir de ață cu o greutate de cupru, care indică direcția verticală, cînd vîrful ei coincide cu vîrful ascuțit al unei sîrme de cupru fixată jos, în planșetă.

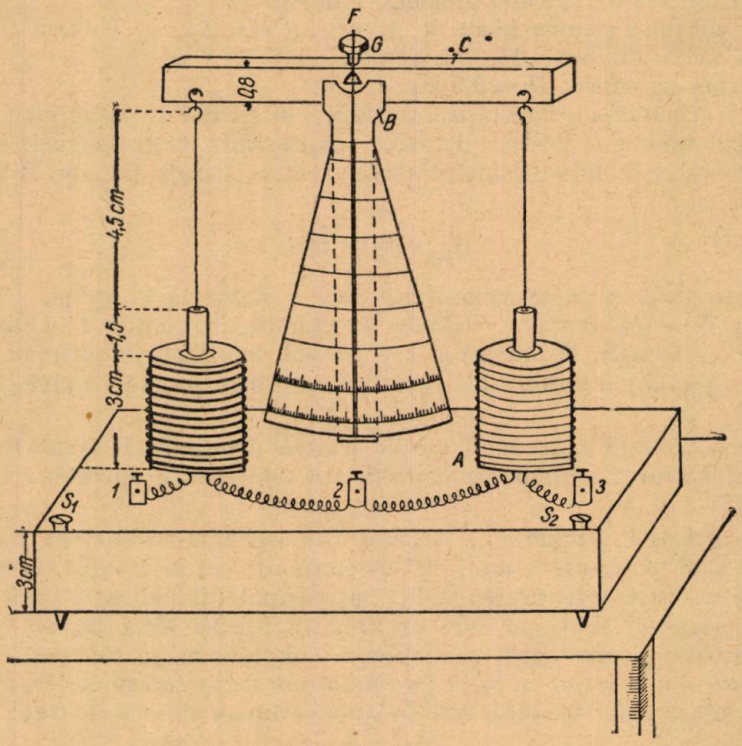


Fig. 1

La extremități, adică la o distanță de 5 cm de cuțitul central, pîrghia (*C*) are două cuțite, confecționate din sîrmă de cupru tratată termic, cu diametrul de 1,5 mm, orientate cu tăișul în sus (fig. 2, det. 2). Firește, centrul de greutate al pîrghiei (*C*) trebuie să se afle sub tăișul cuțitului central; fără această condiție balanța nu ar fi stabilă. Centrul de greutate al pîrghiei poate fi însă deplasat cu ajutorul unei greutăți *G*, care poate fi coborîtă sau ridicată prin înșurubare pe axul (*F*) prevăzut cu filet (fig. 2, det. 3), fixat vertical pe partea superioară a mijlocului pîrghiei. Axul cu filet se confecționează din capătul unei spițe de bicicletă, iar greutatea (*G*) — din bucșa respectivă — pe care se fixează prin forțare un mic tambur de lemn gradat și avînd un orificiu axial. În felul acesta sensibilitatea balanței, care condiționează sensibilitatea instrumentului, variază în funcție de înălțimea greutății (*G*); ea poate fi precizată prin unghiul de rotație parcurs de tamburul divizat. De cuțitele extreme se fixează două cîrlige duble (fig. 2, det. 4) confecționate din sîrmă de cupru; cîrligele trebuie să aibă un mic joc. De aceste cîrlige se fixează cu două sîrme de cupru cu diametrul de 1 mm, două bucăți de fier cilindrice cu diametrul de 7,50 mm și lungimea de 27 mm (fig. 2, det. 5); acești cilindri au la partea superioară un orificiu, care permite agățarea lor cu o sîrmă de cupru; cu ajutorul unui bonfaer se execută o

adîncitură, pentru păsuirea sîrmei de cupru. La partea de jos cilindrii sînt uşor rotunjiţi. În poziţia de echilibru cilindrii de fier trebuie să pătrundă pe jumătate în bobină.

Bobinele se înfăşoară pe mosoare de carton cu grosimea de 1 mm, înălţimea de 3 cm, diametrul exterior de 3 cm şi diametrul interior de 12 mm (fig. 2, det. 6). Pentru confecţionarea lor se taie mai întîi două rondele în formă de coroană, care vor alcătui bazele, iar axul mosorului se confecţionează dintr-o bucată dreptunghiulară de carton cu grosimea de 1 mm, cu dimensiuni corespunzătoare, care se înfăşoară pe un cilindru cu diametrul mai mic decît lumina interioară a mosorului, astfel încît să se obţină diametrul potrivit prin destindere şi să se poată lipi bine cu clei de lemn de rondelele în formă de coroană. Lumina interioară a mosorului trebuie să permită un joc cilindrului de fier.

Pentru cele două bobine ale instrumentului (în partea stîngă de intensitate, iar în partea dreaptă de tensiune, ceea ce se notează cu literele (*I*) şi (*E*) în dreptul lor pe grosimea planşetei de lemn) se foloseşte sîrmă de cupru, izolată cu lac.

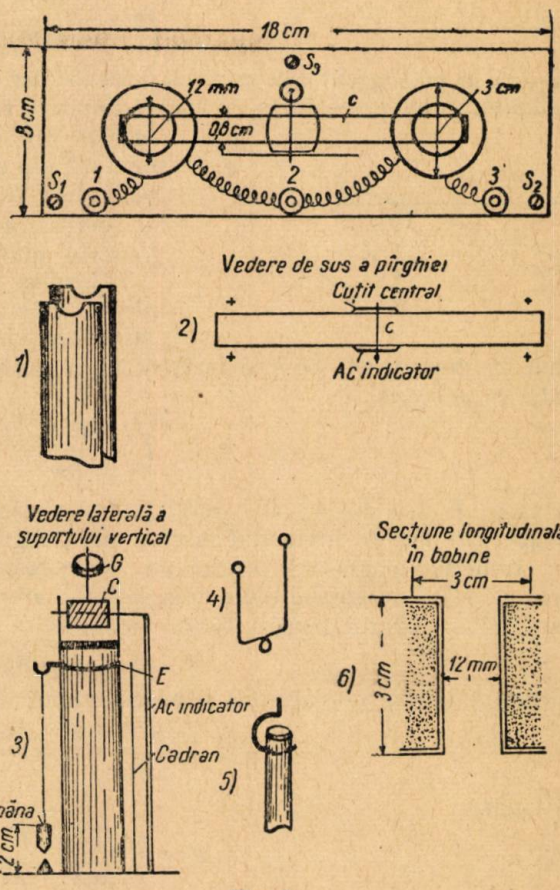


Fig. 2

Pentru bobine de intensitate se poate folosi sîrmă cu diametrul de 1 mm, cu lungimea de 11 m şi greutatea de cca 73 g; se realizează o rezistenţă ohmică de 0,26 Ω. Numărul spirelor fiind relativ mic, rezultă că pentru frecvenţa 50 Hz a curentului alternativ uzual, impedanţa este puţin deosebită de rezistenţa ohmică. Pentru bobina de tensiune se poate folosi sîrmă de cupru izolată, cu diametrul de 0,15 mm. Folosindu-se cca 53 g de sîrmă cu diametrul de 0,15 mm, se obţine o rezistenţă ohmică de 300 Ω, o impedanţă de cca 350 Ω, o lungime de 330 m şi un număr de spire de 5100. Toate aceste dimensiuni nu sînt date cu mare precizie pentru că etalonarea instrumentului nu se face prin calcul, ci empiric, adică prin comparaţie cu un instrument de precizie.

Teoria instrumentului. Cînd lăsăm să treacă curentul prin una din cele două bobine, fierul cilindric este atras în interiorul bobinei cu o forţă ce acţionează asupra balanţei şi pe care o comparăm cu sarcina suplimentară din studiul sensibilităţii balanţei. Braţul balanţei (fig. 3) se echilibrează cînd suma momen-

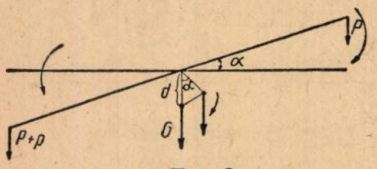
telor este nulă, adică:

$$(P + p)\, l \cos \alpha - Gd \sin \alpha - Pl \cos \alpha = 0$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{Gd} \qquad (1)$$

în care P este greutatea unui cilindru de fier + greutatea sîrmei + greutatea cîrligului dublu; p — forţa cu care acţionează bobina asupra cilindrului de fier,



Fg. 3

forţă pe care o comparăm cu sarcina suplimentară din studiul balanţei; α — unghiul de înclinaţie; G — greutatea braţului balanţei cu cuţite; d — distanţa de la centrul de greutate pînă la punctul de sprijin.

Rezultă că tg α, iar pentru unghiuri mici α, este proporţional cu forţa cu care acţionează bobina, deci cu forţa portantă a unui electromagnet. Se ştie însă, că forţa portantă a unui electromagnet este dată de expresia:

$$f = \frac{B^2 S}{8\pi},$$

în care: F este forţa; B — inducţia magnetică $= \mu H$(μ fiind permeabilitatea magnetică, iar H intensitatea cîmpului magnetic); S — suprafaţa.

Inducţia magnetică pentru un electromagnet este însă: $B = \mu 4\pi ni$, în care μ este permeabilitatea magnetică; n — amper-spire; i — intensitatea curentului; rezultă pentru forţa portantă:

$$f = 2\pi S\, (\mu ni)^2;$$

înlocuind în (1) valoarea lui p prin f avem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi S\, \mu^2 n^2 l}{Gd} = \frac{2\pi S (\mu ni)^2 l}{Gd},$$

de unde:

$$i = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha\, Gd}{2\pi S \mu^2 n^2 l}},$$

ceea ce arată că pentru unghiuri mici intensitatea curentului creşte mai încet decît unghiul. Avem deci o relaţie de dependenţă, şi nu de proporţionalitate. Pentru o anumită sensibilitate dată de parametrul variabil (d) rezultă un unghi care depinde numai de intensitatea curentului. Aceasta impune etalonarea instrumentului prin comparaţie.

Etalonarea pentru măsurarea intensităţilor. 1) Pe partea anterioară a suportului de cupru, cît mai aproape de acul de aluminiu, se fixează un cadran în formă de sector circular confecţionat din carton alb cu grosimea de 1,2 mm;

2) Se aşază instrumentul în poziţia corectă şi se acţionează asupra şuruburilor de alamă (S_1) şi (S_2), verificînd verticalitatea cu ajutorul cumpenei (instrumentul se sprijină pe şuruburile reglabile (S_1) şi (S_2) şi pe un al treilea şurub, fix, confecţionat de asemenea din alamă, aşezat la partea posterioară a suportului;

3) Se închide curentul după cum se vede în fig. 4, intercalînd în serie un reostat variabil, un ampermetru termic de precizie (A) şi bobina de

intensitate a instrumentului (*B.I*), folosind bucşele de conexiune din alamă (1) şi (2);

4) Se ridică centrul de greutate al pîrghiei balanţei cu ajutorul şurubului cu tambur (*G*) (fig. 2, det. 3), aducînd sensibilitatea balanţei la maxim;

5) Se trece un curent slab, mărind rezistenţa circuitului cu ajutorul reostatului variabil, astfel încît devierea acului de aluminiu să fie în scară;

6) Acţionînd asupra reostatului şi şurubului de sensibilitate al balanţei, se potriveşte pentru poziţia extremă a acului o valoare rotundă a amperajului (de exemplu, 0,05; 0,1; 0,5 A etc.) şi se notează poziţia acului pe cadran. Se notează apoi poziţia acului pe cadran pentru alte două trei valori intermediare ale amperajului indicat de ampermetrul de precizie şi prin interpolare se construieşte scara corespunzătoare sensibilităţii la care se lucrează. Se micşorează apoi sensibilitatea balanţei acţionînd asupra tamburului *G*, astfel încît devierii extreme a acului să-i corespundă o valoare rotundă imediat superioară pentru amperaj şi se construieşte o a doua scară, eventual o a treia. Spre a etalona instrumentul pentru amperajul curentului alternativ se procedează în mod analog. Pentru aceeaşi sensibilitate a balanţei şi aceeaşi intensitate (eficace) a curentului se găsesc devieri ale acului foarte apropiate de cele precedente, pentru că bobina are coeficientul de autoinducţie mic şi impedanţa ei este foarte apropiată de rezistenţa ohmică, pentru curentul alternativ uzual de 50 Hz. Se pot folosi, cu oarecare aproximaţie, gradaţiile notate pentru intensitatea curentului continuu.

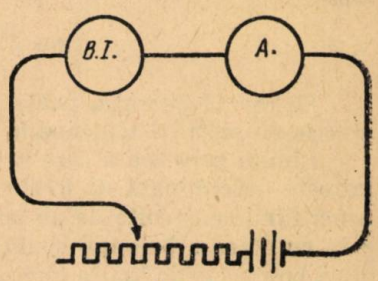


Fig. 4

Toate aceste gradaţii se notează în jumătatea dreaptă a cadranului, în raport cu poziţia de echilibru a acului de aluminiu.

Etalonarea instrumentului pentru măsurarea diferenţei de potenţial. Pentru aceasta se foloseşte un montaj adecuat (fig. 5), care permite supunerea simultană a bobinei de tensiune (din dreapta), prin conectare la bucşele (2) şi (3) (fig. 2) şi a voltmetrului de precizie la tensiuni variabile. Se începe cu etalonarea pentru măsurarea diferenţei de potenţial a curentului continuu. Pentru un anumit unghiu de deviere corespunde o anumită intensitate, deci o anumită diferenţă de potenţial, legată de ea prin legea lui Ohm:

$$E = IR$$

în care E este diferenţa de potenţial de măsurat; I — intensitatea curentului care trece prin bobina de tensiune şi R — rezistenţa ohmică a bobinei de tensiune.

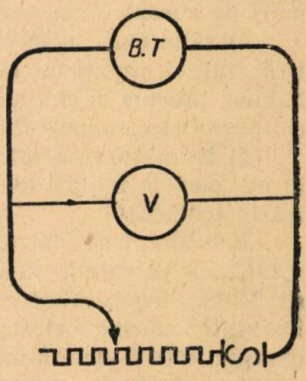


Fig. 5

Pentru măsurarea diferenţei de potenţial a curentului alternativ este necesară o nouă etalonare, deoarece impedanţa bobinei este mai mare decît rezistenţa ohmică. Impedanţa bobinei se poate afla în două feluri:

1) prin calcul, cu relaţia

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2},$$

în care Z este impedanța (rezistența la curentul alternativ); R — rezistența ohmică; L — coeficientul de autoinducție al bobinei exprimat în henry și ω — pulsația curentului, L fiind egal cu:

$$L = \frac{\text{pătratul lungimii firului}}{\text{lungimea bobinei}};$$

2) prin determinarea intensității eficace corespunzătoare unei anumite diferențe de potențial eficace, ambele măsurate cu instrumentul termic de precizie,

$$Z = \frac{\text{diferența de potențial eficace}}{\text{intensitatea eficace}},$$

Se repetă operația pentru alte sensibilități ale balanței și se obțin astfel, o serie de scări de tensiune în partea stîngă a cadranului.

Limita superioară care se poate realiza pentru sensibilitatea instrumentului este determinată de limita superioară a sensibilității balanței; aceasta din urmă fiind construită de un amator, sensibilitatea ei firește nu poate fi comparată cu aceea a balanței analitice. Limita inferioară este condiționată de încălzirea bobinei și de limita inferioară a sensibilității balanței, legată de deplasarea centrului de greutate.

Concluzii. Pentru o bună funcționare și reproductibilitate a măsurătorilor trebuie respectate următoarele condiții:

1) Balanța să fie perfect centrată și să se evite orice frecare, cu excepția frecării minime a cuțitelor; acestea trebuie să fie bine ascuțite și să calce în lăcașe șlefuite;

2) bobina de tensiune să aibă o rezistență mai mare (de ordinul de mărime 2000 Ω), altfel, la măsurarea diferențelor de potențial care deservesc rezistențe mari se găsesc valori inferioare celor reale;

3) să se evite frecarea cilindrilor de fier de cartonul bobinelor, în special pentru sensibilități mari. În poziția de echilibru, cilindrii de fier trebuie să fie ușor excentrici spre exterior, fără să se frece. Cînd brațele balanței se înclină, cilindrii de fier se centrează, pentru ca la sfîrșitul cursei să devină excentrici spre interior, fără să se frece. Pentru cîmpuri mai puternice, create de intensități mari de curent, ei se centrează singuri;

4) să se evite apropierea corpurilor cu coeficienți de permeabilitate magnetică mult deosebiți de 1, deoarece ele formează cîmpurile magnetice create de bobine, precum și cîmpurile magnetice de orice natură, care se suprapun peste cîmpurile electromagnetice create de bobine, deformînd rezultatele;

5) la măsurarea intensităților și diferențelor de potențial necunoscute se începe cu sensibilități mici, pentru a se evita acțiunile puternice care ar descentra instrumentul.

Este drept că instrumentul nu este portativ și ușor se poate deranja, însă rezultatele pe care le dă sînt destul de utile în raport cu modestul material folosit. El face legătură între două domenii în care precizia măsurătorilor este foarte înaintată: mărimile electrice și forțele corespunzătoare maselor plasate în cîmpul gravific, care se determină cu balanța ordinară. Am putea spune că instrumentul descris «cîntărește mărimile electrice», posibilitate întrevăzută pentru prima oară de Lomonosov, care a folosit drept mijloc de măsură, sensibilitatea balanței ordinare, ca și în balanțele analitice moderne.

DESPRE SPIN

de aspirant A. HRISTEV

PENTRU a înţelege *natura* spinului este bine să ne reamintim cîteva noţiuni cunoscute din mecanica clasică a lui Newton.

Impulsul unei particule (sau cantitatea de mişcare) este produsul dintre masa m a particulei şi viteza ei: $\vec{p} = m\vec{v}$. La fel ca şi viteza, impulsul este o mărime *vectorială**) caracterizată atît de valoarea ei numerică, cît şi de direcţia pe care acţionează (deci de 3 variabile, de exemplu trei proiecţii pe axele unui sistem ortogonal de coordonate). Impulsul se poate deci reprezenta grafic ca un vector a cărui lungime este egală cu valoarea numerică a impulsului, iar orientarea în spaţiu coincide cu cea a vitezei.

Momentul cinetic al unei particule (momentul cantităţii de mişcare) faţă de un punct este egal în valoare absolută cu produsul dintre valoarea absolută a impulsului şi distanţa de la punctul considerat pînă la dreapta pe care acţionează impulsul: $M = r_0 p$. Momentul cinetic poate fi reprezentat printr-un vector dus în punctul considerat şi orientat perpendicular pe planul format de punctul considerat şi de dreapta pe care acţionează impulsul, astfel încît raza vectoare $\vec{r}$ (dusă din punctul O în spre vectorul $\vec{p}$), impulsul $\vec{p}$ şi momentul $\vec{M}$ să formeze un sistem de aceeaşi orientare ca şi sistemul de coordonate (fig. 1).

Pentru o particulă care se mişcă într-un cîmp de forţe central (adică forţele sînt orientate după razele vectoare duse dintr-un centru), momentul cinetic al particulei se conservă (atît ca valoare numerică, cît şi ca orientare). Momentul cinetic este strîns legat de mişcarea de rotaţie în jurul unei axe.

Momentul cinetic al unui *sistem* de particule faţă de un punct dat se obţine adunînd momentele cinetice ale particulelor componente, bine înţeles conform regulei de adunare a *vectorilor* (adică după regula paralelogramului).

Momentul cinetic faţă de o axă este proiecţia pe această axă a vectorului moment.

Momentul cinetic al unui sistem de particule este egal cu suma vectorială dintre momentul cinetic al sistemului în raport cu *centrul lui de inerţie* şi momentul cinetic al întregii mase a sistemului, presupusă concentrată în centrul de inerţie şi mişcîndu-se odată cu el.

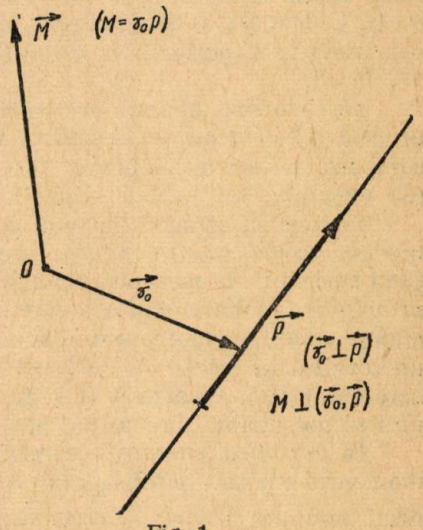


Fig. 1

Putem acum să ne apropiem şi mai mult de noţiunea de spin.

Să considerăm un sistem format din mai multe particule (de exemplu un nucleu atomic), care efectuează în ansamblul său o anumită mişcare. Vom considera că sistemul (nucleul) are o anumită energie internă. Prin aceasta însă,

*) Vezi despre vector în G.M.F.-B, nr. 10, 11 (1951).

starea internă a sistemului nu este încă, în general, complet determinată, şi anume, momentul cinetic (interior) al sistemului (adică momentul cinetic al particulelor în mişcarea lor în interiorul sistemului (nucleului) poate avea diferite orientări în spaţiu. Aşadar, studiind mişcarea unui sistem (nucleu) (aflat într-o stare internă dată) ca un întreg, în afară de coordonate lui, trebuie să considerăm *încă o variabilă*, care să determine orientarea momentului cinetic interior.

Acum am ajuns complet la noţiunea de spin.

Într-adevăr, nu avem nici un motiv să considerăm a priori că, în cazul cînd sistemul de mai sus este *o particulă elementară*, acest moment cinetic « propriu » trebuie să fie nul. Cu alte cuvinte, studiind mişcarea unei particule elementare oarecare, trebuie să introducem, alături de coordonatele ei, *încă o variabilă*, specifică fiecărei particule. Prin urmare, trebuie să atribuim, în general, fiecărei particule elementare, un anumit *moment cinetic « propriu », nelegat de mişcarea particulei în spaţiu.*

Momentul cinetic propriu al unei particule se numeşte « spinul » ei, spre deosebire de momentul cinetic legat de mişcarea particulei în spaţiu, pe o orbită, care se numeşte moment cinetic *orbital*. Vedem deci că pentru a determina starea unei particule trebuie indicate nu numai coordonatele ei, ci şi orientarea vectorului spin.

Cuvîntul spin vine de la «to spin» (engl.) = a învîrti, a răsuci. La baza acestei denumiri a stat ideea fizică a unei particule-corpuscul extinsă, care se roteşte în jurul axei sale şi deci are un anumit moment cinetic propriu (ca un titirez). Ideea fizică a existenţei unui moment cinetic propriu la electron a fost emisă de G. Uhlenbeck şi S. Goudsmit în anul 1925. În mecanica cuantică (mecanica nerelativistă *a particulelor elementare*) spinul a fost introdus în anul 1927 de W. Pauli.

Cînd vorbim aici de particule *elementare* avem în vedere atît particulele propriu zis elementare (în stadiul actual al ştiinţei), cît şi particulele care, deşi compuse, se comportă într-o sferă dată de fenomene ca particule elementare (de exemplu, un nucleu atomic).

Trebuie să atragem în mod deosebit atenţia că *spinul particulelor elementare este un efect specific cuantic*, care apare numai în cadrul mecanicii cuantice *). Cînd trecem de la mecanica cuantică la mecanica clasică el dispare; prin urmare, *principial* nu admite o interpretare *clasică*. În particular, nu are sens să ne imaginăm spinul, — momentul cinetic « propriu » al particulei elementare, — ca un rezultat al rotaţiei ei în jurul « axei proprii » (imaginea corpusculului-sferă care se roteşte). Aceasta se vede de altfel şi din faptul că unei particule *elementare* nu i se pot atribui dimensiuni nenule (fapt care rezultă din teoria relativităţii).

În *mecanica cuantică* (nerelativistă) spinul unei particule (la fel ca şi momentul cinetic *orbital*, legat de mişcarea particulei pe o *orbită*) nu poate lua decît anumite valori *determinate* şi anume, valoarea absolută a spinului, $|\vec{s}|$, *măsurată în unităţi* h (h este constanta lui Planck, $h = 1{,}054.10^{-27}$ erg. s; momentul cinetic are dimensiunea: impuls. distanţă = energie. timp), poate lua valorile

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}, \qquad (1)$$

*) Teorie a mişcării particulelor elementare, care explică o serie de fenomene fizice la scara atomică. In teoria cuantică se asociază fiecăru corpuscul o undă şi fiecărei unde un corpuscul, adică particulele au atît proprietăţi ondulatorii, cît şi proprietăţi corpusculare.

unde s poate fi un număr întreg (inclusiv zero) sau un număr semiîntreg $\left(s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots\right)$, care depinde de tipul particulei (s este pentru fiecare tip de particule un număr dat).

Pentru un s dat, proiecția spinului pe o axă dată, de exemplu pe axa z, nu poate lua orice valoare, ci numai $2s + 1$ valori:

$$s_z = s, s - 1, \ldots, \quad -s + 1, -s \tag{2}$$

(în unități h). Aceasta înseamnă că vectorul spin poate avea numai *anumite* orientări în spațiu.

Numărul s care determină valoarea absolută a spinului: $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}$, și valoarea maximă a proiecției spinului pe o axă dată, este, ceea ce se cheamă în mod obișnuit, spinul particulei. Astfel, majoritatea particulelor elementare (electronul, protonul, neutronul, neutrino) au spin 1/2 ($s = 1/2$), unele tipuri de mezoni au probabil spin 0 ($s = 0$) și 1 ($s = 1$).

Dacă $s = 1/2$, atunci $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar $s_z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (în unități h). Dacă $s = 1$, atunci $|\vec{s}| = \sqrt{2}$, iar $s_z = 1,0, -1$.

Pentru a trece de la mecanica cuantică la cea clasică, trebuie să facem $h \to 0$. Deoarece s este pentru fiecare tip de particule un număr dat, momentul-spin $hs \to 0$, cînd $h \to 0$, deci nu are analog clasic (lucru despre care am vorbit mai sus).

Trebuie amintit că în mecanica cuantică nu are sens să se vorbească *simultan* de toate cele *trei* proiecții ale spinului (în general ale momentului cinetic), și anume, starea de spin este complet determinată de *două* variabile, de exemplu $|\vec{s}|$ și s_z. În acest ultim caz, pentru a avea o imagine intuitivă, ne putem închipui că vectorul spin, de o anumită lungime $|\vec{s}|$, efectuează *o mișcare de precesie* *) în jurul axei z, astfel încît s_z are valoarea dată (atunci s_x și s_y vor fi nedeterminați, după cum și trebuia, căci $|\vec{s}|$ și s_z sînt determinați).

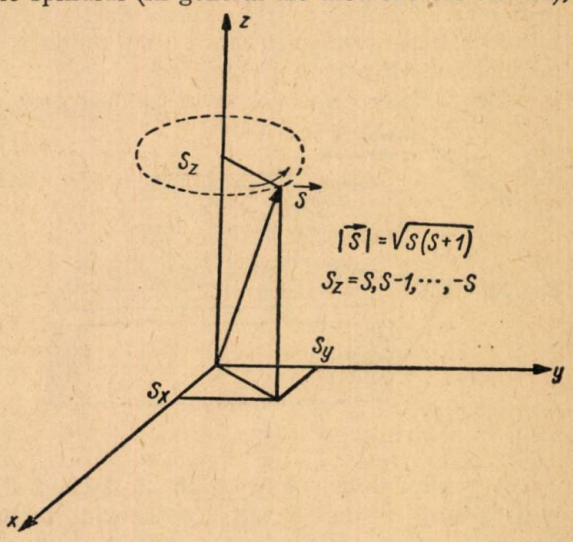


Fig. 2

În teoria cuantică relativistă a electronului spinul rezultă în mod automat din teorie ($s = 1/2$), electronul avînd și un *moment magnetic* (trebuie amintit că și neutronul are un moment magnetic, deși este neutru). În rezumat, spinul unei particule este momentul ei cinetic propriu—efect specific cuantic, care se anulează la limita clasică. Se spune că o particulă are spin s, înțelegînd prin aceasta că $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}$ și $s_z = s, s-1, \ldots, -s+1, -s$.

*) Mișcare în care axa particulei aflate în mișcare se învîrtește în urul unei direcții fixe în spațiu, descriind un con. De exemplu, învîrtirea axei unui titirez aflat în rotație, în jurul verticalei ce trece prin vîrful titirezului.

Spinul particulelor este o caracteristică extrem de importantă. Spinul determină în mod esenţial comportarea particulelor, astfel, particulele care au un spin întreg se supun unor legi proprii (legile statisticii Bose— Einstein), esenţial diferite de legile la care se supun particulele cu spin semi-întreg (legile statisticii Fermi — Dirac, principiul excluziunii al lui Pauli). Spinul determină tipul ecuaţiilor care descriu comportarea particulelor respective, astfel, particulele de spin 1/2 sînt descrise de ecuaţiile lui Dirac; particulele de spin 1 sînt descrise de ecuaţiile lui Maxwell-Lorentz (fotoni) sau ecuaţii analoage mai generale (mezoni de spin 1) etc.

Descoperirea spinului la particulele elementare (în particular, la electroni) a dus la explicarea unei serii întregi de fenomene fizice ca de exemplu, structura spectrelor radiaţiilor emise de atomi (structura fină şi hiperfină a spectrelor), efect Z eman anormal, la explicarea unor fenomene feromagnetice (efecte giromagnetice) şi altele.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Atracţia magnetică.** Se iau două ace identice şi se magnetizează unul din ele frecîndu-l într-un acelaşi sens cu un magnet oarecare. Se străpunge apoi cu fiecare ac cîte un dop de plută aşa cum se vede în fig. 1. Se aşează dopurile să plutească într-un vas cu apă. Ţinînd cu mîna dopul străbătut de acul magnetizat, acesta va atrage pe celălalt dop dacă distanţa dintre ele nu este prea mare. Dacă se repetă experienţa ţinînd de astă dată cu mîna dopul străbătut de acul nemagnetizat, se va produce acelaşi fenomen: dopul cu acul magnetizat va atrage pe celălalt.

De ce în ambele cazuri rezultatul este acelaşi?

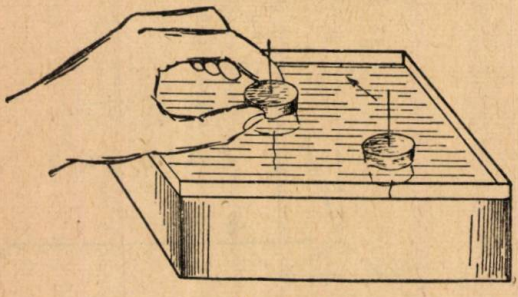


Fig. 1

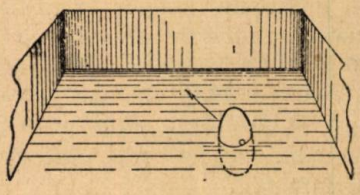


Fig. 2

Legea lui Coulomb ne arată că doi poli de mase magnetice m_1 şi m_2 aflaţi la o distanţă r unul de altul acţionează reciproc cu o forţă proporţională cu produsul maselor şi invers proporţională cu patratul distanţei dintre ele:

$$F = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

unde μ este un factor de proporţionalitate specific mediului care separă cele două mase magnetice şi care se numeşte permeabilitate magnetică.

Experienţa descrisă mai sus ne arată intuitiv că fierul atrage magnetul — conform legii lui Coulomb — cu o forţă egală cu cea cu care este atras el de către magnet.

2. **Reacție.** Se ia un ou crud și se face la ambele capete cîte o găurică prin care se suflă afară conținutul oului. Se face apoi un amestec de bicarbonat de sodiu și acid tartric în părți egale, care se pisează bine într-o piuliță. Amestecul obținut se toarnă prin una din găurele în coaja de ou, aproximativ pînă la jumătate, apoi se astupă ambele găurele cu ceară și se pune oul într-un lighean cu apă. Se însemnă cu creionul linia pînă la care se scufundă oul în apă; se străpunge la înălțimea ei o găurică numai pe o parte a oului și se pune acesta din nou în apă. După un timp scurt, oul va începe să se învîrtească și anume în sensul opus părții pe care s-a făcut găurica. Oul se va învîrti un timp destul de îndelungat (fig. 2).

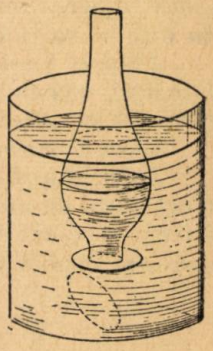


Fig. 3

Ce anume determină oul să se învîrtească și de ce se învîrte într-un anumit sens?

Apa intrînd prin găurică în interiorul oului va ajunge la amestecul din el (bicarbonatul de sodiu cu acidul tartric). Bioxidul de carbon care se formează va apăsa pe pereții oului, inegal. Pe peretele în care e făcută găurica el va apăsa mai slab, din care cauză oul se învîrtește în sens opus acestui perete.

3. **Presiunea de jos în sus în lichide.** Se ia un borcan cu apă și o sticlă de lampă. Se închide cu un carton deschiderea de jos a sticlei de lampă (diametrul cartonului să fie ceva mai mare decît al deschiderii sticlei) și apăsîndu-se cu un deget cartonul se scufundă sticla în apa din borcan astfel încît aproximativ o jumătate din ea să se afle sub apă. Se îndepărtează apoi, degetul de pe carton; acesta va rămîne apăsat de deschiderea sticlei. Se toarnă cu încetul apă în sticla de lampă (fig. 3). Cartonul va rămîne mai departe lipit de sticlă; abia cînd nivelul apei din sticla de lampă va fi aproape egal cu acela al apei din borcan, el va cădea.

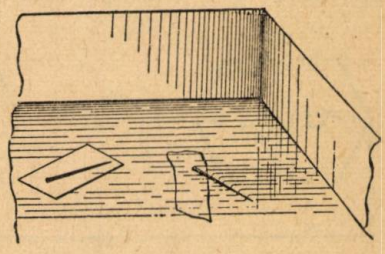


Fig. 4

Ce dovedește această experiență?

Experiența dovedește că asupra cartonului se exercită o presiune de jos în sus, egală cu greutatea unei coloane de apă a cărei bază este egală cu suprafața cartonului (partea care acoperă gura sticlei de lampă), iar înălțimea este corespunzătoare stratului de apă de deasupra cartonului.

4. **Tensiune superficială.** Se ia un vas cu apă, iar pe suprafața acesteia se așează o bucățică de foiță de țigară; aceasta va pluti. Se pune apoi pe foiță, un ac (fig. 4). După cîtva timp foița se va scufunda, acul însă va pluti mai departe pe suprafața apei. După cum se știe, foița de țigară are greutatea specifică mai mică decît apa, iar un ac de oțel are greutatea specifică mai mare. Dece totuși, foița se scufundă, iar acul nu?

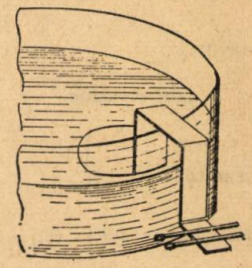


Fig. 5

Foița se scufundă pentru că în porii ei intră apă scoțînd din ei aerul. Acul plutește pentru că nu se udă, iar tensiunea superficială a apei poate foarte bine să-l rețină la suprafață.

5. **Adeziune.** Se taie din carton gros o panglică ce se termină cu un disc la un capăt. Se îndoaie panglica după cum se vede în figură, iar îndoiturile ei se întăresc lipindu-se hîrtiuțe; distanța între îndoituri trebuie să fie de 5—7 cm.

Se pune această panglică pe muchia unei căldări grele și se echilibrează. Este suficient să se așeze pe capătul din afară al panglicei (care iese peste marginea căldării) cea mai mică greutate, de exemplu cîteva chibrituri, și capătul cu disc se va ridica.

Dacă se toarnă încet în căldare, apă, astfel încît discul abia să atingă suprafața apei, nici chiar o greutate mult mai mare pusă pe capătul de afară al panglicii nu va putea determina ridicarea discului.

Cum se explică acest fenomen?

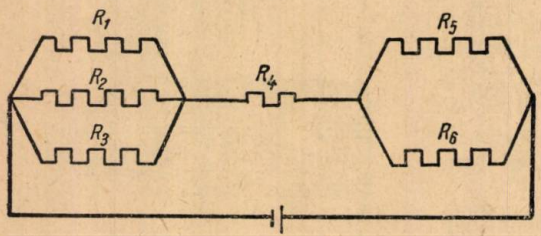
Între suprafața apei și aceea a discului de carton se exercită adeziunea, adică forța de atracție dintre moleculele de apă și cele ale substanței din care e făcut cartonul. Datorită acestei forțe, care în unele cazuri poate să fie foarte mare, se explică dece chiar o greutate mult mai mare nu poate ridica discul.

V. A.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1272

Șase fierbătoare electrice cu rezistențele respectiv de $R_1 = 40\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$, $R_3 = 72\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$, $R_5 = 60\ \Omega$, $R_6 = 15\ \Omega$ *și avînd fiecare randamentul de* 94 %, *sînt legate ca în figură, formînd circuitul exterior al unui generator cu f.e.m. de* 175 V *și rezistența interioară* 0,32 Ω.



Care este fierbătorul ce poate transforma cel mai repede în vapori, 1 kg *gheață la* 0°C *și care este timpul folosit pentru acest lucru?*

Virgil Arsintescu, Iași

Soluție. Notăm cu Rd_1 rezistența derivației întîia, cu Rd_2 rezistența derivației a doua și cu U_1 și U_2 tensiunile respective.

Datorită legărilor în paralel, avem:

$$\frac{1}{Rd_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\ ;\ \frac{1}{Rd_1} = \frac{1}{40} + \frac{1}{25} + \frac{1}{72},$$

de unde:

$$Rd_1 = 12{,}68\ \Omega.$$

Din relațiile

$$\frac{1}{Rd_2} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\ ;\ \frac{1}{Rd_2} = \frac{1}{60} + \frac{1}{50}$$

rezultă:

$$Rd_2 = 12\ \Omega.$$

Mai avem: $Re = Rd_1 + R_4 + Rd_2 = 12{,}68 + 10 + 12 = 34{,}68,$

$$I = \frac{E}{R_i + R_e} = \frac{175}{0{,}32 + 34{,}68} = 5\ \text{A},$$

$$U_1 = Rd_1 \cdot I = 12{,}68 \cdot 5 = 63{,}40\ \text{V},$$

$$U_2 = Rd_2 \cdot I = 12 \cdot 5 = 60\ \text{V},$$

$$U_4 = R_4 \cdot I = 10 \cdot 5 = 50\ \text{V}.$$

Cînd circuitul este închis fiecare fierbător dă o anumită cantitate de căldură. Cantitatea de căldură necesară este citul dintre căldură utilă şi randamentul unui fierbător. Aşa că $Q_n = 0{,}24 \frac{U^2}{R} t$.

Cantitatea de gheaţă poate fi pusă pe unul din fierbătoare şi este evident că, deoarece Q_n este o cantitate precisă, acel fierbător va transforma gheaţa în vapori mai repede, care va avea $\frac{U^2}{R}$ mai mare.

În cazul primei derivaţii fierbătorul F_2 va avea $\frac{U_1^2}{R_2}$ mai mare decît al fierbătoarelor F_1 şi F_3, deoarece are rezistenţa cea mai mică. În cazul derivaţiei a doua este evident, la fel, că fierbătorul F_6 are $\frac{U_2^2}{R_6}$ mai mare decît al lui F_5. Vom afla valoarea raportului $\frac{U^2}{R}$ la fierbătoarele F_2, F_4, F_6.

$$\frac{U_1^2}{R_2} = \frac{63{,}4^2}{25} = 160{,}74; \quad \frac{U_4^2}{R_4} = \frac{50^2}{10} = 250;$$

$$\frac{U_2^2}{R_6} = \frac{60^2}{15} = \frac{3600}{15} = 240,$$

adică, $\frac{U_4^2}{R_4} > \frac{U_2^2}{R_6} > \frac{U_1^2}{R_2}$, deci, fierbătorul F_4 avînd raportul $\frac{U^2}{R}$ cel mai mare din formula $Q_n = 0{,}24\ U^2t/R$, transformă în cel mai scurt timp ghiaţa în vapori. Acest timp se calculează în modul următor: pentru a topi ghiaţa care se află la 0°C, adică la punctul ei de topire, este utilă cantitatea de căldură $Q_1 = \lambda m$,

$$Q_1 = 1000 \text{ g} \cdot 80 \text{ cal g} = 80.000 \text{ cal}.$$

Pentru a aduce apa la 100° C:

$$Q_1 = m.c\,(T_2 - T_1) = 1000 \cdot 1 \cdot 100 = 100.000 \text{ cal}.$$

Pentru a o transforma în vapori:

$$Q_3 = r \cdot m = 539 \cdot 1000 = 539.000 \text{ cal},$$

$$Q_{util} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 80000 + 100000 + 539000 = 719000 \text{ cal},$$

$$r = \frac{Q_{util}}{Q_{necesar}}; \quad 0{,}94 = \frac{719.000}{Q_n}; \quad Q_n = 764.900 \text{ cal},$$

$$Q_n = 0{,}24 \frac{U_4^2}{R_4} t; \quad 764.900 = 0{,}24250\, t,$$

$$t = \frac{764.900}{60} = 12.745 \text{ s},$$

adică aproximativ, 3 ore şi jumătate.

Problema 1501

Să se îngroaşe porţiunile din cercul trigonometric unde se află extremităţile arcelor pentru care:

$$\frac{1 + 3\cos x}{1 - 2\cos x} \geqslant \frac{1 + 4\cos x}{1 - 4\cos^2 x}.$$

* * *

Soluţie. Inegalitatea se mai scrie:

$$\frac{1 + 3\cos x}{1 - 2\cos x} \geqslant \frac{1 + 4\cos x}{(1 - 2\cos x)(1 + 2\cos x)}. \qquad (1)$$

I. Dacă: $(1 - 2\cos\alpha)(1 + 2\cos x) \geqslant 0$, înmulțind inegalitatea (1) cu cantitatea pozitivă $(1 + 2\cos x)(1 - 2\cos x) \geqslant 0$, valabilă pentru $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$, obținem:

$$(1 + 2\cos x)(1 + 3\cos x) \geqslant 1 + 4\cos x;$$

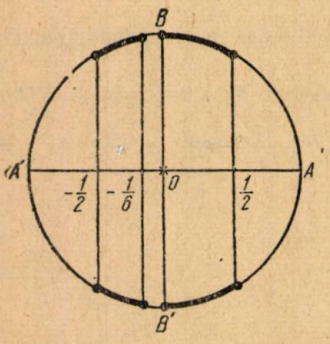
$$1 + 5\cos x + 6\cos^2 x \geqslant 1 + 4\cos x;$$

$$6\cos^2 x + \cos x \geqslant 0;$$

$$\cos x(6\cos x + 1) \geqslant 0$$

de unde

$$\cos x \leqslant -\frac{1}{6} \quad \text{sau} \quad \cos x \geqslant 0, \tag{2}$$



dar totodată:

$$-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2} \tag{3}$$

și comparînd (2) cu (3) rezultă

$$-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant -\frac{1}{6}; \quad 0 \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2},$$

vezi figura.

II. Dacă $(1-2\cos x)(1 + 2\cos x) \leqslant 0$, adică:

$$\cos x \leqslant -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \geqslant \frac{1}{2};$$

înmulțind inegalitatea (1) cu cantitatea negativă $(1 - 2\cos x)(1 - 2\cos x) \leqslant 0$ ea își schimbă sensul și în urma reducerilor obținem:

$$6\cos^2 x + \cos x \leqslant 0; \quad \cos x(6\cos x + 1) \leqslant 0$$

de unde:

$$-\frac{1}{6} \leqslant \cos x \leqslant 0, \tag{2'}$$

dar în același timp:

$$\cos x \leqslant -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \geqslant \frac{1}{2} \tag{3'}$$

și din (2') și (3') rezultă că în acest caz inegalitatea este imposibilă.

Problema 1766

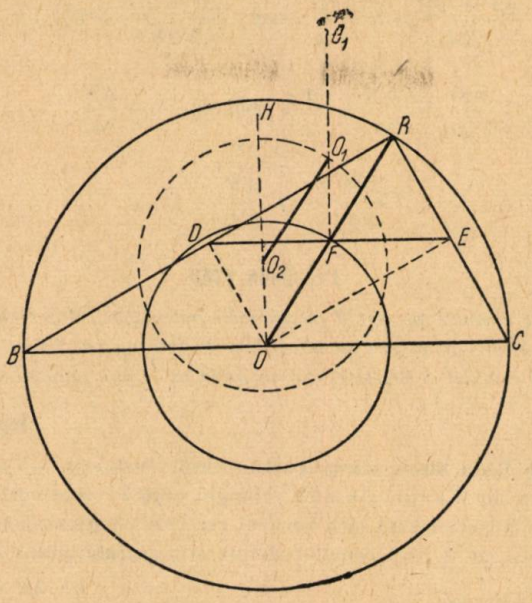
În cercul dat O se duce diametrul fix BC, iar un punct variabil A de pe cerc se unește cu extremitățile acestui diametru. Fie D și E mijloacele segmentelor AB și AC. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului echilateral în care DE este una din laturile lui.

St. G. Mărculescu, Orașul Stalin

Soluție. — Fie R raza cercului dat. Avem $OD = AE$ și $AD = OE$, unghiul BAC fiind drept, atunci paralelogramul $ODAE$ este dreptunghi, deci $FO = FA = FD = FE$ și deci, locul geometric al lui F este un cerc cu centrul în O și cu raza $OF = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$. Se știe că $DE = \frac{BC}{2} = R$, $DE \parallel BC$.

Dacă $GD = GE = DE$ și dacă $FO_1 = \frac{FG}{3}$, atunci O_1 este punctul al cărui loc geometric ni se cere.

Se observă că $FO_1 \perp DE$, deci FO_1 păstrează mereu aceiaşi direcţie. Ducem $OH \parallel FO_1$ şi $O_1O_2 \parallel OF$, în paralelogramul OO_2O_1F avem $O_2O_1 = OF = \frac{R}{2}$, deci locul geometric al lui O_1



este un cerc cu centrul în O_2 şi cu raza egală cu $\frac{R}{2}$. Dacă luăm simetricul lui O_1 faţă de DE, atunci locul geometric va fi simetricul cercului O_2 faţă de BC.

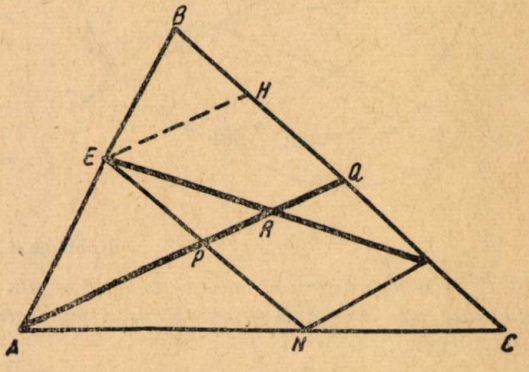
Problema 1768

Se dă triunghiul ABC şi se consideră punctul N pe latura AC. Paralela dusă din N la BC întîlneşte pe AB în punctul E; iar paralela dusă tot din N la mediana AQ întîlneşte pe BC în F. Dreapta EF intersectează AQ în punctul R. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{AR}{RQ} - 2\,\frac{AN}{NC} = 1.$$

Lucian Mănescu R. Vîlcea

Soluţie. Construind dreapta EH paralelă cu FN se formează paralelogramul $NEHF$ avînd ca diagonală segmentul EF. Întrucît AQ este mediana triunghiului rezultă că segmentul PQ uneşte mijloacele a două laturi opuse ale paralelogramului $NEHF$; deci diagonala EF împarte segmentul PQ în două părţi egale şi deci $PR = RQ$.



Notăm $\frac{AN}{NC} = k$. Atunci din triunghiul ACQ rezultă $\frac{AP}{PQ} = k$, deoarece PN şi CQ sînt paralele.

Deoarece $PQ = 2QR$ avem $\frac{AP}{2PQ} = \frac{k}{2}$ sau $\frac{AP}{4QR} = \frac{k}{2}$ sau $\frac{AP}{2QR} = k$.

Adunăm $\frac{1}{2}$ la ambele părți și obținem: $\frac{AP}{2QR} + \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2}$.

Aducem la același numitor:

$$\frac{AP + QR}{2QR} = k + \frac{1}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{AP + PR}{2QR} = k + \frac{1}{2}$$

sau

$$\frac{AR}{2QR} = \frac{AN}{NC} + \frac{1}{2}, \text{ deoarece } k = \frac{AN}{NC}.$$

De unde:

$$\frac{AR}{RQ} - 2\frac{AN}{NC} = 1.$$

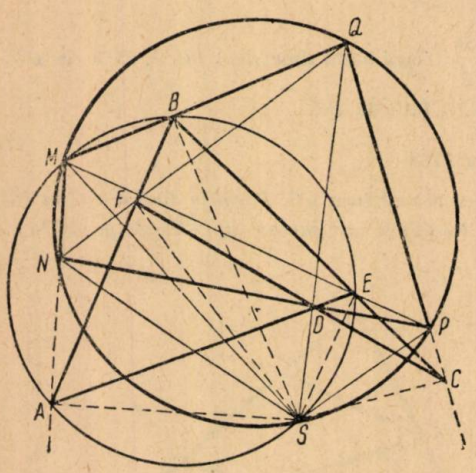
Problema 1769

Fie S un punct variabil pe cercul circumscris patrulaterul inscriptibil $MNPQ$. Dreptele lui Simson ale punctului S în raport cu triunghiurile care au ca vîrfuri punctele M, N, P, Q formează patrulateral complet $ABCDEF$. Să se arate că S este punctul lui Miquel al acestui patrulater.

Mihail I. Popescu

Soluție dată de **Radu Stroe**, student arhitectură, București. — Conform unei teoreme cunoscute, produsul a două laturi ale unui triunghi oarecare este egal cu produsul dintre înălțimea ce cade pe a treia latură și diametrul cercului circumscris triunghiului.

Deci dacă notăm cu R raza cercului circumscris patrulaterului $MNPQ$ vom avea:



$$BS.2R = MS.QS;$$
$$FS.2R = NS.SQ;$$
$$ES.2R = MS.SP;$$
$$DS.2R = NS.SP;$$

din aceste relații avem:

$$BS.SD = FS.ES,$$

deci triunghiurile DES și SFB sînt asemenea, prin urmare:

$$\sphericalangle FBS = \sphericalangle DES,$$

adică patrulaterul $SEBA$ este inscriptibil. Cercul circumscris triunghiului EBA trece prin S.

Analog și cercurile circumscrise triunghiurilor DEC, FCB, AFD trec prin S, deci S este punctul lui Miquel al patrulaterului complet $ABCDEF$.

Problema 1779

Să se demonstreze că în orice triunghi ascuțitunghi, suma cosinusurilor unghiurilor este cuprinsă între semi-suma și suma sinusurilor unghiurilor acelui triunghi.

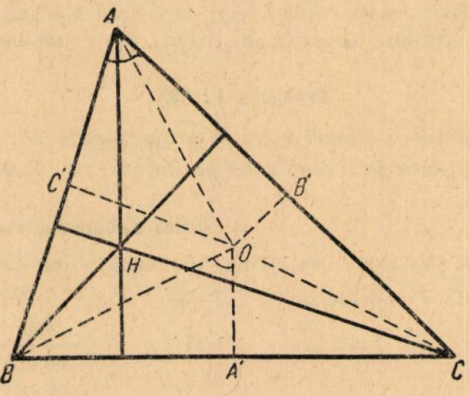
L. Mănescu, R. Vîlcea

Soluția dată de **I. I. Cristea**, student, București. — Se știe că dacă M e un punct în interiorul unui triunghi ABC, atunci:

$$\frac{AB + BC + CA}{2} < MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

Ori dacă $M \equiv H$ este ortocentrul triunghiului ABC şi ţinînd seamă că $AH = 2OA'$, $BH = 2\,OB'$, $CH = 2.OC'$, unde A', B', C' sînt mijloacele laturilor, iar O centrul cercului circumscris, avem:

$$\frac{AB + BC + CA}{4} < OA' + OB' + OC' < \frac{AB + BC + CA}{2},$$



ori cum $\sphericalangle BOA' = A$, iar $OA' = BO \cos A = R \cos A$ şi analog $OB' = R \cos B$ şi $OC' = R \cos C$ şi din relaţiile $AB = 2R \sin C$; $BC = 2R \sin A$, $CA = 2R \sin B$ obţinem:

$$\frac{2R \sin C + 2R \sin A + 2R \sin B}{4} < R\cos A + R\cos B + R\cos C < \frac{2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C}{2}$$

încît

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2} < \cos A + \cos B + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C.$$

Problema 1780

Fie α,β,γ trei puncte pe cevienele AA', BB', CC' în triunghiul oarecare ABC. Dacă segmentul $\alpha\beta$ este paralel cu AB, să se demonstreze că şi segmentul ce uneşte intersecţiile $(AC,\alpha\gamma)$, $(BC,\beta\gamma)$ rămîne paralel cu AB cînd γ se descrie ceviana CC'.

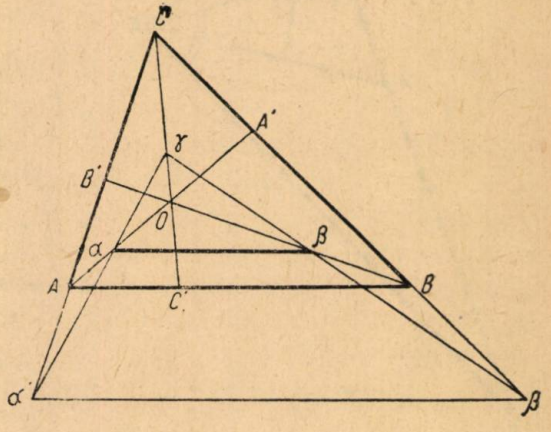
Gh. Dobrotescu, Predeal

Soluţie dată de **I. I. Cristea** student, Bucureşti. — Fie $\alpha'\,(AC,\alpha\gamma)$ şi $\beta'\,(BC, \beta\gamma)$. Teorema lui Menelaus în triunghiurile AOC, BOC pentru transversalele $\alpha'\alpha\gamma$ şi $\beta'\beta\gamma$ dă relaţiile

$$\frac{A\alpha'}{C\alpha'} \cdot \frac{C\gamma}{O\gamma} \cdot \frac{O\alpha}{A\alpha} = +1; \qquad \frac{B\beta'}{C\beta'} \cdot \frac{C\gamma}{O\gamma} \cdot \frac{O\beta}{B\beta} = +1; \tag{1}$$

cum însă $\alpha\beta \parallel AB$, rezultă din triunghiul AOB:

$$\frac{O\alpha}{A\alpha} = \frac{O\beta}{B\beta},$$



încît relaţiile (1) dau:

$$\frac{A\alpha'}{C\alpha'} = \frac{B\beta'}{C\beta'}$$

şi referindu-ne la triunghiul ABC rezultă $\alpha'\beta' \parallel AB$.

Observare. — Pentru α,β,γ oarecari pe AA', BB', CC', triunghiurile ABC şi $\alpha\beta\gamma$ fiind omologice faţă de O, intersecţiile $(AC,\alpha\gamma)$, $(BC,\beta\gamma)$, $(AB,\alpha\beta)$ sînt colineare. Deci dreapta ce trece prin $(AC,\alpha\gamma)$ şi $(BC,\beta\gamma)$ trece prin $(AB \parallel \alpha\beta)$, încît dacă $AB \parallel \alpha\beta$, punctul $(AB, \alpha\beta)$ este la infinit şi deci dreapta definită de $(AC, \alpha\beta)$ şi $(BC, \beta\gamma)$ e paralelă la dreptele AB, $\alpha\beta$.

Problema E: 668

Pe un şantier 10 muncitori lucrînd 6 ore pe zi au executat în 7 zile 490 m³ săpătură. Cîţi muncitori trebuie să angajeze şeful şantierului pentru ca în 5 zile şi lucrînd 8 ore pe zi să execute 980 m³ săpătură.

Marius Zaharescu, student, Bucureşti

Soluţie. — Rezolvăm problema prin metoda reducerii la unitate:

10 muncitori . . . 6 ore/zi . . . 7 zile . . . 490 m³

1 muncitor . . . 1 oră/zi . . . 1 zi . . . $\frac{490}{10.6.7}$ m³

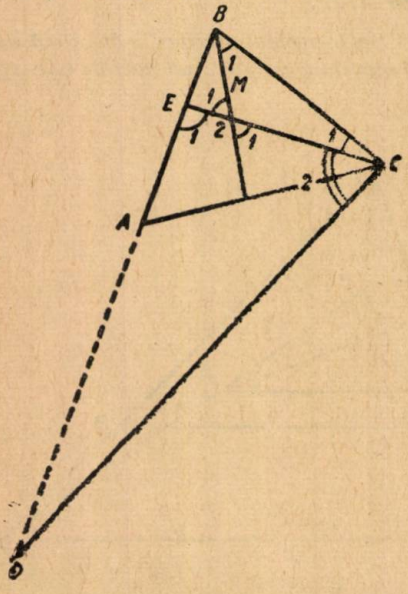
x muncitori . . . 8 ore/zi . . . 1 zi . . . $\frac{x.8.490}{10.6.7}$ m³

x muncitori . . . 8 ore/zi . . . 5 zile . . . $\frac{490.8.5.\ x}{10.6.7}$ m³

deci $\frac{490.8.5.\ x}{10.6.7} = 980$, de unde $x = \frac{980.10.6.7.}{490.8.5} = 21$ muncitori.

Problema E: 690

Într-un triunghi oarecare ABC perpendiculara în C pe BC întîlneşte pe AB în D, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B şi C se taie formînd un unghi egal cu $\frac{B+C}{2}$. Se mai cere să se calculeze unghiurile triunghiului CDE în funcţie de A, B, C.



Rus A. Ioan, elev, Oradea

Soluţie. 1) $\sphericalangle M = 180° - \sphericalangle M_2 = B_1 + C_1 =$

$$= \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{B+C}{2}. \qquad (1)$$

2) Avem: $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle BCD - \sphericalangle C_1 = 90° -$

$$- \frac{C}{2}, \qquad (2)$$

$$\sphericalangle D = 180° - (\sphericalangle BCD + \sphericalangle ABC) = \qquad (3)$$
$$= 180° - 90° - B = 90° - B,$$

$$\sphericalangle E_1 = 180° - (C_2 + D) = 180° - (90° -$$

$$- \frac{C}{2} + 90° - B) = B + \frac{C}{2}. \qquad (4)$$

Observare. — Pentru cazul cînd $A = 90°$ relaţiile deduse mai sus devin:

1) $$\sphericalangle M_1 = \frac{B + C}{2} = \frac{90°}{2} = 45°, \tag{1'}$$

2) $$\sphericalangle C_2 = 90° - \frac{C}{2} = B + C - \frac{C}{2} = B + \frac{C}{2}, \tag{2'}$$

$$\sphericalangle D = 90° - B, \tag{3'}$$

$$\sphericalangle E_1 = B + \frac{C}{2}. \tag{4'}$$

Din relaţia (2') şi (4) rezultă $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle E_1$, adică ΔECD este isoscel şi deci $DE = DC$. Acest caz particular constituie problema E: 508 a cărei rezolvare se găseşte în G.M.F.(B), volumul VI, pag. 81.

Problema E: 711

Dacă $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = 1$, *atunci*:

$$abc\,(a^2 + b^2 + c^2) = 3\,a^2b^2c^2 + a^2b^2\,(a^2 + b^2) + b^2c^2\,(b^2 + c^2) + c^2a^2\,(c^2 + a^2).$$

Armand Caloianu

Soluţie. — Aducînd la acelaş numitor prima relaţie:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = abc$$

şi găsind expresiile:

$$a^2\,(b^2 + c^2) = bc\,(a - bc);\quad b^2\,(c^2 + a^2) = ca\,(b - ca);\quad c^2\,(a^2 + b^2) = ab\,(c - ab);$$

vom obţine:

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{a - bc}{b^2 + c^2};\quad \frac{b^2}{ca} = \frac{b - ca}{c^2 + a^2};\quad \frac{c^2}{ab} = \frac{c - ab}{a^2 + b^2}.$$

Înmulţindu-le, avem:

$$\frac{(a - bc)\,(b - ca)\,(c - ab)}{(a^2 + b^2)\,(b^2 + c^2)\,(c^2 + a^2)} = 1.$$

Aducem la acelaş numitor, efectuînd şi înmulţirile, obţinem:

$$abc - a^2b^2 - a^2c^2 + a^3bc - b^2c^2 + ab^3c + abc^3 - a^2b^2c^2 =$$
$$= a^2b^2c^2 + b^4c^2 + a^4b^2 + a^2b^4 + a^2b^4 + b^2c^4 + a^4c^2 + a^2b^2c^2.$$

Făcînd reducerile şi grupînd termenii:

$$abc - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc\,(a^2 + b^2 + c^2) - a^2b^2c^2 =$$
$$= 2a^2b^2c^2 + a^2b^2\,(a^2 + b^2) + b^2c^2\,(b^2 + c^2) + c^2a^2\,(c^2 + a^2).$$

Deoarece $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = abc$, avem:

$$abc\,(a^2 + b^2 + c^2) = 3a^2b^2c^2 + a^2b^2\,(a^2 + b^2) + b^2c^2\,(b^2 + c^2) + c^2a^2\,(c^2 + a^2).$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ, ETAPA FINALĂ, BUCUREȘTI 29 APRILIE 1956
SUBIECTELE LUCRĂRILOR SCRISE DATE PE CLASE. TIMP DE LUCRU 3 ORE

Clasa VIII-a

2246. — Să se găsească rădăcinile reale ale sistemului de ecuații:

$$x^3 + 2x^2y - y^3 + 44 = 0,$$
$$2y^3 + 3xy^2 + x^2y + 20 = 0.$$

2247. — Se consideră un dreptunghi $ABCD$ în care se notează laturile $AB = 2a$, $BC = 2b$. Două cercuri egale, de rază a, sînt tangente în vîrfurile opuse A și C respectiv la laturile AB și CD și sînt situate în exteriorul dreptunghiului.

a) Să se calculeze distanța între centrele O_1 și O_2 ale celor două cercuri.

b) Să se afle a în funcție de b, în cazul cînd linia centrelor este perpendiculară pe diagonala BD.

c) Se consideră o tangentă comună exterioară a celor două cercuri. Ce relație trebuie să existe între a și b pentru ca această tangentă să treacă prin unul din vîrfurile B sau D ale dreptunghiului?

Clasa IX-a

2248. — Se consideră un patrat $ABCD$ și un punct M situat în planul său. Se notează: $AB = BC = CD = DA = m$; $MA = a$; $MB = b$; $MC = c$.

1° În cazul particular $m = \sqrt{10}$, $a = 5$, $c = 1$ punctul M poate avea două poziții M_1 și M_2. Să se calculeze: $M_1B = b_1$ și $M_2B = b_2$.

2° Revenind la cazul general, să se arate că între lungimile m, a, b, c, avem relația:

$$a^4 + c^4 - 2(a^2 + c^2)(b^2 + m^2) + 2(b^4 + m^4) = 0.$$

Să se aplice la rezolvarea punctului 1°.

3° Dîndu-se valorile: $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, să se deducă latura patratului.

4° Să se dea o construcție geometrică a patratului, cînd se cunosc distanțele $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$.

Să se facă efectiv construcția pentru $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$.

5° Se presupune acum, că distanțele a și c păstrează valorile $a = 5$, $c = 1$ de la punctele 3° și 4° ale problemei, dar că distanța b poate lua și alte valori decît $b = 3$.

Care sînt valorile ce pot fi date lui b pentru ca determinarea patratului să fie posibilă?

Care sînt valorile laturii patratului ce corespund valorilor extreme ale lui b?

6° (facultativ) Să se generalizeze punctul 5° pentru valorile lui a și c oarecare, date.

7° (facultativ) Relația de la punctul 2° nu se schimbă dacă schimbăm între ele b și m (adică este simetrică în raport cu b și m). Să se explice geometric acest fapt.

Clasa X-a

2249. — Să se rezolve ecuația:

$$4x^4 - 8x^3 + ax^2 + 27x + 18 = 0,$$

știind că suma a două rădăcini este egală cu 1 și egală cu suma celorlalte două rădăcini.

2250. — Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2(x + a) = \sin(x + 2b)\sin(x + 2c).$$

Se cere să se ajungă la o formă căreia să i se poată aplica logaritmii.

Aplicație numerică: $a = -50°$; $b = 65°$; $c = 35°$.

Rezolvarea fără table. Se vor da toate soluțiile cuprinse între 0° și 720°.

2251. — Se dă un plan P și două puncte A, B situate de aceiași parte a planului.

a) Să se găsească locul geometric al punctelor M din planul P astfel ca dreptele AM, BM să facă același unghi cu planul.

b) Să se arate cum se poate construi punctul M care îndeplinește condiția de mai sus și pentru care, în plus, unghiul AMB este drept.

c) Dacă se notează $AB = d$, iar distanțele de la punctele A și B la planul P cu a și b, se cere condiția ce trebuie satisfăcută de d, a, b pentru ca să fie posibilă contrucția punctului M de la *b)*.

Anul I Școli tehnice de maiștri

2252. — Să se rezolve sistemul:

$$x + \sqrt{y} = 13,$$
$$2\log x + \log y = 3.$$

2253. — Se dă funcția

$$y = -\frac{\sin^2 2x}{4}\left(\frac{1}{\cos^4 2x} + \frac{1}{\cos^2 2x}\right) + \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} + 2\operatorname{arc\,ctg} x.$$

Se cere să se calculeze derivata.

2254. — *a)* Să se arate că $b^2 - 4ac$ este un patrat perfect dacă $4a - 2b + c = 0$ sau dacă $2a + \sqrt{2}b + c = 0$.

b) Să se calculeze raza cercului circumscris și raza cercului înscris triunghiului de laturi 5, 7 și 9 metri.

2255. — Un kilogram de cafea neprăjită își pierde prin prăjire $\frac{1}{5}$ din greutatea sa.

a) Cîte kilograme de cafea neprăjită sînt necesare pentru a se obține 7 kg cafea prăjită?

b) Care este procentul de cîștig la un kilogram de cafea neprăjită dacă un kilogram de cafea prăjită se vinde cu $\frac{3}{2}$ din prețul unui kilogram de cafea neprăjită?

Școli profesionale

2256. — Pe o balanță cu brațele neegale, un corp pus în platanul A este echilibrat de greutăți de 3,5 kg puse în platanul B. Același corp fiind pus în platanul B este echilibrat de greutăți de 4,5 kg puse în platanul A.

Un cumpărător a acceptat să cumpere marfă cîntărită cu această balanță însă să i se cîntărească 2 kg așezînd marfa în platanul A și alte 2 kg așezînd marfa în platanul B.

Să se afle greutatea adevărată a mărfii cumpărate.

2257. — Un ceasornic care merge regulat arată ora 9 și 40 minute.

a) Să se calculeze unghiul format de acele care arată respectiv orele și minutele.

b) Peste cît timp cele două ace vor fi perpendiculare unul pe celălalt?

Anul I Școli pegagogice

2258. — Să se pună în ordinea mărimii lor, fără a face nicio extragere de rădăcină:

a) numerele 10, $7\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$, $\frac{9}{2}\sqrt{5}$;

b) cele șase diferențe ce se pot forma cu aceste numere.

2259. — În ce caz ecuația de gradul II

$$x^2 + px + q = 0$$

are drept coeficienți dublul patratelor rădăcinilor. Să se găsească toate ecuațiile care satisfac această condiție.

2260. — *a)* Se știe că într-un triunghi isoscel aceiași dreaptă este mediană, bisectoare și înălțime. Să se enunțe și să se demonstreze diferitele reciproce ale acestei teoreme.

b) Se știe că într-un triunghi isoscel medianele ce pornesc de la extremitățile bazei sînt egale. Să se enunțe și să se demonstreze teorema reciprocă.

Anul III Școli pedagogice

2261. — Doi călători merg pe același drum și pornesc în același timp mergînd unul din localitatea A spre B celălalt din B spre A și se întîlnesc într-o localitate C. În momentul întîlnirii primul făcuse 20 km mai mult decît al doilea. Păstrînd vitezele cu care a mers fiecare înainte, primul sosește în localitatea B după $\frac{14}{3}$ ore de la întîlnire, iar al doilea după $\frac{54}{7}$ ore de la întîlnire.

Să se afle distanța dintre cele două localități.

2262. — Se dă un plan P și în acel plan un paralelogram $ABCD$. Se ridică în A, B, C, D perpendiculare pe plan pe care se ia de aceiași parte a planului $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $DD' = d$.

a) Să se demonstreze că dacă dreptele $A'C'$ și $B'D'$ se întîlnesc, atunci figura $A'B'C'D'$ este paralelogram.

b) Se dă $a = 4$, $b = 5$, $c = 8$.

În ipoteza de la punctul *a)* să se calculeze d; de asemenea să se afle volumul $ABCDA'B'C'D'$ în cazul cînd baza $ABCD$ este un dreptunghi avînd $AB = 10$, $BC = 15$.

PROBLEME PROPUSE *)

2263. — Trei tuburi verticale A, B, C cu diametrele interioare de 2, 3 și 4 cm comunică la extremitățile inferioare și conțin apă. Se toarnă în tubul A un strat de 60 cm untdelemn ($d = 0{,}9$). Cîtă benzină ($d = 0{,}8$) trebuie turnată în tubul B, pentru ca nivelul apei în acest tub să revină la cel inițial.

A. Șaichin

2264. — Dispunem de două elemente galvanice identice cărora vrem să le determinăm forța electromotoare și rezistența interioară. În acest scop se montează întîi în serie, apoi în paralel, și în ambele cazuri montajul este făcut să debiteze curent într-o rezistență de $2\,\Omega$. Se constată că în primul caz curentul obținut este de 0.75 A, iar în al doilea caz 0,6 A. Să se afle caracteristicile acestor elemente. **Cercul de fizică București.**

2265. — Să se exprime valorile lui x cuprinse între $0°$ și $360°$ care satisfac egalitatea

$$\frac{1}{\cos 2x}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}+\sqrt{\frac{1-\cos 6x}{1+\cos 6x}}=\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}.$$

C. Ionescu-Țiu

2266. — Să se rezolve sistemul:

$$\log_x y+\log_{3x} y^2=4,$$

$$\log_y x+\log_{3y} x^2=\frac{7}{6}.$$

N. C. Ciomu

---

*) Clasa VIII-a (2263, 2271, 2276, 2277, 2281).

2267. — Se dă un semicerc de centru O și diametru AB. Dreapta paralelă cu diametrul AB, dusă la o distanță egală cu jumătatea razei, intersectează semicercul în două puncte ale căror proiecții pe diametrul AB sînt F și F'; M fiind mijlocul unui segment care se obține unind un punct de pe acest semicerc cu proiecția sa pe diametrul AB, să se arate că $MF + MF' = \text{constant}$.

N. Gheorghiu

2267. — Trei drepte concurente în O intersectează o a patra dreaptă ce nu trece prin O în punctele A, B, C. Printr-un punct oarecare S al dreptei OA, ducem drepte paralele la OB și OC care intersectează dreapta ABC în B_1 și C_1.

Să se găsească locurile geometrice ale picioarelor bisectoarelor din B_1 și C_1 ale triunghiului SB_1C_1.

Fl. Constantinescu, student, Cluj

2269. — Într-un circuit alimentat de o sursă cu o forță electromotoare de 458,219 V se leagă în paralel două voltametre cu electrozi identici avînd fiecare o suprafață de 1 dm², distanțați la 50 cm și în care se pun soluții de $CuSO_4$ și $ZnSO_4$ de concentrație 10%. Să se afle:

1° Ce rezistență suplimentară trebuie montată în serie pe derivația voltametrului cu sulfat de zinc pentru ca trecînd curentul electric timp de 4 ore să se depună la catozii respectivi, straturi de cupru și de zinc în grosime de 0,4 mm, respectiv 0,6 mm.

2° Care este rezistența interioară a sursei de curent, în acest caz?

A. I. Voinea, elev, Craiova

2270. — Să se arate că între termenii șirului lui Fibonacci există relația

$$u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - \left(u_n^2 + u_{n-1}^2\right) = 2u_{2n+2}.$$

Mihai Stănciulescu, elev, Tîrgoviște

2271. — Într-un cerc se înscrie un triunghi ABC și se împarte arcul AC în trei părți egale cu punctele M și N astfel ca $\widehat{AM} = \widehat{MN} = \widehat{NC}$. Să se arate că dreptele PR și AN sînt paralele. De asemenea, și dreptele SQ și MC sînt paralele. Se dau:

$$P \equiv (BM;\ AC);\ R \equiv (BN;\ MC),\ Q \equiv (BN;\ AC) \text{ și } S \equiv (AN;\ BM).$$

St. Donescu, student, București

2272. — Fie l_a, l_b, l_c lungimile cevienelor unui punct din interiorul triunghiului ABC. Să se demonstreze că:

$$\frac{a^2 - l_b^2}{b^2 - l_a^2} \cdot \frac{b^2 - l_c^2}{c^2 - l_b^2} \cdot \frac{c^2 - l_a^2}{a^2 - l_c^2} = 1.$$

Gh. I. Stoian, student, București

2273. — Să se stabilească egalitatea:

$$\cos^2 50° \left(4 \cos^2 10° + 1\right) - 2 \cos 50° \cdot \cos 10° = \frac{3}{4}.$$

Valeriu Hulubei, elev, Craiova

2274. — Să se reprezinte grafic funcția $y = \frac{x-2}{x+5}\sqrt{\frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{x^3 - 7x + 6}}$, apoi graficul funcției z, unde $z^2 = \frac{(x-2)^2}{(x+5)^2} \cdot \frac{(x^3 - 5x^2 - x + 5)}{(x^3 - 7x + 6)}$, ținînd seama de graficul funcției y.

C. Ionescu-Țiu

2275. — Într-un triunghi în care centrul de greutate este colinear cu două din punctele de tangență ale cercului înscris, există relația:

$$\cos\frac{C-B}{2}=3\cos\frac{C+B}{2}.$$

Laturile cu punctele de tangență sînt cele ce formează unghiul A.

I. Hodîrcă, Breaza

2276. — Să se demonstreze că dacă $a, b, \ldots l, m, n$ sînt cifre, există două numere $ab\ldots lmn$ și $ab\ldots lnm$ simultan divizibile prin 7, dar nu există astfel de numere pentru un divizor mai mare decît 9 și prim cu 9.

Gh. Buicliu

2277. — Să se determine regiunea din plan care satisface sistemul de inecuații:

$$1-y<3x-2<x+y,$$
$$2y+x-6>0$$

și să se calculeze aria acestei regiuni.

Ilie Bichir, student, București

2278. — Să se rezolve ecuația

$$x^3-x^2-x-c=0,$$

în cazul că are o rădăcină dublă.

Const. Berdan

2279. — Pe laturile unui triunghi ABC dreptunghic în A se iau punctele $A'B'C'$ ce împart laturile BC, CA, AB în același raport k. Să se arate că:

— între suprafețele S și S' ale celor două triunghiuri (ABC și $A'B'C'$) există relația: $\frac{S'}{S}=1-\frac{3k}{(1+k)^2}$,

— să se determine valorle lui k astfel încît $\sum\overline{A'B'}^2=14\cdot\overline{BC}^2$,

— să se studieze variația suprafeței S' în funcție de S cînd k variază.

C. Mihu

2270. — Se consideră punctul A variabil pe un cerc (O) de rază R. Fie O' un punct fix nesituat pe (O), iar A' un punct mobil astfel încît $AA'=\|OO'$. Notăm cu M punctul unde dreapta AO' retaie crecul (O) și cu P intersecția dreptelor OM și $A'O'$. Să se afle locul geometric al punctului P.

Mihail I. Popescu, student, București

2281. — De deasupra unui lichid de densitate $D=13{,}6$, la înălțimea de 12 m de suprafața lichidului, este lăsat să cadă fără viteză inițială un corp de densitate $d=8{,}4$. Se cere:

1) adîncimea la care va ajunge corpul în interiorul lichidului;

2) timpul necesar pentru a ajunge din nou la suprafața lichidului.

Se vor neglija dimensiunile corpului și rezistența de frecare pe care o produce.

Ion Paraschiv, student, Bucureți

2282. — Pe segmentele CA și BC ale unui unghi xCy se iau respectiv punctele B' și A' în interior sau exterior astfel că $\frac{CB'}{B'A}=m$ și $\frac{CA'}{A'B}=n-1$.

Să se afle locul geometric al intersecției AA' cînd $\frac{m}{n}$ rămîne constant.

Gh. Belcin, Breaza

2283. — Înălțimea unui astru într-un moment oarecare este dată de formula: $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P$, unde h = înălțimea astrului, φ = latitudinea locului, δ = declinația astrului, P = unghiul la pol.

Într-un loc de latitudine φ, unghiul la pol al Soarelui în momentul răsăritului este: P_1 cînd declinația Soarelui este δ; P_2 cînd declinația Soarelui este $2\,\delta$; P_3 cînd declinația Soarelui este 3δ.

Să se demonstreze relația:

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = \sec P_1 \sec P_2 - \sec P_1 \sec P_3 - \sec -P_2 \sec P_3 .$$

C. V. Costăchescu

2284. — Să se arate că avem identitatea:

$$\frac{\cos^7 a}{\sin a} - \frac{\sin^7 a}{\cos a} = \operatorname{ctg} 2a\,(1 + \cos^2 2a).$$

Const. Mihăileanu, elev, Timișoara

2285. — Avem trei sfere metalice cu razele 1 cm, 2 cm, 3 cm și potențialele 10, 15 și 20 V. Legăm aceste sfere prin cîte un fir conductor lung și subțire, apoi le separăm și le așezăm în colțurile unui triunghi echilateral cu latura de 10 cm. Să se determine:

a) potențialul comun; *b)* forțele de respingere dintre ele.

Virgil Atanasiu

2286. — Într-un triunghi oarecare ABC înscris în cercul O, diametrul AA_1 taie înălțimile BB', CC' în A_2, A_3. Se notează cu a_1, a_2 segmentele A_1A_2, A_1A_3 și cu b_1, b_2, c_1, c_2 segmentele analoage. Să se arate că:

1° Punctele O_1, O_2 în care paralelele duse prin O la AB, CA întîlnesc pe BC, sînt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BA_2A_1, CA_1A_3;

2° $\frac{a_1a_2}{a^2} + \frac{b_1b_2}{b^2} + \frac{c_1c_2}{c^2} = 1$, dacă triunghiul ABC este ascuțitunghi și $\frac{a_1a_2}{a^2} - \frac{b_1b_2}{b^2} - \frac{c_1c_2}{c^2} = 1$, dacă unghiul A este obtuz.

D. C. Panu

2287. — Fie A_1, B_1 și C_1 punctele unde înălțimile triunghiului ABC taie a doua oară cercul circumscris lui și MN un diametru oarecare al cercului ABC. Să se arate că grupele de drepte MA, MB, MC și NA, NB, NC intersectează laturile triunghiului ABC respectiv în cîte trei puncte A_2, B_2, C_2 și A_3, B_3, C_3 coliniare. Dreptele (A_2, B_2, C_2) și (A_3, B_3, C_3) trec prin H ortocentrul triunghiului ABC și sînt perpendiculare între ele.

Theodor Gh. Cocea

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 836. O carte costă cu 16,50 lei mai mult decît un caiet. Se mai știe că prețul acestei cărți este cît prețul a 8 caiete și încă 75 bani.

a) Să se afle cît costă 3 cărți și 7 caiete împreună.

b) Să se justifice operațiile făcute și să se arate ce reprezintă rezultatele obținute după fiecare operație; apoi să se facă verificarea.

(clasa V, Olimpiada matematică 1956, lucrarea scrisă)

*) Clasa V-a (E: 836, 837, 843, 845, 848); VI-a E: 838, 839, 844, 846); E: VII-a (E: 840, 841, 842, 847, 849, 850).

E: 837. *a)* Să se calculeze

$$\frac{3+\dfrac{\dfrac{2}{5}}{4}-\dfrac{\dfrac{7}{6}}{5}:\left(8-\dfrac{4}{9}\right)}{2+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}:\dfrac{3+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}-1}-0{,}4\times 2}$$

b) Rezultatul să fie pus sub formă de fracție ireductibilă (simplificată).

c) Rezultatul să fie pus sub formă de fracție zecimală.

(clasa V, Olimpiada matematică 1956, lucrarea scrisă)

E: 838. Un aliaj este format din 66,5% cupru; 31% nichel și restul mangan. Densitatea cuprului este 8,9; a nichelului 8,8 și a manganului 7,4.

O bucată din acest aliaj introdusă în apă, ocupă un volum egal cu volumul a 3,4 litri apă.

a) Să se afle ce volum de mercur deslocuește acest aliaj dacă este pus într-un vas cu mercur, știind că densitatea mercurului este 13,5.

b) Să se afle cîte grame de nichel se află în acest aliaj.

(clasa VI, Olimpiada de matematică și fizică, 1956, lucrarea scrisă)

E: 839. O lucrare poate fi terminată de Ion și Dumitru în 7 ore. Aceiași lucrare poate fi terminată de Dumitru și Nicolae în 8 ore; iar dacă ar lucra numai Ion, ar termina aceiași lucrare în 16 ore și 40 minute. Au lucrat toți trei împreună, Ion, Dumitru și Nicolae, și au primit în total suma de lei 180. Să se afle:

a) În cît timp au terminat lucrarea lucrînd toți trei împreună?

b) Ce sumă se cuvine fiecăruia?

c) Verificare.

(clasa VI, Olimpiada de matematică și fizică 1956, lucrarea scrisă)

E: 840. Un ceasornic care merge regulat arată ora 6 și 52 minute.

a) Să se calculeze unghiul format de acele ceasornicului care arată orele și minutele.

b) Să se calculeze după cîte ore, minute și secunde cele două ace vor fi perpendiculare între ele.

(clasa VII, Olimpiada de matematică și fizică 1956, lucrarea scrisă)

E: 841. Un fierbător electric este confecționat din sîrmă de nichelină cu secțiunea de 0,5 mm² și lungă de 2,5m. Se știe că rezistivitatea nichelinei este $\rho = 0{,}4$. Fierbătorul a fost pus la curentul de 110 V timp de 45 min pentru a fierbe apă.

Cît costă consumul de curent pentru fierberea apei dacă 1 kWh costă 0,60 lei?

Teorie. — Ce este evaporarea? Legile ei. Ce aplicații ale evaporării cunoașteți?

(clasa VII, Olimpiada de matematică și fizică 1956, lucrarea scrisă)

E: 842. Fie $ABED$ un trapez oarecare, în care raportul dintre baza mică DE și baza mare AB este 1/2; iar C este punctul de intersecție al laturilor neparalele. Segmentul de dreaptă ce unește punctul C cu punctul de intersecție al diagonalelor trapezului, taie baza mare AB în F, iar baza mică DE în G. Notînd cu p perimetrul trapezului și cu p' perimetrul triunghiului ABC, să se stabilească egalitatea.

$$p - \frac{p'}{2} = AB.$$

***

E: 843. Dacă 8 viţei mănîncă o cantitate oarecare de fîn în acelaş timp ca 5 vaci, să se afle în cît timp 12 viţei vor mînca fînul pe care 14 vaci îl mănîncă în 15 zile.

Ioan Şt. Mușat

E: 844. O cooperativă a cumpărat 575 l de benzină cu 2,10 lei un litru. Transportul a costat 82,80 lei. Cu cît va trebui să vîndă kilogramul pentru a acoperi cheltuielile de transport şi a cîştiga 15 bani la litru (densitatea benzinei fiind 0,88)?

Ioan Şt. Mușat

E: 845. Într-un magazin de stat un ţăran colectivist cumpără pentru el şi fiul său, bocanci. Avînd în mînă un bocanc pentru el şi unul pentru fiul său, întreabă: cît costă?

Gestionarul răspunde: 125 lei, iar dacă-i împerechiaţi, perechea mică este cu 30 lei mai ieftină decît cea mare. Cît costă un bocanc mare şi cît costă unul mic? Cît costă fiecare pereche în parte?

Leontin Domide, Rodna

E: 846. Membrii unei gospodării agricole colective au semănat a ha grîu şi b ha porumb în timp de două săptămîni. În prima săptămînă s-a semănat de $\frac{n}{2}$ ori mai mult grîu decît porumb, iar în a doua, s-a semănat de $n/2$ ori mai mult porumb decît grîu. Cîte hectare s-au semănat cu grîu în prima săptămînă? (Caz particular: $a = 400$ ha; $b = 250$ ha; $n = 2$).

Ion Cojocaru

E: 847. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\frac{12}{x+y} + \frac{11}{2y+z} = 3,$$

$$\frac{24}{x+y} - \frac{6}{3x-z} = 2,$$

$$\frac{22}{2y+z} - \frac{3}{3x-z} = 1.$$

Bogdan I. Baieră

E: 848. O cooperativă vinde într-o zi 27 m pînză «muncitor» şi 110 m stofă. La această vînzare cooperativa aduce Statului un venit de lei 530,64. A doua zi, a mai vîndut cu aceleaşi preţuri, 42 m «muncitor» şi 205 m stofă, cîştigînd de data aceasta 977,94 lei.

Să se afle cît s-a cîştigat la metrul de pînză «muncitor» şi cît la cel de stofă.

Bogdan I. Baieră

E: 849. Să se calculeze timpul în ore, minute şi secunde arătat de un ceasornic care merge regulat, ştiind că acele ceasornicului care arată orele şi minutele sînt perpendiculare sau în prelungire, astfel ca acest timp să fie cuprins între ora 11 şi ora 12.

C. I. Ţ.

E: 850. — Să se arate că dacă $a^2 + b^2 = 1$ şi $x^2 + y^2 = 1$, atunci

$$a^2 + x^2 - 2a^2x^2 = b^2 + y^2 - 2b^2y^2.$$

Florin Torjescu, student, Bucureşti

LISTA ELEVILOR PREMIAŢI ŞI MENŢIONAŢI LA „OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI" 1956

BUCUREŞTI. — *Clasa V-a*: Bîrcă Şerban (s.m.b. 17); Bolintineanu Domnica (s.el.f. 124), Momîrlan Magdalena (s.m.f. 22), Schwartz Ivonne (s.e.f. 124), Focşăneanu Dinu (s.m.b. 13), Tănase Emilia (s.e.f. 51), Georgescu Horia (s.m.b. 18), Moga Mina (s.e.f. 23), Catanchin Andrei (Cocomanca, Călăraşi), Cohn Sorin (s.m.b. 17), Gavrilescu Ioana (s.e.f. 25), Iancu Sanda (s.m.b. 21), Ionescu Viorica (s.e.f. 51), Niculescu Cristina (s.e.f. 124), Pestrea Marian (s.e.b. 119), Popescu Mariana (s.m.f. 8), Trandafirescu Andrei (s.m.b. 17). *Clasa VI-a*. Ceicu Mirela (s.m.f. 22), Cristofor Radu (s.m.b. 11), Ghiţescu Anca (s.m.f. 10), Isbăşoiu Eugen (s.m.b. 11), Mira Eugen (s.e.b. 119), Popescu Marius (s.m.b. 17), *Clasa VII-a*. Sălăgeanu Simona (s.m.f. 10), Vinaru Luchian (s.m.b. 1), Stoichescu David (s.m.b. 20), Iordache Elena (s.e.f. 46), Rădulescu Horia (şcoala germană), Borocin Marcel (s.m.b. 17), Turai Aldea (s.m.b. 11).

BACĂU. — *Clasa V-a*. Balan Ştefan (Comăneşti), Rapaport Hilda (Moineşti), Kramer Eugenia (s.e. 2 Piatra Neamţ), Gălăţeanu Viorel (s.e. 2, Piatra Neamţ), Popescu Manuela Carmen (s.e. 2 Piatra Neamţ). *Clasa VII-a*. Postolache Corneliu (s.m. 1, Bacău), Moise Mihail (s.m. mixtă Tîrgu Ocna), Constantinescu Mariana (Moineşti), Gril Alfred (s.m. 1 Bacău), Gîscă Neculai (Hangu, Ceahlău), Vueric Traian (s.e. 8 Bacău), Jaliu Cristel (s.m. 1 Bacău).

BAIA MARE. — *Clasa V-a*. Micu Marius (s.m. 1 Satu Mare), Ghetie Iosif (s.m. 1 Satu Mare). *Clasa VII-a*. Tomoiagă Doru (s.e. 3 Sighet), Fazecaş Anton (s.e. 3 Baia Mare).

CONSTANŢA. — *Clasa V-a*. Roitman Mose (s.m. 1), Lischievici Alexandru (s.e. 5), Păunescu Adrian (s.m. 1), Cotoban Sandu (s.m.b. 1). *Clasa VII-a*. Bogdan Mihaela (s.m.f. 2).

CRAIOVA. — *Clasa V-a*. Stoichiţoiu Dan (s.e.b. 2, Turnu Severin), Păunescu Doru (s.m.b. Caracal), Cincheză Iuliana (s.e. mixtă 9 Craiova). *Clasa VII-a*. Velicescu Mircea (s.m.b. 2 Tîrgu Jiu), Constantinescu Doina (Osica de sus, Balş), Sfeclă Mircea (s.m. Balş).

CLUJ. — *Clasa V-a*. Herman Sonia Lia (s.m. 8 Cluj), Leţia Ioan (s.m. 1 Aiud), Dumitreasa Alexandrina (s.m. 2 Cluj), Ungureanu Petre (s.m. 4 Cluj), Irimescu Gabriela (s.m. 2 Cluj), Călugăreanu Maria (s.m. 8 Cluj), Ungur Doina (s.m. 2 Cluj). David Marius (s.e. 1 Aiud), Biriş Maria (s.e. 1 Aiud), Miclea Carmen (s.m. 9 Cluj). *Clasa VI-a*. Abrudan Corneliu (s. e. Cîmpeni). *Clasa VII-a*. Pop Dorina (s. m. 9 Cluj), Ene Mihaela (s.m. 9 Cluj), Lungu Şerban (s.m. 4 Cluj), Balagh Ibolya (s.e. 22 Cluj).

GALAŢI. — Clasa V-a. Cojocaru Iulia (s.m. 1 Tecuci), Loventon Mihaela (s.m. 1 Brăila), Gheorghe Dan (s.e. 6 Brăila), Nenciu Crăiţa (s.e. 1 Brăila), Perieţeanu Mihaela (s.e. 6 Galaţi), Vinău Gheorghe (s.e. 8 Galaţi), Petrzilka Hertha (s.e. 7 Brăila). *Clasa VII-a* Iftodie Săvel (s.e. 6 Tecuci)., Rădulescu Alexandru (s.e. 23 Galaţi).

IAŞI. — *Clasa V-a*. Livadaru Ernestina (s.m. mixtă Hîrlău), Niculescu Dan (s.m.b. «M. Sadoveanu» Iaşi), Mihailov Antoaneta (s.m.f. 1 Iaşi), Ionaşcu Magda (s.e. 8 Iaşi). Grümberg Fina (s.e. 8 Iaşi), Luca Georgeta (s.e. 8 Iaşi), Zamfirescu Floricica (s.m.f. 1 Iaşi), Calearschi Adriana (s.e. 9 Iaşi), Hamciuc Villeta (s.m.f. 1 Iaşi), Sireţeanu Sorana (s.m.m. 2 Iaşi), Goldenberg Viviana (s.m.m. 2 Iaşi), Chirănuş Rodica (s.e. 8 Iaşi). *Clasa VI-a*. Ulea Mariana (s.m.b. 1 Vaslui), Dumitrache Dorina (s.e. Frumuşica, Hîrlău), Alexandrescu Gheorghe (s.m.b. 1 Vaslui), Vidmichi Emilian (s.m.b. 1 Vaslui). *Clasa VII-a*. Niculescu Marie-Jeanne (s.m.f. 1 Iaşi), Cociu Carmen (s.m.f. 1 Iaşi), Iosub Bella (s.e. 8 Iaşi), Simiuc Florentina (s.e. 9 Iaşi), Anghelescu Bogdan (s.m. b. 2 Iaşi), Gobjilă Dan (s.m.b. 2 Iaşi), Mihăilescu Simona (s.e. 11 Iaşi), Popa Doina (s.m. Vaslui), Constantin Ioan (s.m. 2 Iaşi), Atanasiu Adrian (s.m.f. 1 Iaşi), Iancov Victoria (s.m.f. 1 Iaşi), Pletosu Lucia (s.e. 13 Iaşi), Dorneanu Cornel (s.m.b. 1 Vaslui).

HUNEDOARA. — *Clasa V-a.* Necșa Felicia (Orăștie), Manțiu Octavian (s.e. 1 Alba Iulia), Pădurar Aurel (s.e. 1 Sebeș). *Clasa VI-a.* Albu Toma (s.m. 1 Petroșani). Clasa VII-a· Adjudean Constantin (s.e. 3 Alba Iulia), Demco Dan (s.e. Alba Iulia).

ORADEA. — *Clasa V-a:* Buzgiu Pavel (s.e. Berechiu), Csink s Klara (s.m 3 Oradea), *Clasa VI-a.* Variu Alexandru (Șc. ped. Oradea). *Clasa VII-a.* Gherman Ecaterina (s.e. Inand), Horia Delia (s.m 2 Oradea).

PITEȘTI. — *Clasa V-a.* Gheorghe F. Gheorghiță (Cerșani, Suseni), Popescu N. Cornelia (s.m.f. 2 Slatina), Simionică Rodica (s.e.f. 2 Cîmpulung Muscel), Serb Ruxandra (s.e.f. 2 Cîmpulung Muscel). *Clasa VI-a.* Popescu Iolanda (s.e. 4 Pitești), Delelici Varvara (s.m.f. 2 Slatina). *Clasa VII-a.* Ilasievici Viorela (s.m.f. 2 Pitești), Oproiu I. Ana (Pietroșani), Simionică I. Traian (s.m.b. 1 Cîmpulung Muscel).

ORAȘUL STALIN. — *Clasa V-a.* Iorga Nicolaie (s.e. 19), Hantilă Florea (s.e. 5), Zgunea Gabriel (s.e. 15). *Clasa VI-a.* Naidin Maria (Turcheș). *Clasa VII-a.* Barbu Ovidiu (s.m.b. 1).

TIMIȘOARA. — *Clasa V-a.* Pfeffer Günther (s. pedag. 2), Iliuță E. Doina (s.e. 4 Arad), Tăuțan Teodor (s.e. 18 Arad), Dreucean Viorica (s.e. 19 Arad), Bogoievici Gheorghe (s.e. 25), Olaru Carmen (s.e. 3), Gora Horațiu (s.e. 25), Păcurariu Doina (s.e. 3), Reich Ileana (s.e. 3). *Clasa VI-a.* Sfetcu Ion (Nichișoara, Gătaia). *Clasa VII-a.* Bruja Stefan (Nichișoara, Gătaia), Irhașiu Mircea (s.e. 4 Arad), Boteanu Iacob (s.e. 5 Lugoj), Crăciunaș Petru (Siria, Arad), Maronescu Ioan (s.m. 2 Lugoj), Popa Doina (s.m. 2 Arad), Măcinic Caius (Siria, Arad), Surdi Maria (s.e. 18 Arad), Pintilie Florica (s.e. 18 Arad), Boceanu Alexandru (s.e. 5 Lugoj,) Pintea Emilia (s.e. 18 Arad), Bernath Walter (s.e. 11).

REGIUNEA AUTONOMĂ MAGHIARĂ. — *Clasa V-a.* Neagoie Sorin (s.m. b. 1 Tîrgu Mureș), Elek Zoltan (s.m.b. 2), Barabas Gyorgy (s.m.b. 2), Iclăzan Tudor (s.m.b. 1), Macavei Florin (s.m.b. 1), Nistea Alexandrina (s.e. 1 Reghin), Arczfaloi Bela (s.m. 2), Ianka Ghizella (s.e. 5), Szabo Ienö (s.m. 2), Soroceanu Tudor (s.m. 1 Reghin), Izvoreanu Veronica (s.m. 3). Kramli Iozef (s.m. 2), Coman Alexandru (s.m. 1), Cosma Iosif (s.e. 9), Pop Liviu (s.m. 1), Farkas Maria (s.m. 4). *Clasa VI-a.* Ionescu Radu (s.e. 6 Tîrgu Mureș), Leibovitz Harry (s.m. 1), Matei Marin (s.m. 1), Pleșa Dănuț (s.m. 1), Suciu Dorin (s.m. 1), Mureșan Tudor (s.m. 1, Reghin). *Clasa VII-a.* Vegh Alexandru (s.m. 2 Tîrgu Mureș), Nagy Elemer (s.m. 2), Suciu Teofil (s.m.b. 1), Dosza Ianos (s.e. Miercurea Niraj), Dumitru Ileana (s.m. 3), Tompa Miklos (s.m. 2), Kramli Ianos (s.m. 2), Cordiș Rodica (s.m. 3), Filipescu Dan (s.m. 1).

Fără mențiune de clasă: Sofronie Virgil (s.m. 1), Gyrfas Maria (s.e. 4), Oroban Bela (s.e. 5), Doczi Tamas (s.m. 2), Fogoraşi Francisc (s.e. 2).

Rezultatele obținute în regiunea Ploești și Suceava nu au sosit la redacție.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

În cursul lunii Februarie 1956 s-au evidențiat din localitățile care încep cu inițialele A—J, următorii rezolvitori de probleme:

Grosu Florin (cl. X, Galați), *Panaitopol Laurențiu* (cl. IX, Giurgiu), *Draica Constantin* (cl. IX, s.m.b. 4, București), *Oprică I. Mihai* (cl. VIII, s.m.b. 17, București), *Stănescu N. Emil* (cl. X, Giurgiu), *Țibuleac Florin* (cl. IX, Iași), *Lupuțiu Ioan* (student, București), *Costinescu Anca* (cl. IX, Iași), *Basarab A. Șerban* (cl. X, s.m.b. 1, București), *Popescu P. Roger* (cl. X, s.m.b. 11 București), *Maieescu Teodor* (absolvent, Caransebeș), *Ionescu Mircea* (cl. IX, s.m.b. 4, București), *Stoian I. Gh.* (student, București), *Teodorescu N.* (cl. IX, s.m.b. 2 București), *Burică Mihai* (cl. X, s.m.b. 17, București), *Ene I. Ion* (cl. VIII, s.m.b. 20, București), *Șeitan G. Radu* (cl. IX, s.m. 2, București), *Sglvirdea Dumitru* (absolvent, Caransebeș), *Șarpe I.*

Dumitru (cl. X, Corabia), *Botoran I. Petre* (cl. X, Giurgiu), *Cojocaru I. Mihai* (cl. IX, Focşani), *Roşianu C. Dragomir* (student, Bucureşti), *Emanuel Alex.* (cl. X, s.m.b. 1, Bucureşti) *Dobre Cornel* (cl. VIII, s.m.b. 4 Bucureşti), *Iorgulescu Alex.* (cl. X s.m.b. 20 Bucureşti, *Cucu Paul* (cl. X, Buzău), *Ianuş I. Stere* (cl. IX, Constanţa), *Stoica N. Constantin* (cl. X, Focşani), *Apetrei Nicolae* (cl. VII, Botoşani), *Crăciun Gh.* (cl. X, s.m.b. 4 Bucureşti), *Udrea Dumitru* (cl. VIII, s.m.b. 4 Bucureşti), *Fejes Iuliu* (cl. X, Baia Mare), *Moraru Florentin* (cl. X, s.m.b. 1, Bucureşti), *Şaganai Actic Nusfet* (cl. X, s.m.b. 13 Bucureşti), *Schileru I. Dinu* (cl. X, s.m.b. 1, Bucureşti, *Hulubei T. Valeriu* (cl. X, s.m. 1 Craiova), *Sin C. Alexandru* (cl. X, Giurgiu), *Stănculescu A. Adrian* (cl. X, s.m.b. 1, Craiova), *Nicolau Ileana* (cl. X, s.m.f. 19, Bucureşti), *Colonati Cristian* (anul III, construcţii, Constanţa), *Dinu Gh.* (absolvent, Craiova), *Bercovici Izu* (cl. X, Focşani), *Cojocaru Ion* (absolvent, Craiova), *Dinulescu Horia* (cl. VIII, Focşani), *Trifu Mircea* (cl. VIII, Alba Iulia), *Popovici I. Radu* (student Bucureşti), *Ştefan Zaharia* (cl. VIII, s.m.b. 4 Bucureşti), *Ceangă Emil* (cl. X, Galaţi), *Căluţoiu Ion* (cl. X, s.m. 1, Craiova), *Zilbermann Mircea* (cl. VII, Bacău), *Florescu Gh. Mircea* (student, Bucureşti), *Ştefănoiu Viorel* (cl. VIII, s.m.b. 4 Bucureşti), *Popa Gh.* (cl. X, s.m.b. 4), *Ţigănuş Mircea* (cl. X, Focşani), *Buriman Adrian* (cl. X, s.m.b. 4 Bucureşti), *Popescu I. Ovidiu* (cl. VII, s.m. b. 13 Bucureşti).

Pînă la *1 martie 1956* s-au primit cel puţin cîte zece soluţii bune la problemele propuse în G.M.F.—B în numerele 11, 12 din anul 1955 şi din numărul 1 din anul 1956, de la următorii rezolvitori:

ADJUD. — *Şcoala medie*, clasa IX. Chiorcea Nicolae (1875, 876, 877 — 882, 884, 914); clasa X-a. Avram N. Const. (1921, 925, 926—930, 931, 940). *Şcoala de 7 ani Păuneşti.* — Clasa VII. Apostu C. Ioana (E: 659, 698, 704, 708, 713, 726, 737, 747, 749—751, 753), Ignat Maria (E: 687, 697, 698, 708, 722, 736, 737, 747, 749—751), Popa Nicolae (E: 708, 709, 718, 727, 729, 736, 737, 747, 750, 751, 753), Şerban Ligia (E: 699, 702, 708, 713, 722, 726, 747, 749—752), Şerbănescu Cornelia (E: 697, 698, 706, 708, 713, 726, 728, 747, 749, 750, 753), Stoica Neculai (E: 698, 708, 713, 722, 728, 741, 747, 749, 750, 753, 754), Ursei Maria (E: 691, 696, 710, 718, 721, 724, 727, 729, 730, 738, 747, 750).

AGNITA (Regiunea Stalin). Clasa X. Mihai Constantin (1874, 884, 915, 920, 924, 947, 954, 961, 971, 974, 975).

AIUD (Cluj). Clasa IX. Bucurenciu Sorin (1876, 884, 915, 931, 940, 943, 948, 954, 957, 960, 962, 963, 970, 971, 976, 977); clasa X. Fischer Gheorghe (1878, 882, 886, 915, 917, 919—921, 924), Rusu Mihai (1948, 956, 957, 960, 962, 963, 970, 971, 976, 977, 992, 2004, P), Suciu I. Ioan (1879, 880, 947—949, 951, 954—958, 960, 961—964, 974—977, 992, 993).

ALEXANDRIA. Clasa VIII. Nicolae Ion (1875, 876, 882—884, 915, 924, 940, E: 725, 727); clasa IX. Ploeşteanu Ion (1875, 877, 881—884, 898, 915, 924, 948, 951, 954—956, 960, 961, 976, 977).

ALBA IULIA. Clasa VIII. Berciu C. Ion (1875, 876, 879, 881, 884, 891, 894, 931, 948, 954, 956, 957, 962, 967, 974—976), *Trifu Mircea* (1875, 879, 884, 915, 944, 954, 955, 957, 960, 971, 974, 976, 992, E: 690, 699, 702, 706, 724, 726, 734, 735, 738, 742, 745, 748, 752); clasa X. Cioară Titus (1857, 882, 884, 891, 915, 924, 947, 948, 951, 954—956, 961, 963), Ioszif Iacob (1875, 881, 882, 884, 894, 948, 951, 955, 956, 963, 974—976), Voicu Virgil (1891, 920, 940, 947, 948 951, 954, 955, 960, 962, 974—977), absolvent Benţa Ioan (1927, 931, 938, 940, 941, 944, 945, 976, 984).

ARAD. Clasa VIII. Şerb Aurel (1915, E: 727, 729, 732, 738, 742, 745, 748—751, 753); clasa X. Ban Mircea (1883, 917, 920, 947, 948, 954, 955, 956, 974—977), Bernstein Silvia (1880, 922, 924, 931, 938, 940, 943, 948—952, 956, 962, 964). Şcoala pedagogică, anul I. Craiu Ananie (E: 735, 738, 747, 749—752, 754, 757, 758), Popescu Dumitru (E: 735, 738, 747, 749—752, 754, 757, 758).

BACĂU. Clasa VII. Postolache Corneliu (E: 722, 727—731, 742, 751, 752, 754), Vasilache Ioan (1274, 955, E: 724, 727, 729—731, 749, 754, 758). Clasa VIII. Grigoraş Vasile (1938, 940, 944, E: 577, 659, 690, 699, 702, 706, 714, 716, 720—722, 726, 727, 729—731, 737, 738, 740, 742, 743, 745, P). Clasa IX. Hărăboi Ioan (1814, 839, 890, 931, 940, 949, 951, 955—957, 960, 962, 963, 971, 976, 977, 981, 990); clasa X. Călugăru Gheorghe (1947—949, 954—957, 960, 961, 963, 967, 971, 974, 975), Clapon Virgil (1874, 875, 877, 881, 882, 891, 924, 943, 947, 948, 951, 953, 955, 956, 961—963, 967, 974, 975, P), Hărăboi Mihai (1762, 877, 879, 800, 884, 888, 890—892, 894, 900, 911, 914, 915, 917, 920, 923—926, 930, 931, 940, 943, 947—958, 960—963, 967, 971, 974—977, 990, 992, 993), Vasiliu Monica (1879. 916, 921, 923, 935, 947—952, 954—958, 960—964, 967, 970, 971, 974—977, 992, 993, P), *Zillbermann Mircea* (1880, 911, 914, 927, 943, 946—964, 971, 974, 975—977, 984, 990, 992, 993, 996, P).

BAIA MARE. Clasa X. *Fejes Iuliu* (1874—884, 891, 894, 914, 915, 917, 920, 924—926, 947—949, 951, 954—957, 960, 971, 974—977).

BĂICOI (Reg. Ploeşti). Absolvent Călin Nicolae (1889, P).

BALŞ (Craiova). Clasa X. Paraschiva Ion (1875—884, 920, 924, 938 ,940, 943, 945, 948, 949, 954—957, 960, 961, 974, 975).

BÎRLAD. Clasa X. Bejan Gh. (1874, 884, 891, 920, 947—949, 951, 956, 957, 960, 961), Ştirbu Gheorghe (1878, 881, 891, 947—949, 951, 955—957, 961, 962, 964).

BRĂILA. Clasa X. Cazacu Radu (1875, 877, 879, 881—884, 948, 949, 955—957, 960), Costin P. Mircea (1879, 880, 914—917, 919, 920, 925, 931, 948, 949, 951, 952, 955—958, 960—964, 990, 993), Dobrescu Gh. (1875—878, 881—884, 889, 891, 916, 947, 948, 951, 954—956, 958, 960, 974, 976), Georgescu Laurian (1876, 877, 881, 894, 915, 920, 924, 926, 940), Iordache Gh. Vasile (1875, 879—881, 883, 886, 890, 891, 894, 917, 920, 941, 944), Scarlat Sorel (1882, 924, 948, 951, 954—957, 960, 962).

BLAJ. Clasa X. Pop Alexandru (1938, 940, 947—949, 951, 954—957, 968, P).

BOTOŞANI. Clasa VII. Lucan Elena (E: 747—755, 757—760); clasa X. *Apetrei Nicolae* (1874, 880, 881, 883—885, 887, 898, 911, 914, 915, 924, 930, 931, 935, 938—940, 942—958, 960—964, 974—977, 990, P), Lelescu Nicolae (1830, 833, 835, 844, 876, 877, 880, 882, 884, 891, 947—949, 951, 954—957, 960—962, 971, 976, 982, 990).

BREAZA (Reg. Ploeşti). Şcoala medie militară « D. Cantemir ». Clasa X. Căpitanu Cornel (1948—952, 956, 957, 960, 977), Lache I. Florică (1947—951, 955—957, 960, 962, 963, 977).

BUCUREŞTI. — *Studenţi*: *Căluianu Nicolae* (Inst. Căi ferate) (1872, 876—880, 882—884, 888, 891, 894, 904, 914—917, 922, 924, 926, 937—940, 942, 943, 945—948, 950, 951, 954—956, 958, 960—964, 967, 970—975, 992, 997, P), Cîrstoiu I. Barbu (Fac. Matematică) (1915, 917, 923, 924, 926, 927, 940, 943, 944, 947—949, 951, 954—957, 961, 962, 976, 977), *Florescu Gh. Mircea* (Fac. Mecanică) (1811, 875—877, 882, 913—915, 940, 943, 947—952, 954—957, 960—964, 977, 990, 992, 993), *Lupuţiu Ioan* (Fac. mecanică) (1816, 817, 831, 833—835, 837, 847, 857—858, 861, 862, 866, 871, 874—878, 880—892, 894, 898, 899—901, 904, 907, 908, 911, 913—915, 917, 920, 922, 924, 925, 931, 935, 937—945), *Popovici I. Radu* (Fac. Mecanică) (1879, 880, 881, 889, 894, 914, 915, 919, 923—925, 927, 947, 948, 951, 954—956, 958, 960—962, 971, 973—975, 977, 990, 992, 993), *Roşianu C. Dragomir* (1832, 849, 853, 866, 879, 881, 883, 889, 917, 919, 920, 924, 937, 940, 943, 945, 948, 950, 951, 954—956, 958, 960, 962, 963, 972—975, 977, 990, 982, 993), *Stoian I. Gheorghe* (Fac. Matematici) (1873, 927, 930, 932, 944, 947—967, 970, 971, 973—978, 982, 984, 990, 992, 995, 996, P), Tache Ştefan (Inst. Petrol şi Gaze) (1829—837, 875, 876, P). Absolvenţi: Georgescu R. Nicolae (1762, 874, 875, 877, 879, 880, 882—884, 915—917, 920, 924, 947, 948, 950, 951, 954—956, 958, 960, 961, 963), Mavrogheorghe V. (1879, 880, 914, 947, 948, 950, 954—956, 958, 960, 961, 963), Pachtinger W. Simion (1915, 920, 923—925, 938, 940, 943, 945, 947, 948, 951, 954, 955, 957, 960, 962, 963), Segall

Tomas (1875, 882, 884, 915, 920, 924, 947, 951, 954, 955, 960), Tudor Mihai (1836, 861, 871, 915, 918, 920, 921, 924—927, 931, 938, 940, 940, 943, 944).

Şcoala medie de băieţi Nr. 1 « N. Bălcescu ». — Clasa X-a. *Basarab A. Şerban* (1613, 618, 662, 700, 756, 762, 771, 789, 829—831, 835, 837, 838, 841, 844, 848, 851, 859, 861—862, 864, 866, 874, 875, 877, 879, 880, 883, 884, 891, 898, 903, 908, 913, 915—917, 919, 920, 923, 924, 930, 931, 935, 938, 940, 943—945, 947, 948, 951, 954, 955, 958, 966, 974, 975, 977, 982, 983, 992, 993), *Emanuel Alexandru* (1616, 676, 862, 864, 875—884, 890, 891, 904, 908, 911, 913, 915, 917, 919—926, 930, 931, 940, 942—944, P), *Moraru Florentin* (1879, 880, 884, 891, 914—916, 918—921, 924, 931, 940, 943, 944, 947—949, 951—958, 960, 962—964, 964, 974—976, 992, 996), *Schileru Dinu* (1878—880, 885, 887, 891, 892, 908, 911, 914, 921, 923, 946——949, 951, 954—957, 960—962, 967, 970, 971, 974—997), Vovcenco Andrei (1835, 837, 841, 877, 920, 924, 947—949, 951, 955—957, 963, 964).

Şcoala medie nr. 2. — Clasa IX-a. *Teodorescu N.* (1875, 877, 879, 880, 882, 884, 891, 898, 904, 908, 911, 920—925, 940, 941, 944, 947—925, 954—962, 970, 974, 976, 977, 981, 990, 993—995), *Şeitan G. Radu* (1874—877, 879, 880, 883, 884, 891, 898, 904, 908, 915, 920, 922—925, 944, 947—952, 954—958, 960—963, 970, 971, 974, 977, 990, 992—994).

Şcoala medie mixtă nr. 3. — Clasa X-a. Dobrescu Alex. (1947—951, 953, 954, 956, 957, 960, 961, 963, 964).

Şcoala medie nr. 4 « *Aurel Vlaicu* » *Griviţa Roşie.* — Clasa VIII-a. Bărbulescu Constantin (1951, 954—956, 971, 997, 2009, 024, 029), Beldie Ioan (1956, 960, 976, 998, 2005, 006, 009, 010, 021, 023), Cîrceag Const. (1875, 879, 883, 884, 915, 924, 948, 951, 955—957, 960, 963, 967, 971, 974—976, 992), Coc Dan (1874, 875, 878, 882—884, 946, 947, 951, 955, 957, 960, 961, 963, 997, 2005, 006, 010, 023), *Dobre Cornel* (1874—876, 878, 881—884, 886, 949, 949, 950, 952, 954, 955, 960, 961, 964, 976, 997, 2005, 006, 009, 010, 021, 023, E: 731, 735, 738, 747, 749, 750, 752, 753, 766, 868, 769, 772, 774), Fasola Ion (1915, 940, 944, 949, 954, 955, 957, 960, 963, 976, 992, E: 738, 742, 745), Fedorovici Adrian (1948, 951, 954—956, 960, 961, 971, 997, 2009, 021, 023), Feldman David (1879, 924, 951, 954, 956, 960, 976, E: 725, 727, 729, 735, 738, 745, 747, 749, 750, 752, 755), Iacobovici Grigore (1921, 936, 940, 955, E: 737, 738, 741, 742, 747, 749), Iliescu Nicolae (1956, 976, 995, 998, 2005, 006, 008, 023, E: 765, 768, 772, 774), Ionescu Marin (1851, 875, 882, 884, 915, 938, 946—948, 954—957, 960, 963, 977, E: 708, 709, 714, 718, 722, 727, 729, 731, 735—737, 747, 749, 750, 752), Măinescu Gabriel (1875, 882, 884, 915, 924, 954, 955, E: 750, 752, 753), Marmara Gheorghe (1882, 883, 920, 947, 949, 950, 961, 963, 997, 998, 2006, 009, 010), Mincu Horst (1915, 938, 955, 2023, E: 747, 750, 752, 753, 763, 772, P), Nicolau Cornel Virgil (1924, 947, 954, 955, 971, 974, 976, E: 747—753, 758), Popa Nicolae (1954, 956, 960, 963, 976, 2005, 006, 009, 010, 023), Rădulescu Marin (1955, 960, 993, 2004, 006, 008—010, 021, 023, E: 762), Ristea Silviu (1848, 881, 882, 884, 886, 946, 947, 949—951, 954, 956, 957, 960, 961, 964, 976, 2006, 023), Sărăţeanu Alexandru (1948—950, 955, 956, 961, 976, 2008, 010, 023), *Ştefan Zaharia* (1875, 879, 882, 884, 915, 924, 938, 948, 951, 955, 956, 957, 960, 963, 967, 971, 974—976, 992, E: 727, 729—732, 735, 738, 747, 750, 752), *Ştefănoiu Viorel* (1891, 893, 920, 946—952, 955—957, 960, 961, 963, 964, E: 747, 749, 750, 752, 758, 765, 768, 772), Stoenescu M. Florin (1951, 957, E: 735, 737, 738, 741, 742, 747, 749—752, 758, 765, 768), Teodor M. Gheorghe (1950, 961, 997, 998, 2005, 006, 010, 021, 023, E: 738, 765, 766, 768, 772), *Udrea Dumitru* (1874—876, 882—884, 886, 902, 915, 924, 938, 944, 946—948, 950—952, 955—957, 966, 963, 976, E: 727, 731, 735, 738, 742, 747, 750—753): Clasa IX-a. Badea Costel (1877, 883, 914, 924, 848, 951, 955—957, 960, 961, 963), Bejan Ilie (1875, 877, 879, 882, 883, 931, 938—940, 943, 944, 948, 951, 954—956, 960, 961, 976, 992), Bucur V. Virgil (1914, 931, 947, 948, 951, 954—956, 960, 971, 976), Chira Mircea (1860, 1874, 875, 877, 882, 884, 891, 948, 951, 954—958, 960, 961, 975, 977, 993), Cîlţea Gheorghe (1879, 931, 940, 947, 948, 951, 954—956, 960, 963, 971, 974), Ciurez Ilie (1874, 879, 881, 889, 891, 914, 931, 940, 947—949, 951, 954—956, 960, 962, 963, 971, 976), Dobre N. Stoian

(1875, 877, 879, 882, 883, 940, 947—951, 954—957, 960, 961—964, 968, 971, 973, 976, 993), *Draica Constantin* (1812, 830, 832, 834, 835, 837, 838, 844, 845, 847, 848, 859, 861, 862, 866, 871, 875. 877, 879, 880, 883, 884, 891, 898, 914, 915, 920, 924, 938, 940, 943, 944, 948—951, 954, 955—957, 958, 960, 962, 963, 971, 974—977, 992—998, 2001—010, 015, 020, 021), Feliu Constantin (1877, 931, 940, 944, 948, 951, 954—956), Iancu I. Ştefan (1822, 832, 834, 835, 838, 842, 844, 851, 861, 875, 877, 882. 884), Ionescu Ion (1877, 898, 931, 937, 940, 947, 948, 951, 955, 956, 960, 961, 963, 971, 992, 2001, 004, 006), *Ionescu Mircea* (1835, 841, 866, 876, 877, 879, 880, 885, 890, 900, 901, 903, 914, 915, 917, 919—924, 931, 935—938, 940, 943, 944, 947—952, 954—960, 962. 963, 971, 976), Ivan Andrei (1877, 914, 937, 948, 951, 955, 956, 960, 961, 992, 2001, 004, 006), Lazăr Emanuel (1875, 877, 879, 882, 884, 940, 947, 948, 951, 955, 956, 963, 968, 971), Manu Valentin (1877, 879, 880, 898, 938, 940, 943, 947, 948, 951, 954—956, 958, 960, 961, 967, 971, 976, 990), Martiş Gh. Ioan (1947—952, 954—957, 960, 963, 967, 971, 992, 997, 2006), Matei V. Gheorghe (1849, 855, 874, 877, 879, 881, 883, 884, 914, 940, 947—951, 955—957, 960, 962, 963, 971, 976). Mustăreaţă Boris (1848, 849, 866, 874, 877, 879, 884, 947—952, 954—957, 960, 962, 963, 971, 976), Rădulescu D. Constantin (1874, 877, 879, 883, 914, 922, 931, 933, 938, 940, 947, 948, 951, 954—957, 960 —964, 970, 971, 973, 974, 976, P), Samborski Valentin (1830, 831, 835, 861, 875, 877, 882, 915, 920, 943), Schwartz Arnold (1879, 880, 883, 885, 890, 914, 917, 920—924, 931, 938, 942, 944, 945, 947—951, 954—957, 960—962, 976), Stamatoiu I. Petre (1874, 877, 879, 882, 883, 914, 931, 938, 940, 948, 951, 954—957, 960, 963, P), Tăranu Gheorghe (1875, 877, 882, 884, 931, 938, 940, 943, 944, 948, 949, 951, 954—957, 960, 976, 992, 993), Teliu Const. (1879, 949, 950, 954, 957, 960—963, 993), Teodorescu Ioan (1831, 840, 844, 867, 875, 877, 879, 880, 882—884, 914, 940, 943, 947—951, 954, 956, 957, 959—961), Voinescu Const. (1879, 880, 931, 938, 940, 943, 947, 948, 954—956, 960, 961, 962, 968, 971, 976, 977), Zabet C. Daniel (1830, 832, 836, 838, 851, 856, 860, 867, 874, 875, 877, 882, 883, 890, 914, 938, 948, 951, 955, 960, 971), Zvorişteanu Alexandru (1730, 733, 735, 750, 827, 830, 847, 851, 875, 877, 882, 884, 887, 910, 937, 947, 948, 951, 955, 956, 958, 971). *Clasa X-a.* Armăşelu Dumitru (1915, 919, 920, 922—921, 926, 940, 944), Baciu I. Valeriu (1832, 838, 849, 951, 975, 880, 914, 924, 938, 948, 949, 951, 954—957, 962, 964, 974—976), Brîncoveanu V. Mircea (1955, 957, 962, 964, 992. 994, 2007—011, 021, 023), *Buriman Adrian* (1875, 881—884, 915, 927, 940, 947, 948, 950, 951, 954—958, 960, 961, 963, 964, 973, 974, 976, 977, 984, 990, 997), *Crăciun Gh.* (1762, 833, 851, 875—891, 900, 914, 915, 917, 924, 940, 947—949, 951, 954—957, 960—962, 964, 974—976, 980, 992, 993), Cristache Aurel (1651, 947, 948, 954—957, 960, 961, 9 3, 976, 990), Filcescu Viorel (1948, 951, 954—957, 960, 961, 963, 974—976, 990), Giurgea Cornel (1915, 947, 948, 950, 951, 954—956, 960—962, 964, 967, 973—975, 977), Ivănică Alex. (1875—878, 881, 882, 884, 891, 904, 915, 920, 924, 931, 940, 948, 951, 952, 954—957, 961, 967, 974—977, 990), Lupu Gh. (1879, 881, 920, 947, 948, 951, 954—958, 960—964, 967, 971, 974—976, 992, 996), Manolescu V. N. (1838, 842, 844, 851, 861, 875—877, 882, 884, 824), Marinescu Dumitru (1830, 835, 837, 841, 844, 876, 877, 933, 943, 945), Mihalache Marin (1830, 831, 835, 837, 841, 875, 876, 880, 882—884, 899), Musteaţă V. Aurel (1915, 919, 920, 922, 923, 924, 926, 927, 930, 940, 944, 946—956, 958, 960, 964, 967, 971—977, 996), Plătică Paul (1915, 917, 924, 947, 948, 951, 955, 956, 960—962, 974), *Popa Gheorghe* (1806, 832, 835, 851, 876—880, 882, 915, 917, 924, 926, 940, 943, 947—951, 955—957, 960—962, 974, 976), Puşcaşu Nicolae (1947—949, 951, 954—957, 960—962, 974), Ruleacov Victor (1915, 940, 941, 948, 949, 951, 955—957, 960, 961), Russo S. Dan (1918, 920, 924, 927, 941, 943, 944, 947—951, 967, 961, 971, 974, 975), Ştefănescu Ion (1948, 949 951, 954—957, 960, 974, 976), Tănăsescu I. Ştefan (1874, 876, 879, 881—884, 891, 915, 917, 920, 923—925, 931, 938, 940, 943), Tudose Ion (1915, 920, 924, 940, 943, 946—949, 951, 954—957, 961—964, 974, 975), Voinea P. Marin (1947, 948, 951, 954—956, 961, 962, 974, 976, 977), Vrînceanu Cezar (1915, 917, 924, 951, 954, 955—957, 967, 974, 975), Zgreabăn Ion (1878—880, 915, 924, 948, 951, 954—957, 960).

Şcoala medie de fete nr. 5. Clasa X-a. Cîmpu Demetra (1947—951, 954—957, 962, 974, 977, 990, 992, 996, 2010, 021).

Şcoala medie de băieţi nr. 7 « I. L. Caragiale ». Clasa VII. Grofşoreanu Gelu (1840, 844, 876, 882, 894, 918, 926, 929, 941, 944, 955, 960, 962, 974, 976, E: 737, 739, 742, 744, 745, 747—750, 752, 753, 755—758); clasa X-a. Manta R. Nicolae (1874, 876—884, 886, 894), Stroe Gh. Victor (1924, 944, 947, 952, 954, 955, 957, 960—962).

Şcoala medie de băieţi nr. 8. Clasa X-a. Şerban Adrian (1879, 880, 902, 915, 920, 922, 940, 943, 947, 948, 950, 951, 955, 956).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa IX-a. Nagelberg Fani (1948, 950, 951, 954—957, 961, 962, 876); clasa X-a. Dobrin Elisabeta (1835, 844, 874, 867, 877, 882, 883, 920, 927, 930, 943).

Şcoala medie de băieţi nr. 11. Clasa X-a. *Popescu P. Roger* (1892, 831, 832, 842, 857, 861, 862, 874, 878, 879, 885—890, 894, 900, 901, 908, 913—920, 922—925, 931, 938, 940, 941, 943—945, 947—958, 960—963, 971, 973—977), Schekertanz Iosif (1915, 917, 919, 920, 922—924, 931, 938940, 943—945, 947, 951, 954—956, 958, 961, 962, 971, 974—976), Velculescu Silviu (1878—880, 883, 915, 919, 923, 931, 940, 943, 944, 948, 949, 951, 957, 966).

Şcoala medie de băieţi nr. 13. — Clasa VII-a. *Popescu I. Ovidiu* (E: 687, 708—711, 713, 715, 718, 722,725, 727, 729, 730, 735, 737—739, 741, 742, 744, 745, 747, 749, 750), Clasa VIII-a. Bănică Dan (1881, 914, E: 719, 724, 725, 727, 729—733), Schiopulescu Dan (1941, E: 678, 699, 702, 706, 721, 735, 737, 738, 742, 747, 750), Ţugulea Mircea (1940, 944, 954, 957, 962, 970, 971, E: 728, 742, 747, 754—756). *Clasa IX-a.* Grigore Costică (1875—877, 879, 882—884, 908, 914, 915, 923, 924, 931, 938, 943, 944), Lerner Emil (1877, 879, 883, 898, 908, 910, 931, 935, 943, 945, 948, 949, 951, 955—957, 962, 977, 982, P), Tudor M. Gheorghe (1883, 930, 943, 948, 949, 951, 954—957, 960, 962, 963, 976, 977, P.). *Clasa X-a.* Cristescu Dan (1875—877, 879, 880, 882—884, 891, 915), Fluerașu Cezar (1874, 875, 877—884, 891, 898, 904, 908, 911), Ieremia I. Mircea (1875—877, 881—883, 914—917, 920, 931, 938, 940, 944, 948, 955, 956, 960, 962, 974, 975). Ionescu Dan (1874—884, 890, 891, 901, 908, 913, 914), *Şaganai Actic Nusfet* (1874—884, 886, 888, 890, 891, 898, 901, 904, 908, 911, 913—917, 919—927, 930, 931, 940, 942,—945, P), Sorescu D. Gheorghe (1875, 876, 882—884, 908, 911, 914, 915, 922—924, 931, 940, 943)

Şcoala medie greacă nr. 14. Clasa V-a. Mavromatis Alexandru (E: 735, 737—739, 742, 747, 749—751, 758).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa VII-a. Popa D. Doina (1974, 976, E: 747, 749, 750, 754—756, 758, 760). Clasa IX-a. Enescu Cornelia (1884—886, 892, 894, 914, 915, 918, 924, 926, 941, 942, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 17. — Clasa VI-a. Panaite Teodor (E: 736, 738, 740, 742, 747, 749, 751, 768). Clasa VIII. *Oprică I. Mihai* (1876, 879, 882, 884, 904, 905, 908, 914, 915, 923, 924, 930, 940, 944, 949, 954, 955, 957, 959, 960, 962—964, 970, 971, 974, 976, 992, 993, E: 723—725, 727, 729—733, 735, 738—742, 747, 759, P), Paşa Florin (E: 725, 727, 735, 738, 739, 740, 747, 749—753, 758, P). Clasa IX-a. Coconea Mihai (1915, 924, 940, 954—956, 960, 962, 963, 990), Mîndroiu Mircea (1844, 879, 880, 914, 922, 940, 948, 951, 955, 956), Pop Andrei (1875, 877, 879—884, 914, 915, 920, 938, 940, 942, 947, 948, 951, 956, 960, 962, 963, P). Clasa X-a. *Burică Mihai* (1874—885, 891, 894, 898, 900, 915, 916, 919, 920, 924, 926, 927, 931, 937, 938, 940, 941, 943, 948, 949, 951, 953—958, 960, 962, 964, 975—977, 980, 985), Coliren Ignatz (1874, 876, 879, 894, 947—949, 951, 953—956), Herşcu Sergiu (1879, 880, 925, 945, 947—951, 954—958, 960—962, 964, 971, 974—977, 990, 992, 993).

Şcoala medie nr. 18. Clasa VII-a. Nicolau A. Cristian (E: 735, 737, 738, 747, 749, 750, 752). Clasa VIII-a. Rădan A. Cristian (1954, 955, 960, 964, 971, E: 747, 750, 752, 754, 758).

Şcoala medie de fete nr. 19. Clasa X-a. Boca Corina (1831, 835, 837, 838, 847, 871, 875—877, 882, 884), *Nicolau Ileana* (1735, 736, 742, 746, 792, 793, 803, 819, 820, 822, 833, 838, 874, 881, 890, 891, 915, 920, 943, 948, 951, 953—955, 957, 976, 992—996).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. — Clasa VIII-a. Enulescu C. Alexandru (1875, 876, 879, E: 723, 726, 727, 729—733), Macarie Gh. (1955, E: 724, 727, 729, 733, 735, 738, 747, 750, 752), Tabra Dumitru (E: 687, 708—710, 713, 715, 716, 718, 724, 727, 729, 749). Clasa X-a. *Ene I. Ioan* (1618, 762, 878—880, 889, 890, 894, 914, 919, 917, 920—922, 925, 930, 943, 945—958, 960—964, 967, 971, 974, 975, 977, 990), *Iorgulescu Alexandru* (1872, 875—885, 889—891, 898, 915, 919, 920, 922—924, 938, 940, 943, 944, 947—949, 951, 952, 954—958, 960—963).

Şcoala medie de fete nr. 21. — Clasa X-a. Colfescu Viorica (1947—949, 955—957, 960, 962, 964, 967, 970, 974—976), Dogaru Viorica (1835, 837, 844, 875—877, 881, 883, 884, 940).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa VII-a. Ciorănescu Ioana (E: 741, 742, 748, 752, 754, 755, 759, 768, 772, 774). Clasa IX-a. Bereschi Stefana (1880, 917, 922, 940, 948, 951, 955—958, 962, 967), Diaconescu Mihaela (1875—877, 881—883, 914, 915, 922, 940, 944), Gheorghiţă Mariana 1879, 884, 890, 893, 914, 917, 925, 943, 955), Ionescu A. Monica (1947, 948, 951, 954—957, 960, 962, 963, 971, 976, 977), Pîslaru Alexandra (1947, 948, 951, 954—957, 960, 962, 963, 971, 976, 977).

Şcoala medie de băieţi nr. 23. — Clasa X-a. Bumbac Mircea (1833, 835, 841, 845, 875, 877—884, 891, 924, 948, 974).

Şcoala elementară nr. 119. — Clasa VI-a. Mira Eugen (E: 687, 708, 711, 718, 720—722, 729, 740, 745, 746).

Şcoala de 7 ani nr. 126. — Clasa VII-a. Săvescu Gabriela (E: 735, 737, 738, 742, 747, 749—752, 754, 757).

Şcoala de 7 ani nr. 145 Ghencea. — Clasa VI-a. Boiangiu Ana (E: 687, 693, 696, 700, 703, 709, 713, 735—738, 737, 758), Mircea Ecaterina (E: 677, 693, 695, 700, 703, 709, 710, 735—738, 747, 749). Clasa VII-a. Merteş Petruş (E: 735, 737, 738, 742, 747, 749—753, 757, 758).

Şcoala de 7 ani nr. 165. — Clasa VII-a. Costache I. Alexandru (E: 657, 659, 677, 690—698).

Şcoala medie de arhitectură. — Absolvent Mavrogheorghe Vanghele (1874, 785, 877, 882—884, 891, 917, 919, 920, 922, 924, 925, 943).

BUZĂU. — Clasa IX-a. Suciu Tita (1867, 915, 920, 921—926, 932, 939, 943—951, 954—958, 960—964, 970, 971, 976, 977). Clasa X-a. Cismaru Cornelia (1947—949, 951, 955, 956, 960, 971, 974, 976), Creţu Florin (1917, 920, 947, 949, 951, 955, 957, 974), *Cucu Paul* (1616, 618, 761, 783, 915, 917, 921, 922, 925, 926, 932, 939, 941, 945—952, 954—958, 960—964, 974—977, 980), Marcu Nicolae (1875, 877, 879, 884, 924, 947, 948, 955, 956, 960, 963, 974, 975), Taia Georgeta (1830, 835, 838, 844, 851, 876, 881, 920, 948, 951, 956). Anonimi. A. (1940, 943, 944, 948, 950, 951, 955, 956,960,962, 976, 977, 990), B. (1938, 940, 943, 947—949, 954—956, 976, 977, 990).

CALAFAT. — Clasa VIII-a. Parapancea Marin (1943, 948, 951, 954—956, 957, 962, 964, 976, 977, 993, E: 687), Clasa IX-a. Ciurezu C. Radu (1939, 940, 948, 951, 954—958, 960—962, 976, P), Diaconescu C. Gh. (1943, 945, 948, 951, 954—958, 960—962, 976, P), Ghinea Petru (1876, 877, 880, 882, 948, 949, 951, 955—957, 962, 971, 976, 977), Radu Florin (1882, 940, 943—945, 948, 956, 957, 962, 964, 976, 977).

CARANSEBEŞ. Clasa IX-a. Haţegan Cornel (1874, 881, 894, 897, 900, 924, 929, 931, 937—940, 944). Absolvenţi: *Mateescu Teodor* (1618, 756, 762, 808, 830—842, 844, 847, 851, 858, 862, 863, 871, 872, 875—878, 880, 882—884, 858, 862, 863, 871, 872, 875—878, 880, 882—884, 887, 889, 891—894, 900, 911, 914, 915, 917, 920, 922, 924, 937, 938, 940—945, P), *Sgîrdea Dumitru* (1618, 716, 756, 762, 808, 830—842, 844, 847, 851,

858, 862, 863, 871, 872, 875—880, 882—884, 887, 889, 891—894, 900, 911, 914, 915, 917, 920, 922, 924, 933, 937, 940—945).

CÎMPINA. — Clasa VIII-a. Palaghiţă Iordache (1762, 970, 971, 974, 976, 990, E: 699, 702, 706, 731, 747, 749—752, 755, 757).

CAREI. Clasa X-a. Micu Emil (1875, 877, 880, 881—884, 915, 924, 940, 944), Ristea Corneliu (1875, 877, 879—882, 917, 918, 924, 940, 956, 957, 976).

CLUJ. — Clasa IX-a. Bîrzan Romanel (1873, 879, 914, 922—924, 926, 930, 948—951, 954—957, 960—964, 976, 977, 992, 993), student Baba Romulus (1924—1926, 938, 947—949, 954—957, 960—962, 964).

CORABIA. Clasa VIII. Petcu Alexandru (1875, 876, 882, 884, 899, 920, 928, 945, E: 724, 725, 727, 729, 730, 732, 736, 737, 746). Clasa X-a. Ciorecan Zaharia (1875—878, 881, 882, 894, 916, 917, 924, 928, 941, 948, 951, 955, 957, 960, 963, 964, 974, 975), Florescu Mihai (1917, 924, 938, 940, 943, 947, 954—957, 960, 961, 967, 974, 975, 977, 984, 992). *Şarpe I. Dumitru* (1808, 866, 891, 904, 912, 914, 915, 917—920, 924—926, 928, 931, 937, 938, 940, 942, 943, 945, 947—949, 951, 955—957, 960—965, 967, 971, 974, 975, 992, 993).

CONSTANŢA. Clasa VIII. Ciochină Cornel (1940, 944, 993, E: 735, 737, 738, 740, 742, 743, 745, 748, 751, 754, 758), Simion C. Eugen (1992, E: 725, 730—732, 735, 738, 742, 747, 749, 750, 754). Clasa IX-a. Dobriţoiu Petre (1915, 917, 918, 920, 924, 947, 948, 951, 955—958, 960—961), Genişa Fichiret (1948, 950, 951, 954, 956, 957, 960, 962, 964, 971, 976), *Ianuş I. Stere* (1762, 843, 877, 879, 898, 914, 922, 924, 930, 931, 944, 945, 947—952, 954—957, 960—964, 970, 971, 976, 977, 992—994), Ionescu Ion (1878, 879, 914, 931, 940, 943, 944, 948, 955—958, 915, 924, 947, 948, 951, 953, 954, 960—963), Vlaicu Margareta (1899, 915, 917, 920, 928, 935, 945, 951, 958, 960, 976). Clasa X-a Manolescu I. Ilie (1875—77, 979—884, 890, 891, 903, 914. 915, 922, 924, 940, 943, 944), absolvent Osman S. Saim (1874—886, 888, 890, 891, 894, 895, 898, 905, 908, 913—917, 919, 920, 923, 924, 926, 927, 931, 935, 940, 943, 944). Anul III construcţii. Stepan Ionel (1834, 845, 852, 854, 874—879, 882—884, 891, 892, 894, 896), Angheluş Ion (1879, 882, 883, 891, 894, 920, 940, 947, 948, 950, 951, 954—958, 960, 962—964, 973—976), Balea Andrei (1879, 880, 889, 920, 924, 943, 948, 951, 954, 960, 961, 967, 971, 975), *Colonati Cristian* (1832, 848, 849, 866, 871, 874—892, 894, 898, 901, 914, 915, 917, 920—926, 931, 940, 942, 943), Moisin L. Tudor (1874—877, 879—884, 889, 891, 892, 894, 914).

CÎMPULUNG MUSCEL. — Clasa X-a. Bival I. Ion (1877, 878, 881—883, 904, 908, 917, 919, 920, 924, 940, 947, 948, 950, 954, 955, 971, 974—976).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Clasa IX-a. Hopolele Ion (1948—950, 954, 955, 956—958, 960, 961, 963, 976, 993, 2000).

CĂLĂRAŞI. Clasa IX-a. Glacă Despina (1863, 877, 928, 951, 956, 960, 968, 976, 977, 982), Onuţă N. Ion (1879, 948, 949, 951, 956, 962, 963, 971, 976, 992). Clasa X-a. Belcin Adriana (1875, 879, 881—884, 886, 914, 915, 917, 920, 940, 943, 947, 948, 951, 956, 960, 963), Stoicescu Petre (1882, 898, 900, 948, 951, 957, 958, 975, 976, 985), absolvent Duda Nicuşor (1879, 880, 947—958, 960—963, 973—977, 982—984, 990, 992, 993).

CERNAVODĂ. Clasa X-a. Tănase Vasile (1796, 874, 876, 977, 979—884, 891, 915—917, 920, 924, 938, 940, 943, 947, 948, 951, 954—956, 960, 961, 974—977).

CARACAL. Clasa VII-a. Dincă Gh. (1954, 971, 976; E: 738, 747, 749—752, 754), Mihăilescu I. Viorel (1851, 944, E: 709, 721, 727, 729, 730, 735, 738, 747, 749, 750, 752, 753), Niţulescu C. Ion (1954, 955, 957, 992, E: 749, 952, 755), Stratan Gh. (1954, 955, 957, 962, 963, 992, E: 747, 750, 752, 755); clasa IX-a. Rădulescu N. Victor (1948, 949, 951, 954—956, 960, 962—964, 976, 990), Niculescu D. Stelian (1875, 882, 886, 915, 924, 940, 944, 948—950, 955, 956, 960, 962, 971, 976). 897, 937, 940, 941).

CRAIOVA. Şcoala medie de băieţi nr. 1. Clasa X-a. *Căluţoiu Ion* (1874, 878, 880, 943, 947—958, 960—962, 964, 966, 967, 971, 974, 975, 977, 990, 993, 996), *Hulubei T. Valeriu* 856, 858, 871, 879, 880, 885, 886(1, 888—892, 894, 895, 900, 901, 903, 904, 906, 908, 911,

913—917, 919, 920, 931, 938, 940, 943, 944), *Stănculescu A. Adrian* (1783, 874, 879, 880, 891, 920, 921, 926, 943, 947—951, 953—958, 960—964, 967, 971, 973—977, 990, P), Tărîță Ion (1879, 880, 890, 891, 914, 926, 948, 949, 951, 954—957, 960—962, 964, 974—976, 984, 990, 992, 996), Voinea I. Mircea (1876, 879—882, 891, 937, 940, 951, 957, 960, 974).

Școala medie de băieți nr. 2 « Frații Buzești ». Clasa IX-a. Bărboiu D. Mircea (1876, 879, 880, 914, 915, 943, 947—951, 955—957, 960, 963, 964, 976, 977, 990, 992, P). Clasa X-a. Bărbulescu I. Ion (1940, 947, 948, 951, 954—956, 960, 962, 967, 976, 977), Bisiadowski Mihail (1874—77, 879, 880, 882, 891, 893, 947—951, 954—958, 960—962), Dondoe Șt. (1947, 948, 950, 951, 954—956, 960—963, 974—977), Georgescu A. Paul (1880, 927, 944, 948, 951, 955—957, 960—962, P), Mihail M. Gheorghe (1927, 948, 951, 955—957, 960—962, 984, P), Pleșoianu Gh. (1874—877, 879, 880, 882, 891, 893, 924, 947—951, 954—958, 960—962, 992), Ștefănescu Gh. Voicu (1940, 948, 949, 951, 955—957, 960—964), Topozu Gh. Paul (1924, 940, 948, 949, 951, 954—957, 960—962, 974—977). Absolvenți. Capră I. Gheorghe (1874, 879, 881—883, 924, 927, 931, 940, 948, 951, 952, 954—956, 960, 961, 962, 974, 975, 977), *Cojocaru Ion* (1875, 879, 880, 914, 915, 922, 924, 925, 927, 931, 940, 943, 947, 948, 950—952, 954—958, 960—963, 972—976, 993, P), *Dinu Gheorghe* (1769, 831—835, 837—843, 863, 864, 866, 872, 874, 876—878, 880, 881, 883—888, 891, 892, 894, P).

DEVA. Clasa VIII-a. Bivolaru Tudor (1915, 949, 954, 955, 957). Clasa IX-a. Certejan I. Tiberiu (1879, 882—884, 898, 914, 924, 938, 947, 948, 950, 951, 954, 960, 977). Tisu Alexandru (1875, 877, 882—884, 891, 898, 914, 948, 951, 956, 977, 960, 963).

DOROHOI (Suceava). Clasa IX-a. Mărgineanu Gabriel (1924, 931, 940, 943, 948, 951, 954, 956, 960, 976); clasa X-a. Rabinsohn Florin (1874—877, 879—882, 884, 886, 888, 891, 894).

DRĂGĂȘANI. Absolventă Burlănescu Niculina (1915—917, 920, 922—924, 940, 947, 949, 954—947, 960, 961, 963, 967, 971—976).

FĂGĂRAȘ. Clasa X-a. Suvăială Cornel (1914, 924, 937, 941, 947, 954, 956, 960, 974, 984).

FĂGET (Timișoara). Clasa IX-a. Antănaș Petru (1947, 948, 954, 957, 961—964, 970, 971, 985).

FOCȘANI. Clasa VIII-a. *Dinulescu Horia* (1875, 882, 884, 914, 924, 937, 940, 955, 962, 964, 970, 971, 947, E: 659, 690, 714, 720, 722, 725, 731, 732, 735, 737—740, 742, 744, 745, 747—753, 755), Rădescu Eugen (1838, 914, 915, 924, 938, 940, E: 735, 737, 738, 742, 743), Clasa IX-a. Bușe Constantin (1738, 835, 876, 877, 881, 884, 914, 915, 917, 920, 924, 938, 940, 942, 944, 947, 948, 954, 956, 957, 967, 970, 971, 974, 975,) *Cojocaru I. Mihai* (1833, 838, 844, 848, 851, 867, 874—879, 881—884, 894, 908, 914, 925, 924, 930, 940, 941, 943, 944, 948, 949, 951, 954, 956, 957, 960, 962, 964, 971, 973—976). Clasa X-a. Atanasiu Costică (1876, 879, 881—884, 938, 951, 955, 957, 960, 962, 970, 971, 974—976), *Bercovici H. Izu* (1759, 783, 792, 793, 808, 822, 835, 837, 838, 851, 875, 877, 879, 881, 884, 891, 893, 914, 915, 917, 920, 924, 926, 938, 940, 942, 944, 947, 948, 954, 956, 957, 967, 970, 971, 974, 975), Celan Romulus (1832, 834, 838, 848, 849, 851, 871, 876, 878, 881, 898, 904, 916, 940, 944), Stoica N. Constantin (1830, 833, 837, 844, 866, 875—877, 879, 881—884, 889, 908, 914, 917, 918, 920, 924, 938, 940, 948, 949, 951, 955—957, 960, 962, 963, 970, 971, 974, 975, 977), Țigănuș Mircea (1817, 838, 842, 847, 851, 871, 975—879, 881—884, 891, 898, 917, 919, 920, 924, 940, 942, 947—949, 951, 954, 955)

GALAȚI. Școala medie. Clasa VIII-a. Boldeanu Ichim (1971, 976, E: 735, 738, 747, 749, 750, 754 — 756), Toma Teodor (1971, 976 E: 735, 738, 747, 749, 750, 754—756). Clasa IX-a. Căpran D. Petre (1971, 976, E: 724, 725, 727, 731—733, 738 747, 749, 750, 752, 758), Carp Gelu (1915, 940, 944, 948—950, 955—957, 962, 977), Chirilă

Costică (1875, 876, 879, 882, 884, 890, 914, 915, 923, 934, 938, 940, 945, 948, 950, 951, 954—956, 960, 963, 977, 990), Voiţiuc Alexandru (1915, 923, 940, 944, 947—957, 959—962, 976, 977, 990). Clasa X-a. *Ceanga Emil* (1874, 876, 878, 879, 881, 882, 884, 891, 914, 920, 922, 924, 947—949, 951, 954—958, 960—963, 971, 974, 990, 993, 996), Grosu Florin (1705, 707, 708, 711, 712, 716, 718, 829—849, 851—854, 856—859, 861—864, 866—868, 871, 872, 874—894, 915—926), Neagu Ştefan (1880, 884, 894, 898, 914, 917, 919, 920, 924—926, 938, 940, 941, 943, 947, 948, 955, 961). Absolvent Sevastie I. Gheorghe (1807, 808, 874, 876—878, 880—892, 894, 917, 919, 920, 922—925, 940, 943), Juncu Nicolae (1877, 879, 880, 882, 884, 891, 917, 951, 955, 956, 960, 961, 977), Mîndru Traian (1876—884, 891, 917, 919, 920, 938, 943, 947, 948, 951, 954—956, 960—962, 977).

GĂEŞTI (Piteşti). Clasa VIII-a. Triboi Eugen (1955, 971, 976, E: 747—755).

GHEORGHIENI (Reg. Aut. Maghiară). Clasa IX-a. Grigoraş Guţă (1924, 944, 948, 951, 955, 956, 960, 962, 977), Lupeş Gheorghe (1876, 879, 882, 920, 924, 940, 944, 948, 951, 955, 956, 960, 962, 977).

GIURGIU, Clasa VII-a. Chelu Ion (E: 726, 727, 729, 733, 735, 738, 742, 747, 749, 750, 753, 758), Dobrică Marin (1955, E: 727, 729, 735, 738, 747, 749, 750, 752, 753, 758), Mătrăcanu Clement (E: 720, 725, 727, 729, 735, 738, 747, 749, 750, 752), Nedea Leonida (E: 735, 738, 747 749, 752, 753, 755, 759), Stăncescu Virgil (1974, E: 702, 706, 747, 750, 753, 755, 758, 759). Clasa IX-a. Aşenbrener Dumitru (1874, 883, 890, 925, 940, 943, 948, 951, 954—956, 963, 974—977), Dorobanţu Traian (1877, 882, 883, 940, 943, 947, 948, 951, 955—957, 962, 971, 976, 977), Mustăţea Florin (1876, 877, 879, 880, 931, 947—951, 954—957, 962, 976, 977). *Panaitopol Laurenţiu* (1700, 716, 789, 805, 825 829, 836, 841, 846, 857, 859, 866, 872, 878, 879—881, 885, 887, 891, 899, 900, 903, 907, 914, 915, 917, 919—925, 928, 930, 931, 935, 937—963, 974, 976, 977, 981—983, 990, 992—996), Tincu Valeria (1875, 879, 882, 914, 924, 938, 940, 943, 944, 948, 954—957, 960, 962, 971, 976), Serbănescu Florin (1762, 877, 879, 880, 882, 883, 891, 915, 923, 940, 943, 948, 951, 955—957, 961, 964, 976, 977). Clasa X-a. *Botoran I. Petre* (1831, 832, 841, 874—878, 881—886, 889, 891, 892, 894, 900, 914—917, 920, 921, 923, 924, 926, 931, 941, 947—961, 954, 957, 966, 971, 973—977), Ionescu Ecaterina (1915, 917, 919, 920, 922, 924, 941, 954, 948, 951, 954—957, 960, 962, 99 0), *Sin C. Alexandru* (1618, 915—917 923, 926, 931, 943, 947—964, 966, 971, 973—977, 984, 992, 993, 996), Stăncescu N. Emil (1618, 819, 830, 831, 833, 835, 837, 841, 842, 844, 845, 847, 848, 851, 860, 861, 866, 874—877, 879—884, 886, 889, 891, 913—915, 917, 920—923, 931, 940, 947—964, 967, 971, 973—977, 984, 992, 993, 996, P), Stăncescu St. Nelu (1618, 806, 823, 830, 833, 840, 842, 851, 864, 866, 876, 882—884, 917, 924, 927, 940, 941, 945, 970, 974, 975).

HUNEDOARA. Absolvent Nicolăescu Victor (1875, 884, 894, 930, 940, 944, 949, 952, 955, 957, 962, 964).

HUŞI. Absolvent Dolteanu Temistocle (1874, 875, 878, 881, 882, 884, 891, 893, 947, 948, 954, 956, 960, 961).

IAŞI, Şcoala pedagogică mixtă. Anul II. Mertic Elena (1814, E: 708, 709, 714, 716, 718, 722, 825, 727, 729, 731). Anul III. Crăcană Petre (1875, 876, 878, 879, 881, 882, 884, 886, 894, 914, 937). Şcoala medie clasa VII-a. Nanu Gheorghe (1940, 944, E: 725, 727, 730, 732, 738, 745, 777). Clasa IX-a. Costinescu Anca (1874, 879, 885, 886, 889—892, 915, 917, 920—925, 930—932, 936, 938, 940, 942—946, 948—952, 955, 956, 958—965, 976, 977, 980—982, 990, 994, 995), Creţu Mihai (1915, 918, 924, 931, 940, 913, 948, 951,954—956, 977, 992), Cuşmaru Ilie (1877, 879, 883, 931, 943, 945 948, 950, 954—956, -60, 962, 971), Feldman Milu (1877, 879, 883, 884, 923, 924, 931, 943, 945, 948, 951, 954—956, 960, 971, 976, 977), Grişaru Iancu (1879, 883, 884, 945, 948, 950, 951, 955, 956, 971, 976, 977), Iţicovici Michel (1877, 923, 931, 945, 948, 951, 954—956, 961, 976, 977, 990), Mihalache Adrian (1924, 931, 940, 943, 945, 948, 949, 951, 954—957, 962—964, 971, 976, 977), Sor Liber (1877, 879, 883, 928, 935, 938, 940, 943, 948, 951, 954,

955, 960), *Ţibuleac Florin* (1833, 834, 838, 843, 838, 851, 852, 859, 967, 875—879, 881—884, 888, 889, 891, 894, 897, 915, 920, 922, 924, 926, 940, 941, 943, 944, 948, 951, 955, 956, 960—964, 967, 968, 971—977). Clasa X-a. Baran Neculai (1922, 925, 938, 947—952, 954—956, 960), Brînză Mircea (1917, 920—922, 924, 925, 940, 941, 940, 944, 945), Marin Lili (1874—878, 881—884, 891, 898). Scoala medie militară. Clasa X-a. Panţuru I. Dumitru (1783, 877, 879, 880, 898, 919, 926, 936, 939, 943, « Din activitatea cercului de matematici pe şcoală »). Studenţi: Simion Ispas (1833, 847, 875, 876, 879, 881, 882, 894, 910, 939, 941, 951, 956, 960, 963), Ţîru Emil (1815, 832, 833, 838, 844, 848, 849, 851, 859, 875—877, 880—884, 886, 898, 916, 918, 920, 924).

JIMBOLIA. Absolvent Podină Ioan (1855, 875, 876, 878, 882, 883, 886, 887, 901, 912, 914).

* * *

Se primesc soluţii pînă la apariţia numărului 8, august 1956, numai la problemele apărute în ultimele trei numere şi la problemele: 2047, 2063, 2072, 2075, 2076, 2080, 2093, 2098, 2108, 2140, 2141, 2142, 2145, 2154, 2159, 2162 şi următoarele.

In legătură cu întrecerile între cercurile de elevi la matematică şi fizică pe anul 1956

— In cererile de participare la întrecerile între cercurile de matematică şi fizică din şcoli medii nu s-a specificat: numărul de clase medii ale grupului şcolar minier Brad; numărul de clase a 8-a ale şcolii medii „I. Rangheţ" din Tg. Mureş.

— Nu s-a primit încă punctajul obţinut la această întrecere pînă la finele acestui an şcolar, de la şcolile: s.m. 1 Piteşti, s.m. 2 Iaşi şi grupul şcolar minier Brad şi de la nici o şcoală medie din: Arad, Bacău, Baia Mare, Botoşani, Bucureşti, Buzău, Călăraşi, Cluj, Constanţa, Craiova, Focşani, Galaţi, Giurgiu, Lugoj, Oradea, Oraşul Stalin, Piteşti, Slatina, Tîrgovişte şi Timişoara.

Şcolile din localităţile de mai sus sînt rugate să ne trimită de îndată fişa de participare cu punctajul obţinut pînă la finele acestui an şcolar, şi numărul exact de clase a 8-a, a 9-a şi 10-a din şcoală.

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— La exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani se primesc rezolvări de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, de la elevii anului I al şcolilor tehnice de maiştri sau din anul I şi II ai şcolilor profesionale, pedagogice de învăţători. Nu se iau în seamă soluţiile problemelor propuse pentru şcoala de 7 ani dacă sînt trimise de elevi ai *claselor a IX-a, a X-a, ai şcolilor medii tehnice sau de studenţi* şi nici soluţiile trimise după trecerea a trei luni dela publicarea problemelor respective sau de la publicarea eratei, dacă a fost cazul.

Rezolvitorii de probleme sînt rugaţi să nu trimită plicuri cu mai puţin de 10 soluţii; iar trimiterea rezolvărilor şi propunerilor să se facă numai odată în cursul aceleiaşi luni, aşezînd problemele rezolvate în ordinea lor numerică aşa cum vor fi apoi, anunţate la rubrica rezolvitorilor de probleme. Pe o parte a plicului se va scrie: localitatea, şcoala sau institutul, numele şi adresa rezolvitorului; iar pe cealaltă parte, adresa: « Gazeta Matematică şi Fizică », seria B, strada Academiei nr. 14, Bucureşti I.

Din problemele primite nu se anunţă cele incomplect rezolvate, cele care conţin greşeli, cele neglijent redactate, cele care au greşeli de calcul, desene neglijent făcute, sau sînt copiate după altele.

De asemenea, nu se publică problemele propuse de către colaboratori, dacă ele sînt cunoscute sau nu sînt însoţite de soluţia lor clar redactată.

— Deoarece numărul abonaţilor se apropie de numărul de exemplare tipărite, iar tirajul este numai de 16.000 exemplare, G.M.F. seria B va apare la chioşcuri într-un număr foarte redus de exemplare şi deaceea colaboratorii sînt astfel anunţaţi să se aboneze de îndată pentru a nu rămîne cu colecţia necompletă.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu**
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Marcuşevici**
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev**
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov**
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominski**
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc**
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu**
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Marcuşevici**
9. *Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi* de **A. I. Ghelfond**
10. *Despre conice şi alte curbe* de **O. Sacter**
11. *Maxime şi minime geometrice* de **Ion Ionescu**
12. *Cometele* de **F. I. Zighel**
13. *Radioastronomia* de **S. Sklovski**
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu**
15. *Soarele şi observarea lui* de **V. V. Saronov**
16. *Elemente de calcul vectorial* de **O. Kreindler**
17. *Experienţe simple cu ultrasunete* de **B. B. Kudriavţev**
18. *Nomograme* de **M. V. Pentkovski**
19. *Elemente de teoria congruenţelor de drepte* de **A. Kahane**
20. *Culegere de probleme de geometrie* de **Gh. Ţiţeica** (*revăzută şi complectată* de **G. D. Simionescu**)

Pentru abonarea pe 4 luni se poate achita la oficiul poştal local suma de 4 lei (preţul fiind 1 leu exemplarul)

Volumul VII, Nr. 7 (Gazeta Matematică şi Fizică seria B) iulie 1956

C. 662. – ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 **Preţul Lei 1 exemplarul**

E 1426

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

Könyvtár MAGYAR

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică BUCUREŞTI ОБМЕН - CSERE VYMENA - WYMIANA TAUSCH - СМЕНА

Anul VII — august 1956

8

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII, Nr. 8 — august 1956

SUMARUL:

		Pag.
1.	*«23 August» ziua eliberării patriei noastre*	393
2.	*Rădăcini comune la două ecuaţii, de D. Mihalaşcu*	395
3.	*Energia atomică în tehnică*	401
4.	*Despre conice, de A. Töth*	409
5.	*Note matematice (12—15)*	415
6.	*Probleme rezolvate (1364; 1401; 1556; 1628; 1802; 1841; 1842; 1843; 1856; 1861; 1863; 1866; 1872; 1888, 1898)*	424
7.	*Probleme propuse (2288—2315)*	435
8.	*Exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani (E:851—E: 862)*	438
9.	*Poşta redacţiei*	440
10.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	440

ANUL VII 8 AUGUST

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul VII * Nr. 8 august 1956

23 AUGUST — ZIUA ELIBERĂRII PATRIEI NOASTRE

SUB conducerea Partidului Muncitoresc Romîn poporul nostru a obţinut succese strălucite în construirea bazei economice a socialismului, în realizarea revoluţiei culturale în Statul nostru, Republica Populară Romînă. Nivelul de trai material şi cultural al poporului muncitor s-a ridicat necontenit. Pentru prima dată în istoria sa, poporul romîn, liber, îşi făureşte o viaţă fericită. El întîmpină cu noi realizări a 12-a aniversare a zorilor acestei vieţi libere şi fericite deschise patriei noastre la 23 August 1944 prin eliberarea de sub jugul fascist de către glorioasele armate sovietice, prin insurecţia armată organizată de Partidul Comunist Romîn, care a răsturnat dictatura militar-fascistă. Astfel au fost create acum 12 ani, premizele cuceririi puterii de către clasa muncitoare aliată cu ţărănimea muncitoare, şi a instaurării regimului democrat-popular, operă a poporului, adevăratul făuritor al istoriei.

Călăuziţi de partid, cu sprijinul frăţesc al Marii Uniuni Sovietice, oamenii muncii din ţara noastră, cimentînd bloc peste bloc, construiesc cu avînt revoluţionar socialismul.

Raportul de activitate al Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn la Congresul al II-lea al Partidului, subliniază marile înfăptuiri ale regimului nostru în domeniul economiei şi în cel social-cultural.

O industrie tînără dar viguroasă creşte şi se dezvoltă în patria noastră. Numai în Oltenia, Moldova, Dobrogea, Regiunea Autonomă Maghiară şi nord-vestul ţării au fost construite în anii primului cincinal 9 centrale electrice, 52 fabrici şi uzine de industrie grea, 19 mine, 33 întreprinderi de industrie uşoară şi alimentară. Producţia agricolă a ţării a fost sporită prin folosirea pe scară tot mai largă a mijloacelor mecanizate fabricate în ţară, în număr tot mai mare, prin introducerea metodelor avansate agrotehnice şi mai ales, prin dezvoltarea continuă a sectorului socialist în agricultură. Sarcina trasată de partid de a produce 10.000.000 t de grîu şi porumb a fost depăşită în 1955, cu 10 %. Drept urmare, nivelul de trai al oamenilor muncii din ţara noastră a crescut an de an.

In domeniul culturii realizările regimului nostru de democraţie populară sînt deosebit de importante. Lupta pentru lichidarea analfabetismului se încheie victorios. S-a înfăptuit generalizarea învăţămîntului elementar şi s-a pornit cu avînt pe drumul generalizării învăţămîntului de 7 ani, astfel încît pînă la finele actualului cincinal 90% din absolvenţii clasei a IV-a să fie cuprinşi în şcolile de 7 ani.

Paralel s-a dezvoltat învățămîntul mediu de cultură generală și s-a organizat învățămîntul superior conform nevoilor mereu crescînde, de cadre pentru producție. S-au creat școli pentru tineretul muncitoresc și sătesc și a luat ființă învățămîntul superior fără frecvență pentru oamenii din cîmpul muncii.

Recenta Hotărîre a Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn și a Consiliului de Miniștri cu privire la îmbunătățirea învățămîntului de cultură generală din R.P.R. deschide perspective noi progresului cultural în țara noastră. Prin măsurile ce decurg din această Hotărîre, conținutul realist-științific al învățămîntului se va ridica pe o treaptă superioară legîndu-se mai strîns de activitatea de construire a socialismului, de munca productivă. In aceste condiții o importanță deosebită are politehnizarea învățămîntului de cultură generală, în care scop — printre alte măsuri — se va acorda o deosebită atenție științelor fizice și chimice, precum și lărgirii orizontului de cunoștințe matematice ale absolvenților, prin introducerea în învățămîntul mediu a studiului geometriei analitice, al teoriei ecuațiilor, al calculului diferențial și integral.

Un factor de seamă care ilustrează progresele culturii în Statul nostru democrat-popular este avîntul cu care se dezvoltă cercetarea științifică precum și rezultatele importante obținute în acest domeniu. La baza acestor succese stă grija partidului și guvernului de a sprijini și îndruma munca științifică, de a-i acorda baza materială necesară. In afară de activitatea bogată desfășurată în institutele de cercetări ale Academiei R.P.R. și in institutele departamentale, în ultimii ani, s-a dezvoltat cercetarea științifică organizată în instituțiile de învățămînt superior.

Drept exemplificare a realizărilor în domeniul muncii științifice stă al patrulea Congres al matematicienilor romîni, ținut la București în acest an între 27 mai și 4 iunie, Congres la care au participat și numeroși matematicieni de seamă din alte țări. Lucrările prezentate de matematicienii noștrii au dovedit din plin nivelul ridicat al muncii lor. In special trebuie subliniat aportul însemnat al tinerilor noștri cercetători la lucrările Congresului și la avîntul activității matematice în țara noastră.

Directivele Congresului al II-lea al P.M.R. cu privire la cel de-al II-lea plan cincinal de dezvoltare a economiei naționale prevăd sarcini importante pentru învățămînt, printre care și sarcina ridicării nivelului de pregătire a absolvenților școlilor medii la științele fizico-matematice. De aceea cadrele didactice și elevii trebuie să depună eforturile necesare pentru ducerea la îndeplinire cu cinste a acestei sarcini. Ei trebuie să dovedească astfel că alături de ceilalți oameni ai muncii, din uzine și de pe ogoare, ei participă cu avînt și hotărîre la construirea socialismului în patria noastră, asigurîndu-i cadrele cu temeinică pregătire pentru dezvoltarea economiei și culturii. Succesele elevilor noștri în pregătirea lor la matematică și la fizică se vor reflecta în contribuția cu munca lor la producția țării, la înaintarea științei și tehnicii precum și în calitatea lucrărilor pe care le vor realiza.

Muncind cu rîvnă, tineretul școlar va dovedi dragostea pentru partidul nostru, îndrumătorul victoriilor poporului muncitor din scumpa noastră patrie, organizatorul eliberării poporului nostru la 23 August 1944 de sub dictatura militar-ascistă.

RĂDĂCINI COMUNE LA DOUĂ ECUAȚII

D. MIHALAȘCU
profesor, Pitești

1. În fizică, mecanică, astronomie și toate științele tehnice pe care le studiem, pentru găsirea unor date necesare vieții practice trebuie să rezolvăm adeseori o ecuație, și dacă nu putem găsi rădăcina exactă, se caută o valoare apropiată a rădăcinii. De fapt, la aceasta se reduce partea aplicativă a teoriei ecuațiilor algebrice și de aceea s-au căutat procedee pentru acest scop.

La rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice și a sistemelor de grad superior sîntem conduși uneori la aflarea rădăcinilor comune la două ecuații, atunci cînd există o astfel de rădăcină. Expunem mai jos diverse metode folosite pentru găsirea rădăcinilor comune precum și condițiile de posibilitate ale problemei.

Eliminarea unei necunoscute între două ecuații. — Să considerăm două ecuații algebrice în x de grade diferite m și n:

$$F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$
$$f(x) = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n = 0,$$

care admit o rădăcină comună $x = a$.

Să presupunem că am putut rezolva una din ecuații, de exemplu pe $F(x) = 0$ și am găsit valoarea rădăcinii comune în funcție de coeficienții A_0, A_1, A_2, ..., A_m ai ecuației. Fie această valoare a. Ea fiind rădăcină și pentru a doua ecuație $f(x) = 0$, rezultatul înlocuirii lui x cu a în $f(x)$ trebuie să fie nul, adică $f(a) = 0$. Deci, în cazul cînd ecuațiile au o rădăcină comună va exista o relație între coeficienții celor două ecuații, care a fost numită de Bézout, eliminantul sau rezultantul celor două ecuații, iar înlocuirea valorii lui x din prima ecuație într-a doua, se zice eliminarea lui x între cele două ecuații. De fapt, a elimina pe x între ecuațiile date înseamnă a scoate valoarea lui x dintr-o ecuație și a o înlocui în cealaltă.

Pentru eliminarea lui x între cele două ecuații sînt mai multe metode:

1) metoda lui Bézout și Euler,
2) metoda lui Sylvester,
3) metoda lui Cauchy,
4) metoda funcțiilor simetrice,
5) metoda celui mai mare divizor comun.

Aplicarea metodelor 1), 2), 3) și 4) necesită cunoașterea unor chestiuni speciale de matematici; aplicarea metodei 5) se poate face cu ajutorul cunoștințelor elementare.

I. Să considerăm, de exemplu, două ecuații de gradul întîi $ax + b = 0$ și $a'x + b' = 0$ și să eliminăm pe x între aceste două ecuații.

Se înmulțește prima cu $-a'$ și a doua cu a și se adună; se obține relația de condiție (eliminantul),

$$ab' - a'b = 0,$$

necesară pentru ca ecuațiile din care este dedusă să aibă o rădăcină comună.

II. Să considerăm două ecuații în x de gradul al doilea:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{și} \quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Să găsim relaţia între coeficienţii acestor două ecuaţii (eliminantul), pentru a avea o rădăcină comună (ceea ce revine la eliminarea lui x între cele două ecuaţii). Pentru aceasta înmulţim prima ecuaţie cu a' şi pe a doua cu a, le scădem şi avem:

$$(ab' - a'b)\, x + ac' - a'c = 0,$$

de unde

$$x = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Substituim această valoare a lui x în $ax^2 + bx + c = 0$. Facem calculele şi găsim rezultantul

$$(1) \qquad (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)\,(bc' - b'c) = 0.$$

Aceasta este condiţia necesară pentru ca ecuaţiile date să aibă o rădăcină comună.

Aplicaţie. — Se dau ecuaţiile:

$$x^2 - mx - 6 = 0,$$

$$x^2 + mx - 2 = 0.$$

Să se găsească valorile lui m pentru care ecuaţiile au o rădăcină comună.

Folosind relaţia (1) găsim:

$$(-2 + 6)^2 - (m + m)\,(2m + 6m) = 0; \quad m = \pm 1.$$

Deci, dacă $m=1$, avem rădăcina comună -2; dacă $m=-1$, rădăcina comună 2.

2. La relaţia (1) se putea ajunge folosind metoda generală a celui mai mare divizor comun a două polinoame.

Se numeşte cel mai mare divizor comun a două polinoame întregi, $F(x)$ şi $f(x)$, polinomul de gradul cel mai mare care divide deodată ambele polinoame. Dacă un astfel de polinom nu există, polinoamele $F(x)$ şi $f(x)$ se zic prime între ele.

Fie m şi n gradele polinoamelor $F(x)$ şi $f(x)$ $(m \geqslant n)$. Dacă $f(x)$ divide pe $F(x)$, atunci $f(x)$ este cel mai mare comun divizor al polinoamelor $F(x)$ şi $f(x)$.

Să presupunem că $f(x)$ nu împarte exact pe $F(x)$; fie C cîtul şi R restul împărţirii lui $F(x)$ prin $f(x)$, avem:

$$F(x) = Cf(x) + R,$$

R fiind o constantă sau un polinom de un grad mai mic decît al lui $f(x)$.

Se vede că polinoamele $F(x)$ şi $f(x)$ au aceiaşi divizori comuni ca şi $f(x)$ şi R, căci orice divizor al lui $F(x)$ şi $f(x)$ divide pe $F(x) - Cf(x)$, deci şi pe R, şi orice divizor al lui $f(x)$ şi R divide pe $f(x)$. $C + R$ sau pe $F(x)$. Polinomul R fiind de un grad mai mic ca $f(x)$, să împărţim pe $f(x)$ cu R. Fie C_1 cîtul şi R_1 restul, avem:

$$f(x) = RC_1 + R_1.$$

Dacă R_1 conţine pe x, fie R_2 restul împărţirii lui R cu R_1, apoi R_3 restul împărţirii lui R_1 prin R_2, etc. Gradele resturilor succesive micşorîndu-se, ajungem la un rest R_p care nu conţine pe x. Se pot întîmpla două cazuri:

a) $R_p = 0$; $F(x)$ şi $f(x)$ au aceiaşi divizori cu $f(x)$ şi R; aceştia au aceiaşi divizori cu R şi R_1; etc. Divizorii lui $F(x)$ şi $f(x)$ sînt deci aceiaşi ca şi divi-

zorii lui R_{p-2} și R_{p-1}. Dar R_{p-1} este polinomul de gradul cel mai mare care divide pe R_{p-2} și R_{p-1}, deci el este cel mai mare divizor comun al polinoamelor $F(x)$ și $f(x)$.

b) Dacă $R_p \neq 0$, orice divizor al lui $F(x)$ și $f(x)$ trebuie să dividă pe R_{p-2} și pe R_{p-1}, și deci pe R_{p-1} și R_p. Însă R_{p-1} și R_p neavînd divizor comun în x (R_p = constant), polinoamele $F(x)$ și $f(x)$ sînt prime între ele.

Aplicație. — Se dau polinoamele:

$$F(x) = x^4 - 3x^3 + 6x - 4 \quad \text{și}$$

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 13x + 2.$$

Să aflăm cel mai mare divizor comun al lor

	$x+3$	$-4x-13$	$-x+1$
x^4-3x^3+6x-4	$4x^3-15x^2+13x+2$	$-x^2+7x-10$	$x-2$
$4x^4-12x^3+24x-16$	$-4x^3+28x^2-40x$	x^2-2x	
$-4x^4+15x^3-13x^2-2x$	$13x^2-27x+2$	$5x-10$	

$3x^3-13x^2+22x-16$	$-13x^2+91x-130$	$x-2$	
$12x^3-52x^2+88x-64$	$64x-128$	$-x+2$	
$-12x^3+45x^2-39x-6$	$4x-2$	$=$	$=$
$-7x^2+49x-70$			

Observare. — Procedeul întrebuințat se numește *algoritmul lui* Euclid.

Am găsit cel mai mare divizor comun: un polinom de gradul întîi, $x-2$. Deci $x-2=0$ ne dă $x=2$ care este rădăcina comună. Cel mai mare divizor comun putea să fie de gradul al doilea și atunci aveam două rădăcini comune.

La aflarea celui mai mare divizor comun se pot evita coeficienții fracționari, făcînd unele simplificări de calcul.

Dacă primul termen al vreunui deîmpărțit parțial nu este divizibil prin primul termen al împărțitorului, se pot înmulți toți coeficienții deîmpărțitului printr-un număr ales potrivit.

Dacă toți coeficienții unui divizor sînt divizibili cu același număr, îi putem împărți cu acel număr.

În adevăr, la căutarea celui mai mare divizor comun ne interesează restul împărțirilor și nu cîtul, căci cel mai mare divizor comun este un rest; deci putem schimba cîtul.

De altă parte, cînd se înmulțește deîmpărțitul cu un factor constant, restul și cîtul se vor înmulți prin acel factor constant. Deci, înmulțind sau împărțind în cursul unei împărțiri, vreun rest parțial printr-un factor constant, cîtul se schimbă, iar restul întreg se înmulțește sau se împarte cu acel factor, ceea ce nu schimbă pe cel mai mare divizor comun decît cu un factor constant.

Aplicînd această metodă generală a celui mai mare divizor comun putem găsi eliminantul ecuațiilor:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

În șirul împărțirilor ultimul rest este

$$-(a'b - ab')(bc - bc')a' + a'(ac' - a'c)^2,$$

care trebuie să fie zero, Deci,

$$-(a'b - ab')(b'c - bc')a' + a'(ac' - a'c)^2 = 0.$$

Deoarece $a' \neq 0$, se poate simplifica cu a' și avem:

$$(ac' - a'c)^2 - (a'b - ab')(b'c - bc') = 0.$$

Aplicație. — Se dau ecuațiile:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{și} \quad x^2 - 2x + a = 0,$$

să se determine valoarea lui a astfel ca ecuațiile să aibă o rădăcină comună.

Prin metoda celui mai mare divizor comun se găsește eliminantul

$$a^3 + 8a^2 - 18a + 9 = 0,$$

care are rădăcinile $a = 1$; $a = \dfrac{-9 + 3\sqrt{5}}{2}$; $a = \dfrac{-9 - 3\sqrt{5}}{2}$.

3. — Să considerăm un sistem de gradul al doilea de două ecuații cu două necunoscute:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h = 0, \\ f_1(x,y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + h' = 0. \end{cases}$$

Dacă notăm: $a = A$; $by + d = B$; $cy^2 + ey + h = C$; $a' = A'$; $b'y + d' = B'$; $c'y^2 + e'y + h' = C'$, ecuațiile date iau forma:

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax^2 + Bx + C = 0, \\ A'x^2 + B'x + C' = 0. \end{cases}$$

Eliminînd pe x obținem:

$$(3) \qquad (AC' - A'C)^2 - (AB' - A'B)(BC' - B'C) = 0.$$

Acest rezultant al ecuațiilor (2) este de gradul al patrulea în y.

Fie y_0 o rădăcină a ecuației (3). Înlocuind pe y prin y_0, ecuațiile (2) vor avea în general o rădăcină comună dată de ecuația de gradul întîi

$$(4) \qquad (AB' - A'B)x + (AC' - A'C) = 0,$$

în așa fel încît sistemul dat are în general patru soluții.

Discuție. — Coeficientul lui y^4 în ecuația (3) este:

$$r = (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c).$$

Dacă $r \neq 0$, adică dacă formele patratice

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{și} \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2$$

n-au nici un factor liniar comun, ecuația (3) este de gradul patru.

Presupunînd $r \neq 0$, coeficienţii A şi A', adică a şi a', nu sînt ambii nuli. Dacă y_0 este o rădăcină simplă a ecuaţiei (3), coeficientul $AB' - A'B \neq 0$ adică,

$$(ab' - b'a)\, y_0 + ad' - da' \neq 0.$$

Într-adevăr, dacă am presupune că y_0 este rădăcină a ecuaţiei $AB' - A'B = 0$ şi cum A şi A' nu sînt ambii nuli, vom avea pentru $y = y_0$, $BC' - B'C = 0$ în aşa fel, încît $AB' - A'B$, $AC' - A'C$ $BC' - CB'$, fiind divizibile fiecare prin $(y - y_0)$, primul membru al ecuaţiei (3) ar fi divizibil prin $(y - y_0)^2$ şi în consecinţă, y_0 ar fi rădăcină dublă a ecuaţiei (3), ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă de aci că unei rădăcini simple y_0 a ecuaţiei (3) îi corespunde o singură rădăcină x_0 comună ecuaţiilor (2) şi prin urmare, o singură soluţie (x_0, y_0) a sistemului (1) dat.

Deci rezumînd, dacă $r \neq 0$ şi ecuaţia (3) are patru rădăcini simple y_1, y_2, y_3, y_4, fiecăreia din ele îi corespunde o singură valoare a lui x, ceeace dă x_1, x_2, x_3, x_4 şi sistemul dat admite patru soluţii (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4).

Dacă două sau mai multe din rădăcinile y_1, y_2, y_3, y_4 devin egale, de exemplu, dacă $y_1 = y_2$, se poate întîmpla ca $x_1 = x_2$ sau ca $x_1 \neq x_2$, în aşa fel încît două soluţii pot coincide, dar vom avea întotdeauna cel mult patru soluţii. Dacă ecuaţia (3) îşi coboară gradul, un anumit număr de rădăcini ale ei devin infinite. Vom spune în acest caz, că sistemul (1) are tot atîtea soluţii infinite. Dacă în ecuaţia (3) coeficienţii lui y^4 şi y^3 sînt nuli, iar coeficientul lui $y^2 \neq 0$, atunci ecuaţia (3) are o rădăcină infinită dublă.

Să examinăm cazul în care ecuaţia (3) dispare identic, adică toţi coeficienţii săi sînt nuli; atunci oricare ar fi valoarea atribuită lui y, ecuaţiile (2) au cel puţin o rădăcină comună. Acest caz se subdivide în mai multe altele:

1° Presupunem că orcare ar fi y, avem $AB' - BA' \equiv 0$. Identitatea (3) dă $AC' - CA' \equiv 0$.

Presupunînd că A şi A' nu sînt ambii nuli, concludem că $BC' - CB' \equiv 0$. Atunci ecuaţiile (2), de gradul al doilea în x, au coeficienţii lor proporţionali oricare ar fi valoarea lui y. Deducem imediat că coeficienţii ecuaţiilor (1) sînt proporţionali; sistemul propus se reduce la o singură ecuaţie şi admite prin urmare, o infinitate de soluţii.

Dacă $a = a' = 0$, ecuaţia (4) dispare identic şi ecuaţiile (2) se reduc la gradul întîi; dacă $BC' - CB' \equiv 0$, ajungem la concluzia de mai sus, ecuaţiile (1) se reduc la una singură. Dacă identitatea $BC' - CB' \equiv 0$ nu se verifică, scriind că ecuaţiile (2) au o soluţie comună, vom avea de rezolvat ecuaţia $BC' - CB' = 0$, care este de gradul al treilea în y; discuţia ei se face fără dificultate. În privinţa aceasta se poate vedea G.M.F. nr. 7/1955, articolul «Ecuaţia de gradul al treilea».

2° Presupunem acum, că $AB' - BA' = (ab' - ba')\, y + ad' - da'$ nu este identic nulă şi presupunem încă, $ab' - ba' \neq 0$. Punem:

$$y_0 = -\frac{ad' - da'}{ab' - ba'}.$$

Ecuaţia (3) fiind o identitate, avem:

$$(5) \qquad (AC' - CA')^2 \equiv (AB' - A'B)(BC' - BC').$$

Dar $AB' - A'B \equiv (ab' - a'b)(y - y_0)$; prin urmare $(AC' - A'C)^2$ se anulează cînd $y = y_0$, de unde rezultă că $AC' - CA'$ se divide prin $y - y_0$. De aci rezultă că ecuaţia (4) are forma:

$$(y - y_0)[(ab' - ba')x + my + p] = 0;$$

m şi p fiind constante.

Fie y_1 un număr diferit de y_0; ecuaţiile (2) admit soluţia $y = y_1$; $x = -\dfrac{my_1 + p}{ab' - ba'}$, deci, $f(x, y_1)$ şi $f_1(x, y_1)$ se divid prin $(ab' - a'b)x + my_1 + p$ şi cum aceasta este adevărat pentru o infinitate de valori ale lui y_1, avem:

$$f(x, y) \equiv [(ab' - ba')x + my + p](\alpha x + \beta y + \gamma),$$

$$f_1(x, y) \equiv [(ab' - ba')x + my + p](\alpha' x + \beta' y + \gamma').$$

Astfel, sistemul (1) se descompune în două sisteme dintre care unul este format de o singură ecuaţie:

$$(ab' - ba')x + my + p = 0$$

iar celălalt este:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma = 0.$$

Dacă (x_1, y_1) este soluţia ultimului sistem, se vede că $y_1 = y_0$.

Presupunem $ab' - ba' = 0$, $ad' - da' \neq 0$; ecuaţia (3) fiind mereu o identitate, coeficientul lui y^4 egal cu $ac' - ca'$ trebuind să fie nul, ecuaţia (4) se reduce la:

$$(ad' - da')x + (ae' - ea')y + ah' - ha' = 0. \tag{6}$$

Oricare ar fi valoarea lui y ecuaţiile (2) au cel puţin o rădăcină comună dată de ecuaţiile (6). Se deduce că $f(x, y)$ şi $f_1(x, y)$ se divid prin $(ad' - da')x + (ae' - ea')y + ah - ha'$ şi că prin urmare, sistemul (1) are o infinitate de soluţii.

În rezumat: un sistem de două ecuaţii de gradul al doilea cu două necunoscute nu are decît cel mult patru soluţii, sau are o infinitate, această ultimă situaţie prezentîndu-se dacă cele două ecuaţii au coeficienţii proporţionali sau dacă primii membri ai acestor ecuaţii sînt produse de factori liniari avînd un factor comun.

4. *Aplicaţii.* Să rezolvăm pe această cale, un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute de gradul al doilea, asemănător cu exerciţiile 714, 716 din Culegerea de probleme de algebră pentru clasele VIII-X, ediţia 1953.

Să se rezolve sistemul:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 0,$$

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -y^2 - 1,$$

$$A' = 1, \quad B' = -2, \quad C' = y^2 - 2y + 1.$$

Formăm relaţia (3) pagina (398) şi obţinem ecuaţia în y, adică eliminantul ecuaţiilor (2):

$$y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 2y = 0,$$

$$y(y^3 - 2y^2 + 2y - 2) = 0.$$

Deci, avem $y = 0$ — o rădăcină, şi alte trei rădăcini date de ecuaţia:

$$\varphi(y) = y^3 - 2y^2 + 2y - 2 = 0,$$

$$\varphi(1) = -1 \quad ; \quad \varphi(2) = +2,$$

deci, avem o rădăcină între 1 şi 2 şi anume, $y = 1{,}6$ celelalte două rădăcini ale ecuaţiei în y sînt complexe. Valorile lui x sînt date de ecuaţia obţinută, scăzînd prima din a doua,

$$y^2 - x - y + 1 = 0.$$

Înlocuind în această ecuaţie cele patru valori ale lui y, avem patru valori pentru x, deci avem soluţiile:

$$M_1(x = 1 \text{ şi } y = 0), \quad M_2(x = 1{,}96 \text{ şi } y = 1{,}6)$$

Celelalte două perechi au valori complexe. Deci ecuaţiile date admit patru sisteme de soluţii.

Dacă construim curbele reprezentate de ecuaţiile date: prima $x^2 - y^2 = 1$ reprezintă o hiperbolă echilaterală ale cărei asimptote sînt bisectoarele axelor care taie axa Ox în punctele (1,0) şi (−1,0).

Ecuaţia $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ reprezintă un cerc cu centrul în punctul (1, 1) cu raza 1, tangent la axele de coordonate. Aceste curbe se taie numai în două puncte de intersecţie, deci ecuaţiile au numai două sisteme de valori reale pentru x şi y, care sînt coordonatele punctelor de intersecţie ale celor două curbe.

ENERGIA ATOMICĂ ÎN TEHNICĂ

În ultimii ani lucrările privind utilizarea energiei atomice în scopuri paşnice au căpătat o mare amploare. Într-un interval de timp relativ scurt, fizica nucleară a reuşit să fie aplicată pe scară largă în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii.

În ştiinţele tehnice cercetările se dezvoltă în trei direcţii principale: utilizarea energiei atomice pentru producerea energiei electrice, utilizarea proprietăţii de pătrundere a radiaţiilor radioactive şi utilizarea izotopilor radioactivi ca atomi marcaţi.

Utilizarea energiei nucleare pentru producerea energiei electrice

Obţinerea energiei electrice pe baza utilizării energiei nucleare a fost inaugurată, după cum se ştie, prin construirea şi punerea în funcţiune în U.R.S.S a primei staţiuni electrice industriale din lume. Staţiunea atomo-electrică a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. cu o putere utilă de 5000 kW est exploatată cu succes şi dă curent pentru industria şi agricultura raioanelor învecinate.

În afară de aceasta, la staţiunea atomo-electrică se fac cercetări privind adunarea materialului ştiinţific şi experimental necesar pentru proiectarea şi construirea unor staţiuni atomo-electrice mari.

În staţiunea atomo-electrică energia electrică este produsă de un generator pus în mişcare de o turbină. Aburul cu ajutorul căruia se pune în mişcare turbina se formează pe seama căldurii degajate în procesul de fisiune al uraniului într-un reactor nuclear. Elementele principale ale staţiunii atomo-electrice sînt: reactorul nuclear, turbogeneratorul, generatorul de abur (schimbătorul de căldură). Schema de principiu a interacţiunii acestor agregate este reprezentată în fig. 1. Ea constă din două circuite: primul circuit este între schimbătorul de căldură şi turbină. Apa din primul circuit încălzită în canalele reactorului nuclear pînă la o temperatură de 260—270°, cedează căldura sa prin schimbătorul de căldură apei din al doilea circuit. După cedarea căldurii apa din primul circuit părăseşte generatorul de abur la o temperatură de 190° şi ajunge la linia de aspiraţie a principalelor pompe de circulaţie. Alimentarea cu apă a primului circuit, se face cu ajutorul unor pompe speciale.

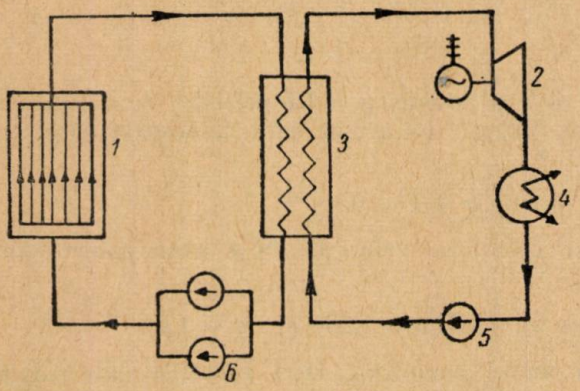


Fig. 1.— Schema de principiu a staţiunii atomo-electrice: *1* — reactorul cu uraniu şi grafit; *2* — turbogeneratorul; *3* — schimbătorul pe căldură (generatorul de abur); *4* — condensatorul; *5* — pompă de alimentare; *6* — pompe de circulaţie.

Pentru a feri conductele turbinei acestui circuit de oscilaţiile mari ale presiunii datorită variaţiei de temperatură a apei, în el sînt instalate compensatoare de volum în care se menţine o presiune constantă de 100 atm, cu ajutorul aerului comprimat.

Apa din circuitul secundar se pompează cu ajutorul pompelor de alimentare în preîncălzitorul generatorului de abur şi apoi ajunge în evaporator. Aburul din evaporator pătrunde într-un supraîncălzitor de abur. La puterea nominală a staţiunii, trei grupe de generatoare de abur produc un debit de 40 tone abur pe oră, la o presiune de 12,5 atm şi la o temperatură de 255—260°. Mai departe, aburul este dirijat printr-o conductă în turbogenerator.

Baza staţiunii atomo-electrice este reactorul cu uraniu şi grafit (fig. 2) care funcţionează cu uraniu îmbogăţit (5% uraniu 235).

În zona activă a reactorului există orificii verticale — canalele de lucru, canalele pentru barele de reglaj şi barele pentru avarii. În canalele de lucru se aşază tuburi în pereţii cărora se află uraniul, iar în interiorul tuburilor circulă apă. În procesul de fisiune uraniul se încălzeşte şi cedează căldură apei care circulă în tuburi. Numărul canalelor de lucru este de 128, barele de uraniu din ele se înlocuiesc pe măsura consumării substanţei fisionabile. Numărul barelor de reglaj este de 22; dintre acestea 4 sînt prevăzute pentru menţinerea puterii reactorului la nivelul dat, 2 sînt bare pentru avarii, iar 18 bare servesc pentru compensarea arderii izotopului de uraniu care suferă fisiunea în timpul funcţionării reactorului. Poziţia barelor la un nivel dat al puterii, este determinată de impulsul obţinut de la camerele de ionizare situate în jurul reactorului.

Barele de reglaj se deplasează automat cu ajutorul unui motor electric comandat de la pupitrul central al staţiunii electrice.

Stratul de grafit al reactorului este aşezat într-un cilindru de oţel închis ermetic, ceea ce permite crearea in interiorul lui a unei atmosfere de gaz inert, favorabilă pentru grafit. Pentru a feri personalul de deservire de acţiunea vătămătoare a radiaţiilor, reactorul este înconjurat de un strat de protecţie compus dintr-o pătură de apă cu o grosime de 1 m, care absoarbe, în special, neutronii expulzaţi din reactor; urmează apoi, un strat de beton de 3 m grosime, şi un perete de fontă gros de 250 mm, care absoarbe razele gama.

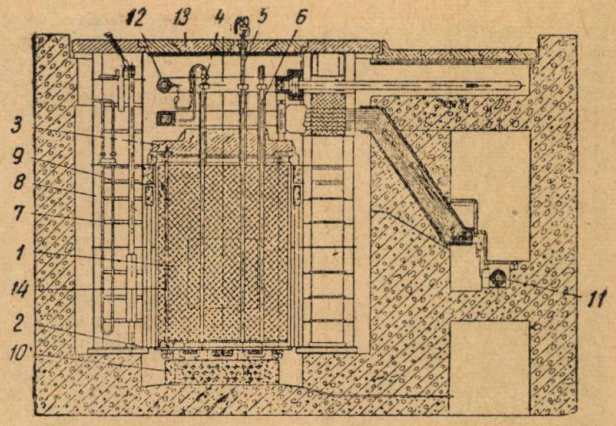


Fig. 2. — Reactorul staţiunii atomo-electrice:
1 — zidul reactorului; *2* — placa inferioară; *3* — placa superioară; *4* — canalul de lucru; *5* — canalul pentru protecţie împotriva avariilor; *6* — canalul pentru reglare automată; *7* — canalul camerii de ionizare; *8* — protecţie laterală (apă); *9* şi *10* — frigidere; *11* — colectorul de distribuţie; *12* — colectorul de adunare; *13* — protecţia superioară (fontă); *14* — coloana răcită a reflectorului.

Staţiunea atomo-electrică este aşezată în trei clădiri: în prima clădire se găseşte reactorul nuclear, schimbătoarele de căldură, pompele de circulaţie şi utilaj atît pentru deservirea reactorului, cît şi pentru efectuarea cercetărilor ştiinţifice şi inginereşti. În a doua clădire sînt aşezate: turbina cu abur împreună cu condensatorul şi generatorul ei electric, codensatorul de pornire şi alt utilaj legat de funcţionarea acestora, precum şi dispozitivele electrice de distribuţie. A treia clădire conţine dispozitivele de ventilaţie pentru evacuarea aerului în straturile superioare ale atmosferei. Întreaga comandă a utilajului staţiei se face de la un pupitru central. Pentru asigurarea securităţii personalului faţă de iradiaţii, în toate clădirile staţiunii sînt aşezate camere de ionizare pentru măsurarea radiaţiei gama şi o instalaţie de captare a aerului pentru controlul radioactivităţii acestuia.

Experienţa de exploatare a staţiunii atomo-electrice reprezintă o bază reală pentru dezvoltarea energeticii atomice. Ea va ajuta la îndeplinirea sarcinilor puse în directivele congresului al XX-lea al PCUS cu privire la cel de-al 6-lea plan cincinal de dezvoltare a economiei naţionale a U.R.S.S., pe anii 1956—60: « Se vor construi în decursul anilor 1956—60, staţiuni atomo-electrice cu o putere totală de 2—2,5 milioane kW. Construirea staţiunilor atomo-electrice se va face în primul rînd, în raioanele care nu au o bază proprie de combustibil ».

Utilizarea proprietăţii penetrante a radiaţiilor radioactive

Penetrabilitatea radiaţiei izotopilor radioactivi se utilizează pe scară largă pentru detectarea defectelor în piesele de metal, în studiul repartiţiei elementelor în metale şi aliaje, în procesele metalurgice, în construcţii de aparate, în construcţii de maşini etc.

În construirea mașinilor care suportă mari sarcini statice și dinamice cum sînt: motoarele reactive, turbinele, avioanele, cazanele de abur, la sudura metalelor etc., sînt necesare metode sigure de control ale calității pieselor. Un mare interes pentru industrie îl prezintă metodele care permit realizarea unui control fără a distruge piesa fabricată. Astăzi, în industria sovietică se utilizează două metode de defectoscopie gama: fotografică și de ionizare. Metoda fotografică este cea mai răspîndită în controlul industrial datorită intuitivi-

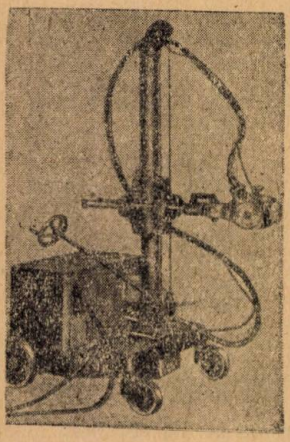


Fig. 3. — Aparatul gama pentru defectoscopia metalelor GUP—Co—50.

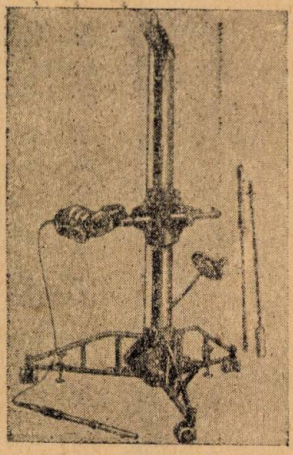


Fig. 4. — Aparatul gama pentru defectoscopia metalelor GUP—Co—0,5.

Fig.5.—Fotografie gama a unei piese turnate din fontă de o grosime de 30 mm. Petele albe de pe fotografie indică sufluri în interiorul piesei.

tății și obiectivității rezultatelor care se obțin. Metoda de ionizare este mai puțin sensibilă la detectarea defectelor în materialul iluminat, ea are posibilități mai mici în ce privește determinarea caracterului defectelor decît metoda fotografică, în schimb, avantajul ei constă în viteza controlului. Această metodă este aplicabilă pentru verificarea anumitor piese în producția de serie.

În fig. 3 și 4 se dau fotografiile unor aparate pentru defectoscopie gama folosite pe scară largă în industria sovietică. Ca sursă de radiații gama servește izotopul radioactiv Co—60. Aceste aparate sînt comode pentru lucru și asigură o bună protecție a personalului față de acțiunea vătămătoare a razelor gama.

Tot atît de mult se utilizează și containere transportabile speciale prevăzute mai ales pentru iluminarea cu raze gama a cusăturilor de sudură ale tuburilor și ale unor piese turnate din oțel, de grosimi mici.

În fig. 5 este reprezentată o fotocopie a unei fotografii gama a unei piese turnate de fontă cu o grosime de 30 mm. Se văd clar defectele interne: sufluri formate în piesa de fontă în timpul turnării ei.

În fig. 6 este reprezentată curba aproximativă a defectelor descoperite prin metoda de ionizare, într-un metal cu o grosime de 280 mm. Pe axa ordonatelor s-a notat numărul de înregistrări ale unui contor — număr proporțional cu intensitatea radiației gama care a traversat oțelul — iar pe axa absciselor, distanța cu care s-a deplasat defectoscopul gama de ionizare de-a lungul obiec-

tului cercetat. Vîrfurile de pe curbă indică existența defectelor, a suflurilor și a incluziunilor aflate în interiorul metalului. Această metodă permite să se determine cu anumită aproximație, forma și dimensiunile defectului.

Utilizarea izotopilor radioactivi în defectoscopia metalelor contribuie la mărirea calității produselor industriale. Posibilitatea ușoară de transport

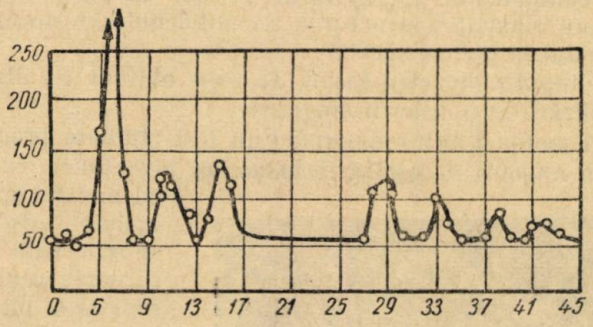


Fig. 6. — Forma aproximativă a curbei defectelor descoperite prin metoda de ionizare într-o piesă de metal cu o grosime de 280 mm.

simplitatea în manipulare, posibilitatea de a folosi radiația în orice timp și în orice condiții fac ca această metodă să fie în multe cazuri de neînlocuit. Perfecționarea continuă a metodei de defectoscopie gama, folosirea razelor beta și a neutronilor, vor ajuta să se pună la punct și mai bine, controlul calității pieselor turnate și sudate nu numai din metal, ci și din alte materiale.

La presiuni și temperaturi mari distrugerea metalelor și aliajelor se face fie prin deformare plastică, fie prin formarea și dezvoltarea fisurilor. De aceea este foare important să cunoaștem caracterul repartizării componentelor în diferite aliaje metalice, în piese turnate, în piese de oțel, în cusături de sudură etc. Pentru rezolvarea acestei probleme importante a fost elaborată în ultimul timp, și larg aplicată, metoda autoradiografiei bazată pe utilizarea interacțiunii dintre radiația radioactivă și o emulsie fotografică. În aliajul care urmează să fie cercetat se introduce o anumită cantitate din izotopul radioactiv al elementului din aliaj a cărui repartiție printre celelalte componente trebuie stabilită. Realizînd un contact între suprafața șlefuită a aliajului și emulsia fotografică, pe pelicula fotografică se obține, după expunere și developare, o imagină negativă a repartiției elementului radioactiv în aliaj. În fig. 7 este dată autoradiografia care arată modul în care viteza de cristalizare influențează repartiția wolframului într-un aliaj de nichel. Studiul fotografiei arată că o viteză mare de cristalizare (răcirea metalului lichid în apă) duce la o repartiție mai uniformă a elementului de

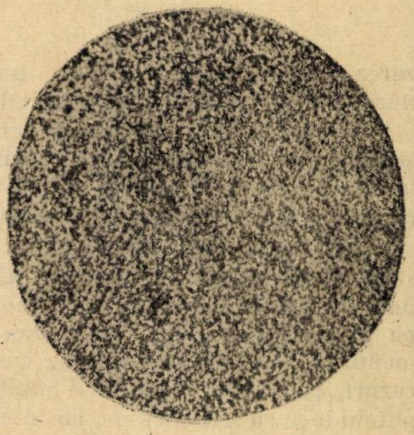


Fig. 7. — Influența vitezei de cristalizare asupra repartiției wolframului într-un aliaj de nichel prin răcire rapidă; (mărire de 400 ori);

aliere în comparaţie cu o cristalizare înceată (răcirea metalului lichid într-un cuptor încălzit).

În fig. 8 este reprezentată microstructura oţelului turnat obţinut dintr-o porţiune a probei, cu o mărire de 100 de ori. Metoda autoradiografiei ne permite să detectăm concentraţia unui element sau a altuia în diferite faze ale sistemelor cu mai multe componente. Cu ajutorul acestei metode s-au obţinut date interesante asupra repartiţiei structurale a molibdenului, fosforului, carbonului, sulfului şi cromului în oţeluri speciale.

Folosind izotopul radioactiv fosfor 32, s-au obţinut rezultate importante în studiul cristalizării lingourilor în lingotiere.

Cu ajutorul metodei autoradiografiei au fost studiate procese importante ca: repartiţia în lingouri de oţel a inclusiunilor nemetalice, care ajung odată cu metalul în timpul turnării oţelului, mişcarea metalului şi repartiţia elementelor în turnarea centrifugă a tuburilor şi a pieselor conţinînd tuburi, distribuţia elementelor într-o cusătură de sudură. Rezultatele acestor cercetări se folosesc chiar de pe acum în industrie.

Fig. 8. — Oţel turnat cu 0,33% C microstructură (mărire de 100 ori).

Perfecţionarea mai departe a autoradiografiei şi lărgirea domeniului ei de aplicaţii va permite aprofundarea microstructurii şi a structurii compuşilor cu mai multe componente nu numai din metal, ci şi din alte materiale, va permite realizarea unor condiţii adecuate pentru elaborarea şi crearea unor materiale durabile şi economice pentru industrie.

Complexitatea proceselor tehnologice în producţia industrială modernă şi tendinţa de automatizare maximă au mărit brusc condiţiile care se cer de la aparatajul de control şi de măsurat, atît în ceea ce priveşte precizia şi siguranţa, cît şi în ce priveşte posibilitatea efectuării unor măsurători fără contact.

Utilizarea radiaţiilor radioactive a deschis noi posibilităţi pentru construirea aparatelor de control, atît pentru controlul diferiţilor parametri tehnologici, cît şi al proceselor tehnologice în ansamblul lor. Aparatele construite pe principiul absorbţiei şi difuziei radiaţiilor radioactive, precum şi pe fenomenul de ionizare al unui gaz cu particule alfa, permit să rezolvăm în multe cazuri, problema controlului mult mai uşor, mai precis şi mai sigur, decît o putem face cu alte metode, iar în unele cazuri acest principiu este unicul posibil.

În ultimii ani, lucrările ştiinţifice de cercetări în acest domeniu cresc în mod continuu. Savanţii şi inginerii sovietici au obţinut succese serioase în construcţia aparatelor pentru măsurători fără contact a grosimii unei benzi de metal în timpul laminării, a neuniformităţilor unei benzi de bumbac şi a greutăţii unei benzi de hîrtie, a grosimii pereţilor tuburilor, a densităţii mediilor lichide şi gazoase, a nivelelor unui lichid sau a altor medii în vase deschise sau ermetic închise, precum şi a aparatelor pentru numărarea diferitelor obiecte

care se mişcă pe banda rulantă, pentru măsurarea grosimii depunerilor pe diferite suprafeţe etc.

Astfel, nivelmetrul industrial permite o măsurare continuă la distanţă a nivelului unui lichid într-un vas sau rezervor, a nivelului de încărcare al vagonului cu cărbune, minereu, cereale, precum şi înregistrarea şi reglarea nivelului, — fără a pătrunde în interiorul obiectului şi fără un contact cu mediul măsurat. Ca obiecte de măsurat pot fi: autoclava, cisterna, conducta tubulară, vagonetele cu cărbune sau minereu, elevatorul, vagonul de cale ferată etc. Parametrul controlat poate fi nivelul sau suprafaţa de separaţie a două medii, precum şi nivelul convenţional al lichidelor în fierbere sau în efervescenţă.

Un alt aparat, densimetrul universal, de utilizare industrială — permite o măsurare continuă la distanţă, o înregistrare şi un reglaj al densităţii diferitelor lichide, fără a pătrunde în interiorul obiectului de măsurat şi fără contact cu mediul măsurat.

Cu ajutorul manometrului de ionizare se poate măsura şi înregistra de la distanţă şi în mod continuu, presiunea gazelor şi vaporilor rarefiaţi.

În fig. 9 este reprezentat un contor radioactiv pentru obiectele mobile (diferite piese de metal şi de alte materiale care se mişcă pe o bandă rulantă, vagoane de cale ferată, vagoanele de cărbune şi de minereuri, în industria minieră etc.) Astfel de aparate înregistrează numărul de întreruperi ale radiaţiilor radioactive de către obiectele care se mişcă pe bandă rulantă. Instalarea unor astfel de contori poate îmbunătăţi sensibil controlul proceselor tehnologice în industrie şi poate înlocui munca omului.

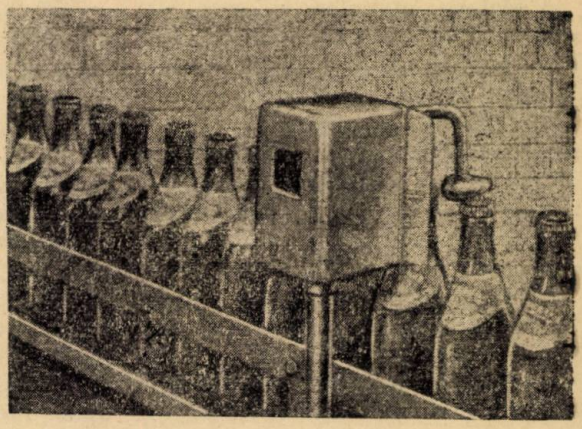


Fig. 9. — Contor radioactiv de obiecte.

Multe din aceste aparate se utilizează pentru controlul proceselor tehnologice din ramura metalurgică, chimică, textilă şi alte ramuri ale industriei. Principiile de construcţie, precizia, simplitatea şi siguranţa în exploatare a utilajului bazat pe utilizarea radiaţiilor radioactive permit folosirea lor şi într-o serie de alte ramuri ale industriei: construcţii de maşini, industrie uşoară, transporturi pe cale ferată, transporturi fluviale, industria de petrol, în tehnica minieră etc. Trebuie aplicate noile realizări ale ştiinţei în automatizarea şi controlul proceselor tehnologice. Directivele Congresului al XX-lea al PCUS subliniază importanţa dezvoltării multilaterale a cercetărilor ştiinţifice cu privire la aparatele şi aplicaţiile lor în industrie, în special pentru controlul şi reglajul proceselor tehnologice.

În industria sovietică se utilizează pe scară largă şi radiaţia gama secundară care apare în urma captării neutronilor de către nucleele elementelor ce intră în compoziţia rocilor. Industria extracţiei petrolului aplică cu succes metodele radioactive de prospecţiune a zăcămintelor de petrol. În ultimii ani, în practica geofizică se utilizează analiza compoziţiei rocilor într-o secţiune a sondelor bazată

pe înregistrarea gama-activității induse prin neutroni. Cu ajutorul acestei metode este posibil să se determine net contactul dintre apă și petrol.

Un alt pas important în cercetările din această direcție este o utilizare mai largă a metodelor neutronice de prospecțiune a cărbunelui și a minereurilor, cum sînt: borul, manganul, cobaltul, wolframul, mercurul etc.

Aplicațiile metodei izotopilor radioactivi

Atomii cu greutăți atomice și radioactivități diferite, însă cu același număr atomic și proprietăți chimice identice, au căpătat denumirea de izotopi. Cu ajutorul unor aparate speciale ei pot fi întotdeauna descoperiți printre atomii neradioactivi ai unui element chimic obișnuit. O altă greutate atomică și o altă radioactivitate « marchează» oarecum acești atomi: de aceea ei au căpătat denumirea de « atomi marcați ».

Metoda atomilor marcați devine tot mai accesibilă și permite să se rezolve repede și exact, multe probleme tehnice importante între care și problemele care nu au putut fi rezolvate prin alte mijloace. Astfel, în metalurgie această metodă se folosește pe scară largă pentru determinarea funcțiilor termodinamice și pentru studiul cineticii reacțiilor, al mecanismului de solidificare al oțelului în lingotiere, pentru studiul incluziunilor nemetalice în oțel. În industrie, cu ajutorul izotopilor radioactivi s-a clarificat influența diferiților factori asupra mișcării materialelor și gazelor în furnale înalte, s-a determinat viteza formării zgurii în impurificarea oțelului cu incluziuni nemetalice în cuptoare electrice și în timpul turnării.

Măsurînd presiunea vaporilor unei soluții oarecare se determină activitatea termodinamică a componentelor ei. Atomii marcați se folosesc și pentru studiul variației conținutului de impurități în oțel și fontă. Analiza chimică cu ajutorul metodelor vechi nu dă rezultate exacte dacă concentrația fosforului sau a sulfului este mică. Numai în urma folosirii izotopilor radioactivi s-a putut studia mecanismul formării zgurii în timpul șarjei de oțel în cuptoare Martin și viteza de topire în ele a oțelului vechi (pentru retopire). Izotopul radioactiv al fierului a fost introdus sub formă de oxid în minereul cu care s-a încărcat cuptorul. S-a găsit că minereul de fier cu impurități de calcar nu ia parte la procesul de defosforare.

Pentru a obține oțel cu un conținut minim de incluziuni nemetalice este foarte important să obținem date sigure asupra originii acestor incluziuni. Este aproape imposibil să stabilim sursa incluziunilor nemetalice — oxizi — prin metoda analizei chimice sau metalografice. Utilizarea indicatorilor radioactivi permite « marcarea » materialelor cu care vine în contact oțelul în procesul de producție și astfel, se poate stabili influența fiecărei surse în parte asupra impurificării metalului cu incluziuni nemetalice.

Studiul mișcării materialelor de încărcături pentru cuptorul înalt și al gazelor în cuptorul înalt, este direct legat de descoperirea mijloacelor de mărire a productivității lor. Viteza de mișcare a gazelor în cuva furnalului înalt a fost studiată cu ajutorul radonului. În multe uzine metalurgice din U.R.S.S., indicatorii radioactivi sînt folosiți și pentru controlul uzurii căptușelii refractare a cuptoarelor înalte. Folosirea izotopilor radioactivi pentru studiul legilor uzurii metalelor permite urmărirea uzurii mai multor organe simultan în procesul de exploatare al mașinilor, fără a le opri sau demonta. Esența metodelor de control al uzurii constă în activarea organelor studiate și în înregistrarea radioactivității unsorilor. Au fost studiate organe de mașini ale motoarelor de

avion, de automobil şi de tractor (inelele pistonului, cuzineţii, pistoanele, roţile dinţate etc.). Cu ajutorul laboratorului mobil s-a studiat influenţa prafului din aer asupra uzurii inelelor de piston ale motorului în mers, în cîteva raioane ale ţării. În urma cercetărilor s-a stabilit că cantitatea de praf din aer variază în timpul mersului automobilului, în medie de la 70 mg/m^3 la 1000mg/m^3 în spaţiul de sub capota automobilului în faţa filtrului de aer. Instalarea unui nou filtru de aer a micşorat uzura inelelor de piston de 3—4 ori.

Cercetările rezistenţei la uzură a diferitelor materiale şi a inelelor de piston ale unui motor de tractor pentru diferite cantităţi de praf în ulei, au arătat că durata de funcţionare a organelor de maşini depinde de compoziţia şi proprietăţile fizice ale prafului.

Cu ajutorul izotopilor radioactivi se fac cercetări referitoare la acţiunea corosivă a uleiurilor industriale asupra organelor laminoarelor, lămurindu-se mecanismul de acţiune al aditivelor anticorosive care se adaugă la uleiurile de motor. Metoda izotopilor radioactivi se foloseşte cu succes şi în industria extracţiei de petrol, pentru studiul stării tehnice a ţiţeiului.

Metoda atomilor marcaţi se aplică pe scară largă în practica cercetărilor ştiinţifice şi în domeniul tehnicii. Cercetările ştiinţiice efectuate cu ajutorul ei dau chiar de pe acum o contribuţie preţioasă în ştiinţă şi tehnică. Această metodă ne dă posibilitatea să aprofundăm cunoştinţele asupra fenomenelor şi proceselor complicate care au loc în natură şi tehnică.

În al şaselea plan cincinal lucrările privind folosirea paşnică a energiei atomice în economia naţională socialistă şi în cercetările ştiinţitice vor căpăta o şi mai mare amploare. Savanţii şi inginerii sovietici vor folosi pe deplin posibilităţile largi şi experienţa căpătată în folosirea rezervelor inepuizabile ale nucleului atomic, pentru progresul ţării sovietice.

După **M. S. Fomicev**
Priroda 3.1956

DIN ISTORIA MATEMATICII

DESPRE CONICE

A. TÓTH,
conferenţiar la Universitatea „Bolyai" Cluj

ISTORICUL **conicelor.** Curbele numite conice au fost studiate pentru prima oară de către geometrul grec Menechmus (375—325 î.e.n.). El a studiat aceste curbe, le-a definit şi le-a împărţit în trei clase. De aceea grecii le-au numit triadele lui Menechmus. Definiţiile sale însă, se deosebeau de cele de astăzi. Spre deosebire de felul cum studiem astăzi aceste curbe, făcînd diferite secţiuni plane într-un con de rotaţie (vom reveni asupra acestei probleme), el presupunea un plan fix pe care-l intersecta cu diferite feluri de conuri. Secţiunile acestea erau totdeauna perpendiculare pe una din generatoarele conului. Menechmus nu concepea altfel de secţiuni. Considera conul ca luînd naştere prin rotirea unui triunghi isoscel în jurul axei sale de simetrie. A constatat că în aceste condiţii secţiunea este o elipsă dacă triunghiul care generează conul este ascuţitunghi, parabolă — dacă este dreptunghic şi hiperbolă — dacă triunghiul este obtuzunghi. A dat şi o construcţie mecanică a conicelor. El se folosea de

aceste curbe pentru soluționarea vestitei probleme a antichității, problema duplicării cubului, sau cum i se mai zice, « problema din Delos ».

Nu știm cum a ajuns Menechmus la ideea să se ocupe de aceste secțiuni. Probabil a mers pe urmele geometrilor Archytas din Tarent (430—365 î.e.n.), care căutînd soluționarea problemei din Delos, făcuse niște secțiuni ingenioase în cilindru — și Eudoxus din Cnidos (408—355 î.e.n.) discipolul lui Archytas, care a studiat la rîndul său secțiunile plane ale torului. Menechmus, discipolul lui Eudoxus, a fost membru al Academiei din Athena, școală întemeiată de Platon. Cercetările sale matematice: studierea conului, a problemei din Delos, sînt problemele acestei școli.

Conicele au fost descoperite și studiate în perioada în care matematica antică greacă ajunsese la maturitate, în perioada în care Athena era centrul cercetărilor științifice. Orînduirea sclavagistă era încă în floare. Apariția problemei conicelor stă în strînsă legătură cu problemele științifice ale acestei epoci. Tehnica înfloritoare din Grecia, în special din Athena, tehnica aplicată în construcții, inclusiv construcții de corăbii, în arta militară etc., problemele navigației și astronomiei etc., reclamau dezvoltarea geometriei. În această epocă se studiază lumea înconjurătoare, legile naturii, raporturile spațiale. Se analizează legile gîndirii și metodele cunoașterii. Paralel cu luptele ascuțite de clasă din această epocă și ca o oglindire a acestora, apar concepții materialiste despre lume și legile ei, ca atomistica lui Democrit și filozofia naturii a lui Aristotel. Se analizează natura abstracțiunilor, raportul abstracțiunilor cu realitatea concretă (Platon, Aristotel). Între aceste preocupări, geometria ocupa un loc central în cadrul științelor sau mai bine zis, în filozofie.

Vorbim în această epocă de filosofie, căci « concepțiile filozofice ale grecilor au fost atît de strîns legate de concepțiile lor asupra științelor naturale și politice, încît nu trebuie și nici nu avem dreptul să aplicăm științei grecești diviziunea și clasificarea noastră a științelor, apărută mai tîrziu » (Jdanov). Grecii cunoșteau de fapt, numai o singură știință indivizibilă. Numai începînd din acest timp se desprind unele ramuri ale științelor, de filozofie. « Filozofii greci antici au fost în același timp și naturaliști », spune Engels în « Dialectica naturii ».

Deci, descoperirea conicelor se leagă de problemele științifice din această epocă. Cercetînd și mai deaproape problema mai putem releva și o altă latură, un alt aspect, al problemei.

Teoria secțiunilor conice a luat naștere din necesitatea de a împăca contradicția internă ce exista în geometria antică. Aceasta formulase pretenția că fiecare problemă de geometrie să poată fi rezolvată numai cu ajutorul riglei și al compasului, singurele instrumente admise de către postulatele geometriei. Cu toate acestea s-au izbit de unele probleme a căror rezolvare era imposibilă numai cu ajutorul riglei și compasului fără a recurge la alte instrumente. Una dintre aceste probleme era problema dublării cubului. Gînditorii antici, elini, au creat un mit al acestei probleme.

S-au păstrat mai multe legende referitoare la ea. După o variantă, pe insula Delos bîntuia ciuma. Locuitorii insulei au întrebat oracolul, cum să pună capăt nenorocirii. Oracolul le-a poruncit să dubleze altarul zeului. Altarul era de formă cubică și trebuia să păstreze această formă. Pentru a rezolva această problemă de dublare a cubului, locuitorii insulei au trimis soli la geometrii din Academia lui Platon. Se zice că Platon le-ar fi răspuns: « Zeul nu dorește dublarea altarului, dar prin porunca sa i-a certat pe elini pentru că ei acordă prea puțină atenție științelor și mai ales, geometriei ». Într-un document auten-

tic — o scrisoare a matematicianului Eratosthenes (sec. III î.e.n.) adresată regelui egiptean Ptolomeus II, găsim o altă poveste despre felul cum a luat naştere această problemă. Regele Minos al Kretei, se plînge că mormîntul fiului său e prea mic pentru un prinţ şi ordonă să fie dublat. Mormîntul avea forma unui cub. Deci şi în acest caz se cerea muchia cubului dublat.

Cu ajutorul conicelor, Menechmus a reuşit să rezolve această problemă, adică să construiască latura cubului dublat. Aceste curbe ale lui Menechmus odată descoperite, au căpătat o importanţă uriaşă în istoria dezvoltării ideilor matematice. Aceste curbe au fost tratate de mulţi matematicieni, mari şi mici. Ele au rămas permanent în centrul cercetărilor.

Archimede din Syracusa (287—211 î.e.n.), care e citat adesea ca cel mai mare matematician al antichităţii, a calculat aria elipsei, a segmentului de parabolă şi volumele corpurilor care iau naştere prin rotirea conicelor în jurul axelor lor.

Denumirea de elipsă, parabolă şi hiperbolă provin de la marele geometru al Şcoalei din Alexandria, Apolloniu din Perga (260—200 î.e.n.). Apolloniu a scris un Tratat al conicelor, în 8 cărţi, din care primele patru au rămas în textul original, următoarele trei în traducere în limba arabă, iar cartea a opta s-a pierdut. În această operă clasică Apolloniu a dat alte definiţii conicelor şi a studiat cu o măestrie de neîntrecut, multe din proprietăţile lor. În această operă apar şi denumirile de elipsă, hiperbolă şi parabolă. În greceşte „ἡ ἔλλειψις" înseamnă lipsă, „ἡ ὑπερβολή" înseamnă exces, surplus, iar „ἡ παραβολή" înseamnă asemănare, comparare. Aceşti termeni sînt în legătură cu unele proprietăţi ale acestor curbe.

Studiul conicelor a rămas la nivelul lăsat de Apolloniu timp de un mileniu şi jumătate. Numai în timpul renaşterii şi la începutul erei noi, la acest stadiu mai înalt de dezvoltare al forţelor de producţie şi al relaţiilor de producţie, sub influenţa nevoilor create de armele de foc, de mecanica cerească etc., matematicienii se îndreaptă din nou spre studiul acestor curbe şi îmbogăţesc cu cunoştinţe noi ştiinţa conicelor.

Marele astronom şi fizician Galileo Galilei (1543—1642) a dedus că traiectoria unui corp greu aruncat oblic este o parabolă, dar că traiectoria proiectilelor, în urma rezistenţei aerului, diferă totuşi de arcul de parabolă. Johan Kepler (1571—1630) bazîndu-se pe observaţiile multiple ale lui Tycho Brahe descoperă legile mişcării planetelor. Conform primei sale legi, planetele se mişcă pe nişte elipse. Peste 100 de ani, Newton (1642—1727, unul din cei mai de seamă matematicieni, a dedus din legile lui Kepler, legea gravitaţiei universale.

Dar istoria conicelor nu se termină cu aceasta. Ele continuă să joace un rol însemnat şi în geometriile moderne şi în alte ramuri ale matematicii de astăzi. Metematicieni mai însemnaţi cari în era nouă s-au ocupat cu conicele sînt următorii:

Gérard Desargues (1593—1662) studiază conicele şi proprietăţile patrulaterului înscris într-o conică;

Bonaventura Cavalieri (1508—1648) tratează cu metoda sa, vestita metodă a indivizibilelor,—corpul care ia naştere prin rotirea hiperbolei, adică hiperboloidul de rotaţie;

Blaise Pascal (1623—1662) la vîrsta de 16 ani scrie un studiu original, de mare importanţă despre conice, care conţine şi vestita teoremă care-i poartă numele;

John Wallis (1616—1703) scrie un tratat al secțiunilor conice în care definește conicele ca fiind curbe de gradul doi. Face cuadratura (calculează aria) parabolei. Stabilește volumul elipsoidului, paraboloidului eliptic și al hiperboloidului cu două pînze. Încercările sale de a rectifica (a-i calcula lungimea) elipsa și hiperbola nu au reușit;

Pierre Fermat (1601—1665) a făcut de asemenea cuadratura parabolei și hiperbolei. El dă pentru prima oară ecuațiile conicelor;

James Grégory (1638—1675) arată că aria cercului și a hiperbolei se poate obține sub forma unei serii infinite.

În secolul XVIII a fost creată teoria analitică a conicelor. La începutul secolului XIX matematicieni însemnați se ocupă cu înscrierea poligoanelor în conice (Poncelet, Möbius, Clausen).

Conicele au jucat un rol însemnat și în istoria matematicilor mai moderne, spre exemplu, în geometria proiectivă. Chiar și în ultimii ani au apărut studii despre rețele de conice etc. Ele au un aport însemnat și în mecanica atomului. Dar înțelegerea problemelor care s-au pus mai recent în legătură cu conicele reclamă cunoștințe matematice mai profunde și în consecință, nu pot fi expuse în acest articol. Tot pentru acest motiv nu ne extindem nici asupra cercetărilor sovietice din acest domeniu, deși matematicieni sovietici distinși, ca D. D. Morduhai-Boltovsoi, M. P. Cerniaev, H. A. Izvolski și M. L. Frank, au scris studii despre conice.

Dintre matematicienii romîni, s-au ocupat mai mulți cu problema conicelor. Astfel, Gheorghe Țițeica (1875—1939) a publicat mai multe articole în revista « Gazeta Matematică », « Despre proprietățile conicelor » și « Asupra cercurilor armonice înscrise într-o conică ». Diferite publicații, manuale, tratate romînești de geometrie se referă și la problema conicelor. Astfel spre exemplu, cartea lui Traian Lalescu (1882—1929) « Tratat de geometrie analitică », etc.; Gh. Buicliu a publicat cîteva articole sub titlul « Proprietăți geometrice ale conicelor » în suplimentul « Gazetei Matematice », numerele din 1947, în care tratează conicele cu metodele geometriei elementare, pentru elevii școlilor medii.

Cum se definesc conicele? Elevii noștri fac cunoștință cu aceste curbe încă din școala medie. Ei le întîlnesc cînd la matematică, cînd la fizică, cînd la astronomie. La algebră, făcînd graficele funcțiilor de gradul doi, dau de parabole. La fizică am văzut că în vid, traiectoria unui corp aruncat oblic este o conică numită parabolă (arc de parabolă). La astronomie am văzut că planetele în mișcarea lor în jurul soarelui descriu o conică numită elipsă. Traiectoriile cometelor sînt de asemenea, conice: elipse, parabole sau hiperbole. S-ar putea da încă și alte exemple. Deci e necesar să studiem mai temeinic aceste curbe.

Elipsa. Să considerăm două drepte concurente. Dacă rotim una din aceste drepte în jurul celeilalte, așa ca unghiul dintre ele să rămînă constant, ea va descrie o suprafață numită con de rotație alcătuită din două pînze. Un plan care intersectează toate generatoarele unei pînze taie conul după o curbă numită elipsă. Să înscriem în con două sfere care să fie tangente și planului secant în punctele F și F' (fig. 1).

Dreapta care unește un punct oarecare M al elipsei cu punctul F atinge în acest punct sfera superioară. Generatoarea conului care trece tot prin punctul M atinge aceiași sferă în punctul P. Pe de altă parte știm că tangentele la sferă, duse din același punct, sînt egale între ele. Deci $MF = MP$. În mod identic $MF' = MQ$. Din aceste egalități urmează: $MF + MF' = MP + MQ = PQ$. Segmentul PQ este generatoarea trunchiului de con cuprins între planele paralele, în care se află cercurile de tangență ale sferelor înscrise în conul dat, deci mărimea

lui este independentă de poziția punctului M. În cazul mișcării punctului M pe elipsă, suma $MF = MF'$ rămîne constantă. Aceasta este o proprietate fundamentală a elipsei. Punctele F și F' se numesc focarele elipsei.

Hiperbola. Un plan paralel cu două generatoare oarecare ale conului intersectează ambele pînze ale conului și secțiunea este o curbă cu două ramuri numită hiperbolă.

Să înscriem din nou în con, două sfere tangente în același timp planului secant în punctele F și F' (fig. 2). Aceste puncte vor fi focarele hiperbolei. Segmen-

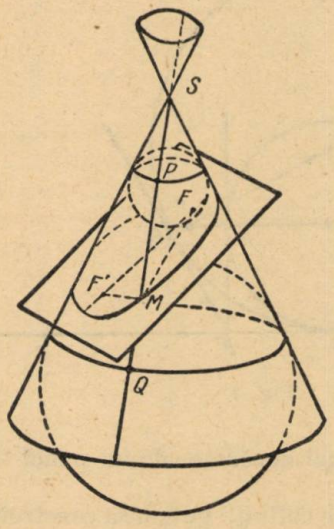


Fig. 1

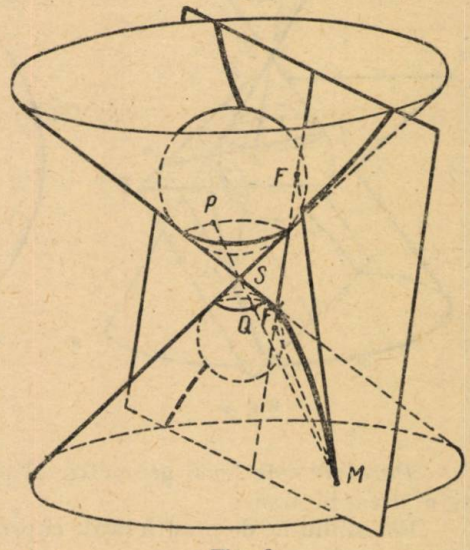


Fig. 2

tele care unesc un punct oarecare M al hiperbolei cu focarele, ating în aceste focare sferele înscrise, iar generatoarea conului care trece prin același punct M, atinge una din sfere în punctul P și pe cealaltă în punctul Q. Vom avea $MF = MP$; $MF' = MQ$ și deci $MF - MF' = MP - MQ = PQ$.

Cînd M se mișcă pe hiperbolă, PQ păstrează o mărime constantă, PQ fiind egal cu $PS + SQ$. Deci, diferența $MF - MP'$ rămîne constantă cînd M se mișcă pe hiperbolă. Aceasta este o proprietate fundamentală, caracteristică pent u hiperbolă.

Parabola. Un plan paralel numai cu una din generatoarele conului intersectează una singură dintre pînzele lui și secțiunea este o curbă numită parabolă.

Să înscriem în con o sferă tangentă în același timp și planului secant în punctul F, focarul parabolei (fig. 3). Planul determinat de cercul de tangență al sferei cu conul dat și planul parabolei se taie de-a lungul unei drepte AB. Fie SC generatoarea care este paralelă cu planul parabolei. Dintr-un punct oarecare M al parabolei ducem dreapta MD paralelă cu generatoarea SC și în consecință, perpendiculară pe AB; CD și generatoarea SM se taie în punctul P de pe cercul de tangență al sferei cu conul. Din asemănarea triunghiurilor SCP și MDP urmează: $MP = MD$, căci $SC = SP$. Dar $MP = MF$. Deci $MF = MD$. Adică, orice punct al parabolei este la egală distanță de focarul F și de dreapta AB. Dreapta AB se numește directoarea parabolei.

În rezumat, un plan taie un con de rotație după o elipsă, hiperbolă sau parabolă, de unde și numele de conice dat acestor curbe.

Dacă ţinem seamă de proprietăţile mai sus stabilite ale conicelor, ele pot fi definite şi ca nişte locuri geometrice, şi anume:

Elipsa este locul punctelor a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe este constantă.

Hiperbola este locul geometric al punctelor a căror diferenţă a distanţelor la două puncte fixe este constantă.

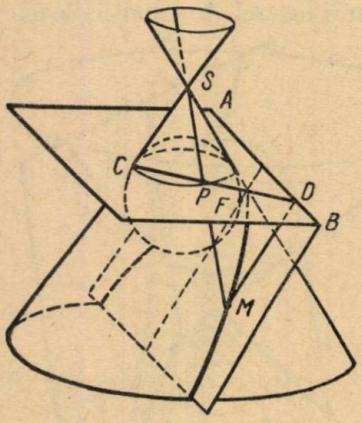


Fig. 3

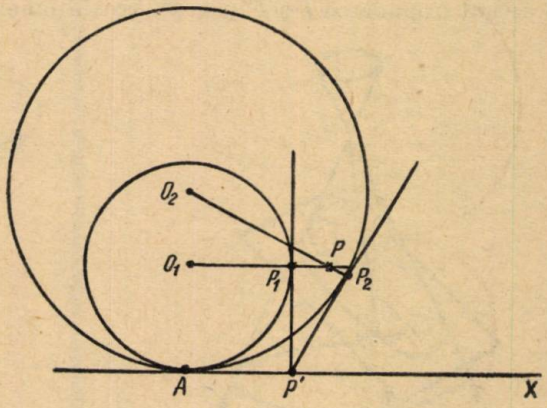


Fig. 4

Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix şi o dreaptă fixă.

Folosindu-ne de proprietăţile cuprinse în aceste definiţii putem să construim aceste conice.

Conicele pot fi definite încă în multe feluri. În articolul de faţă, voi expune încă o definiţie, care mi se pare foarte frumoasă, dar care totuşi este prea puţin cunoscută.

O definiţie comună a conicelor. Conica este locul geometric al punctelor egal depărtate de două cercuri tangente.

Fie O_1 şi O_2 cele două cercuri, A punctul de tangenţă şi AX tangenta comună a celor două cercuri. Tangenta într-un punct P_1 al cercului O_1 taie dreapta AX în P'. Cercul cu centrul în P' şi raza $P'A$ întîlneşte cercul O_2 a doua oară în P_2. Dreptele O_1P_1 şi O_2P_2 se întîlnesc într-un punct P al conicei.

Demonstraţie. Observăm pe de o parte, că tangenta comună AX este axul radical al cercurilor O_1 şi O_2, iar pe de altă parte, axele radicale ale cercurilor O_1, O_2 şi $(P,\ PP_1 = PP_2)$ se întîlnesc într-un punct P'.

Cazul 1. Dacă cercurile O_1 şi O_2 sînt tangente interioare (fig. 4). raza cercului O_1 fiind mai mică decît raza cercului O_2, atunci avem:

$$O_1P + O_2P = (O_1P_1 + P_1P) + O_2P = O_1P_1 + PP_2 + O_2P =$$

$$= O_1P_1 + O_2P_2 = r_1 + r_2 = \text{const.}$$

Conica este o elipsă.

Cazul 2. Dacă cercurile O_1 şi O_2 sînt tangente exterioare (fig. 5) avem:

$$O_1P - O_2P = (O_1P_1 + P_1P) - (O_2P_2 + P_2P) = O_1P_1 - O_2P_2 = r_1 - r_2 = \text{const.}$$

Conica este o hiperbolă.

C a z u l 3. Dacă centrul cercului O_2, adică însuşi punctul O_2, este la infinit, cercul O_2 coincide cu tangenta AX (fig. 6). Pe O_2A în punctul V ($AV = AO_1$) ducem perpendiculara VV'; PP_2 şi VV' se taie în P''.

$$PP'' = PP_2 + P_2P'' = PP_1 + AV = PP_1 + AO_1 = PP_1 + O_1P_1 = O_1P.$$

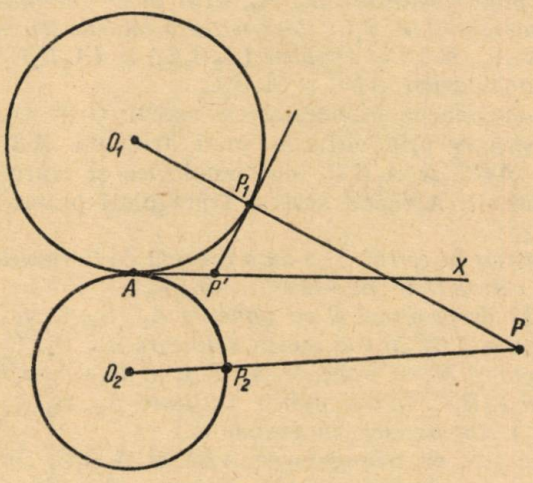


Fig. 5

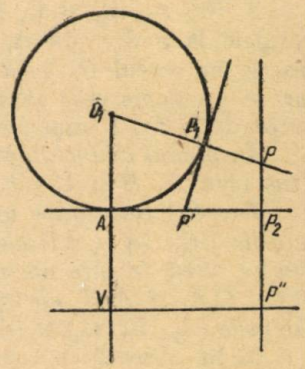


Fig. 6

Adică P este la aceiaşi distanţă de O_1, ca şi de VV', de aşa numita directoare Conica este o parabolă.

NOTE MATEMATICE

12. Asupra problemei 1424

În nota nr. 6 G.M.F.-B nr. 2/1956, pag. 84, s-a dat o generalizare a problemei 1424.

Plecînd de la această generalizare, voi arăta mai jos, că se pot obţine o serie de alte proprietăţi interesante.

1. Păstrînd în fig. 1, aceleaşi notaţii ca în nota nr. 6, se observă că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ avînd vîrfurile situate pe trei drepte concurente în L sînt omologice, punctul L fiind centrul lor de omologie.

Dacă se consideră triunghiul $A_1B_1C_1$ ca triunghi de referinţă şi i se aplică teorema demonstrată în nota citată, se constată că dreptele AM, BM şi CM taie respectiv

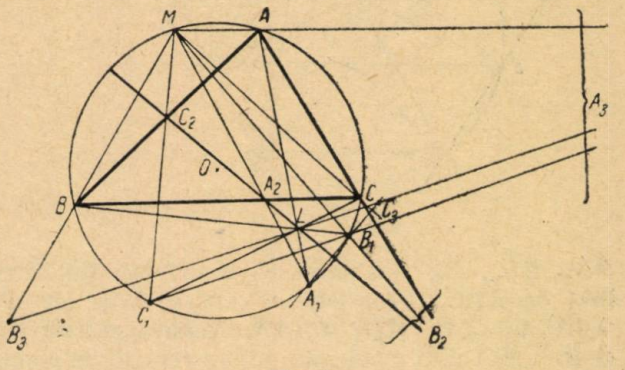


Fig. 1

laturile B_1C_1, A_1C_1 și A_1B_1 în trei puncte A_3, B_3 și C_3 situate pe o dreaptă ce trece prin L.

Se poate deci, enunța următoarea proprietate:

Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri omologice înscrise în cercul O. Dreptele care unesc un punct M depe cercul O cu vîrfurile triunghiului ABC intersectează laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ în trei puncte colineare A_2, B_2, C_2 și invers, dreptele ce unesc punctul M cu vîrfurile triunghiului $A_1B_1C_1$ interesectează laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare A_3, B_3, C_3. Dreptele $(A_2B_2C_2)$ și $(A_3B_3C_3)$ trec prin centrul de omologie al triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.

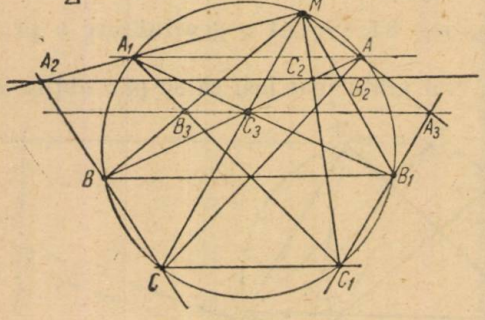
2. Fie A_1, B_1 și C_1 (fig. 2) punctele de intersecție cu cercul O a trei paralele la o dreaptă Δ, duse respectiv prin vîrfurile unui triunghi ABC înscris în cercul O. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt omologice și centrul lor de omologie este aruncat la infinit. Aplicînd acestor triunghiuri proprietatea de la nr. 1 vom putea enunța:

În planul triunghiului ABC înscris în cercul O se dă o dreaptă Δ. Paralelele duse prin A, B și C intersectează cercul O în punctele A_1, B_1, C_1.

Dreptele care unesc un punct M de pe cercul O cu punctele A_1, B_1, C_1 taie laturile BC, CA și AB ale triunghiului ABC în trei puncte colineare A_2, B_2, C_2. Invers, dreptele care unesc același punct M cu punctele A, B și C taie laturile B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 ale triunghiului $A_1B_1C_1$ în trei puncte colineare A_2, B_2, C_2. Dreptele (A_2, B_2, C_2) și (A_3, B_3, C_3) sînt paralele cu dreapta Δ.

3. Se observă în cazul de mai sus, că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt simetrice, avînd ca axă de simetrie diametrul cercului O perpendicular pe dreapta Δ. Dacă punctul M care este mobil pe cercul O se găsește într-una din extremitățile acestui diametru, dreptele A_2, B_2, C_2 și A_3, B_3, C_3 se suprapun și deci în acest caz, cele șase puncte A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 sînt colineare.

4. Se consideră (fig. 3) un punct M pe cercul O circumscris triunghiului ABC și dreapta lui Simson a acestui punct față de triunghiul ABC, proiecțiile lui M pe BC, CA și AB fiind respectiv A_2, B_2, C_2. Fie A_1, B_1, C_1 punctele în care dreptele MA_2, MB_2, MC_2 intersectează a doua oară cercul O. Dreptele



Fg. 2

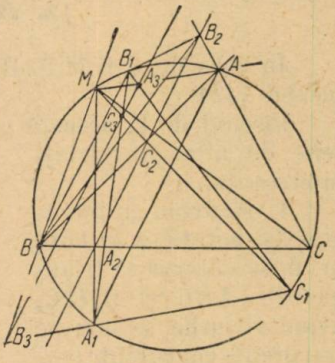


Fig. 3

AA_1, BB_1, CC_1 sînt paralele cu dreapta lui Simson, $A_2B_2C_2$ a punctului M față de ABC. (Proprietatea cunoscută ce rezultă pentru AA_1 din egalitatea $\sphericalangle BC_2A = \sphericalangle BMA_1 = \sphericalangle BAA_1$. Analog pentru BB_1 și CC_1). Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt deci omologice, avînd centrul de omologie la infinit. Conform celor arătate la punctul 2, dreptele MA, MB și MC vor intersecta respectiv laturile B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ale triunghiului $A_1B_1C_1$ în trei puncte colineare A_3, B_3, C_3.

Dreapta $(A_3B_3C_3)$ va fi paralelă cu dreapta lui Simson a punctului M față de triunghiul ABC.

5. *Se consideră triunghiul $A_1B_1C_1$ format din intersecțiile înălțimilor triunghiului ABC cu cercul circumscris și un punct M de pe acest cerc. Dreptele MA_1, MB_1, MC_1 intersectează laturile triunghiului ABC respectiv în trei puncte A_2, B_2, C_2 situate pe o dreaptă ce trece prin H ortocentrul triunghiului ABC și este paralelă la dreapta lui Simson a punctului M față de ABC.* (Fig. 4).

Colinearitatea punctelor A_2, B_2, C_2 pe o dreaptă ce trece prin H rezultă din prima proprietate enunțată mai sus, la punctul 1, deoarece triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt omologice, iar H este centrul lor de omologie.

Fie S intersecția dreptei lui Simson a punctului M față de ABC cu dreapta MA_2A_1, și A_3, B_3, C_3 proiecțiile lui M pe laturile triunghiului ABC. În triunghiul dreptunghic MA_3A_2 punctul S este mijlocul ipotenuzei, deoarece

$$\sphericalangle SA_3M = \sphericalangle B_3A_3M = \sphericalangle B_3CM = \sphericalangle ACM = \\ = \sphericalangle AA_1M = \sphericalangle A_3MA_1 = \sphericalangle A_3MS.$$

Dreapta lui Simson a punctului M se știe că trece și prin mijlocul dreptei ce unește pe M cu ortocentrul H al triunghiului ABC. Deci, în triunghiul MHA_2 dreapta lui Simson a punctului M trece prin mijloacele laturilor MA_2 și MH și deci este paralelă cu HA_2 și deci cu dreapta $(A_2B_2C_2H)$.

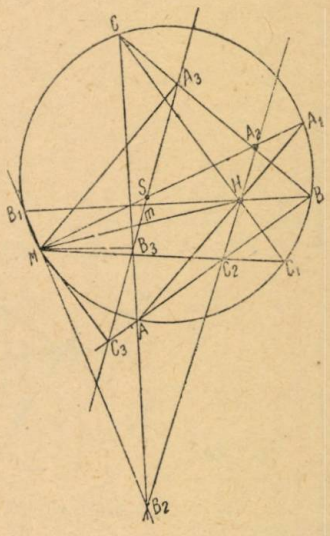


Fig. 4

6. Ținînd seama că H este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$, întrucît înălțimile triunghiului ABC sînt bisectoarele triunghiului $A_1B_1C_1$, se poate enunța următoarea proprietate dacă se consideră triunghiul $A_1B_1C_1$ ca triunghi de referență.

Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul format de punctele de intersecție ale bisectoarelor triunghiului ABC cu cercul O circumscris lui .Dreptele ce unesc un punct M de pe cercul O cu punctele A, B, C intersectează pe B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 respectiv în trei puncte A_2, B_2, C_2 situate pe o dreaptă paralelă cu dreapta lui Simson a punctului M față de triunghiul $A_1B_1C_1$. Dreapta $(A_2B_2C_2)$ trece prin S, centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Teodor Gh. Cocea

13. Un caz particular al triunghiurilor ortologice

1. Două triunghiuri ortologice [1]) cu centrele de ortologie confundate sînt omologice [2]).

[1]) Dacă perpendicularele coborîte din vîrfurile triunghiului ABC pe laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt concurente într-un punct M, atunci și perpendicularele coborîte din vîrfurile triunghiului $A'B'C'$ pe laturile triunghiului ABC sînt concurente într-un alt punct N. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc ortologice, iar punctele M și N centrele lor de ortologie.

[2]) Dacă dreptele AA', BB', CC', care unesc vîrfurile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ se întîlnesc într un punct O, atunci laturile BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ se întîlnesc în 3 puncte α, β, γ colineare. De asemenea, reciproc. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc omologice, punctul O centrul de omologie, iar dreapta $\alpha\beta\gamma$ axa de omologie.

Perpendiculara coborîtă din centrul de omologie pe axul de omologie trece prin centrele de ortologie confundate.

Soluție. Fie ABC, $A_1B_1C_1$ două triunghiuri ortologice cu centrele de ortologie confundate în M (fig. 1), Notăm $\alpha \equiv (BC.\ B_1C_1)$, $\beta \equiv (CA,\ C_1A_1)$, $\gamma \equiv (AB,\ A_1B_1)$. Triunghiurile sînt omologice dacă α, β, γ sînt colineare, adică dacă:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1. \tag{1}$$

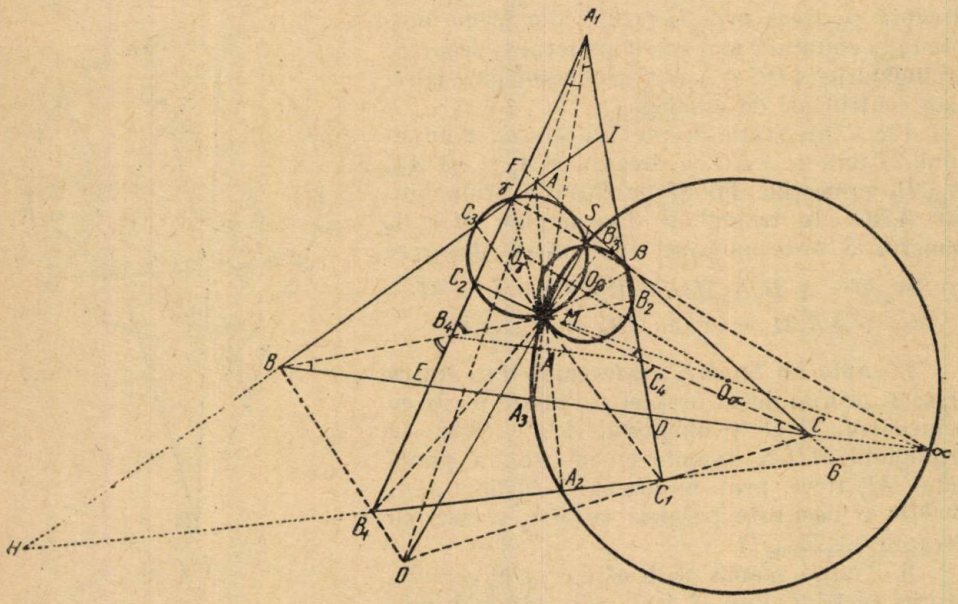


Fig. 1

Considerăm intersecțiile: $D \equiv (BC,\ C_1A_1)$, $E \equiv (BC,\ A_1B_1)$, $F \equiv (CA,\ A_1B_1)$, $G \equiv (CA,\ B_1C_1)$, $H \equiv (AB,\ B_1C_1)$, $I \equiv AB,\ C_1A_1)$.

Conform teoremei lui Menelaus, în triunghiul ABC tăiat de transversalele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 avem:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{GC}{GA} \cdot \frac{HA}{HB} = 1 \quad ; \quad \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{DB}{DC} = 1 \quad ; \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$$

sau

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{EC}{FC} \cdot \frac{IB}{DB} \cdot \frac{GA}{HA} \cdot \frac{DC}{EB} \cdot \frac{HB}{IA} \cdot \frac{FA}{GC}. \tag{2}$$

Din triunghiurile asemenea C_2EC și A_3MC și din triunghiurile asemenea C_2FC și B_3MC, avem:

$$EC = \frac{CM \cdot CC_2}{A_3C} \text{ și } FC = \frac{CM \cdot CC_3}{B_3C},$$

de unde:

$$\frac{EC}{FC} = \frac{B_3C}{A_3C}.$$

Analog,

$$\frac{IB}{DB} = \frac{A_3B}{C_3B} \quad \text{și} \quad \frac{GA}{HA} = \frac{C_3A}{B_3A}.$$

Notăm: $B_4 \equiv (BB_2, A_1B_1)$, $C_4 \equiv (CC_2, C_1A_1)$.

Din triunghiurile asemenea CDC_4 și A_1MB_4 (laturi perpendiculare), apoi din triunghiurile asemenea BEB_4 și A_1MC_4 rezultă:

$$DC = \frac{MA_1 \cdot DC_4}{MB_4} \quad \text{și} \quad EB = \frac{MA_1 \cdot EB_4}{MC_4},$$

de unde:

$$\frac{DC}{EB} = \frac{DC_4 \cdot MC_4}{EB_4 \cdot MB_4}. \tag{3}$$

În triunghiul $A_1B_4C_4$ dreptele B_4B_2, C_4C_2 sînt înălțimi și M ortocentrul, deci A_1MA_3 este a treia înălțime și prin urmare $A_1A_3 \perp B_4C_4$, dar $A_1A_3 \perp BC$, deci $B_4C_4 \parallel BC$. Putem scrie:

$$\frac{DC_4}{EB_4} = \frac{A_1C_4}{A_1B_4} = \frac{A_1C_2}{A_1B_2}. \tag{4}$$

Din triunghiurile asemenea C_2A_1M și A_3CM și din triunghiurile asemenea B_2A_1M și A_3BM:

$$A_1C_2 = \frac{MA_1 \cdot A_3C}{CM} \quad \text{și} \quad A_1B_2 = \frac{MA_1 \cdot A_3B}{BM}.$$

Relația (4) devine:

$$\frac{DC_4}{EB_4} = \frac{A_3C \cdot BM}{A_3B \cdot CM}.$$

Deoarece $B_4C_4 \parallel BC$ mai avem:

$$\frac{MC_4}{MB_4} = \frac{CM}{BM}.$$

Facem înlocuirile în (3) și obținem:

$$\frac{DC}{EB} = \frac{A_3C}{A_3B}. \tag{5}$$

Analog:

$$\frac{HB}{IA} = \frac{C_3B}{C_3A} \quad \text{și} \quad \frac{FA}{GC} = \frac{B_3A}{B_3C}.$$

Făcînd înlocuirile în (2) obținem relația (1), deci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt omologice.

Să arătăm că perpendiculara coborîtă din centrul de omologie O (intersecția dreptelor AA_1, BB_1, CC_1) pe axa de omologie $\alpha\beta\gamma$ trece prin M.

Considerînd patrulaterele inscriptibile $AB_1A_2B_3$, $B_1CB_3C_2$, $A_1CA_3C_2$, $A_1BA_3B_2$, $BC_1B_2C_3$ putem scrie:

$$AM \cdot MA_2 = BM \cdot MB_2 = CM \cdot MC_2 = A_1M \cdot MA_3 = B_1M \cdot MB_3 =$$
$$= C_1M \cdot MC_3 = K.$$

Extremităţile fiecăruia din segmentele AA_2, BB_2, CC_2, A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 sînt puncte inverse în raport cu polul M şi cu puterea de inversiune $-K$.

Inversul dreptei AA_1 este un cerc O_α, care trece prin polul M, prin A_2, A_3 (inversele punctelor A, A_1) şi prin α (unghiurile $MA_2\alpha$, $MA_3\alpha$ fiind drepte).

Tot aşa, inversele dreptelor BB_1, CC_1 sînt respectiv, cercurile O_β ($MB_2B_3\,\beta$), O_γ ($MC_2C_3\gamma$). Inversul centrului de omologie O este punctul S (a doua intersecţie comună pe lîngă polul M al celor trei cercuri) şi prin urmare OS trece prin M.

Ca ax radical comun al celor trei cercuri, dreapta OMS e perpendiculară pe linia centrelor $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ deci şi pe paralela acesteia, axa de omologie $\alpha\beta\gamma$.

2. Aplicaţie. *Un punct M din planul triunghiului ABC se proiectează pe laturile BC, CA, AB în A_1, B_1, C_1. Se notează cu A_2, B_2, C_2 punctele în care dreptele MA_1, MB_1, MC_1 reîntîlnesc cercul ω ($A_1B_1C_1$) şi cu A_3, B_3, C_3 punctele diametral opuse punctelor A_1, B_1, C_1 în acelaşi cerc.*

Să se demonstreze că *dreptele AA_2, BB_2, CC_2 pe de o parte şi AA_3, BB_3, CC_3 pe de altă parte, sînt concurente.*

Soluţie. Cercul ω taie din nou laturile BC, CA, AB în A_4, B_4, C_4 (fig. 2)

Dreapta B_4C_4 e antiparalelă cu latura B_1C_1 a triunghiului AB_1C_1; cercul circumscris acestui triunghi trece prin M şi are segmentul AM drept diametru deoarece unghiurile AB_1M, AC_1M sînt drepte.

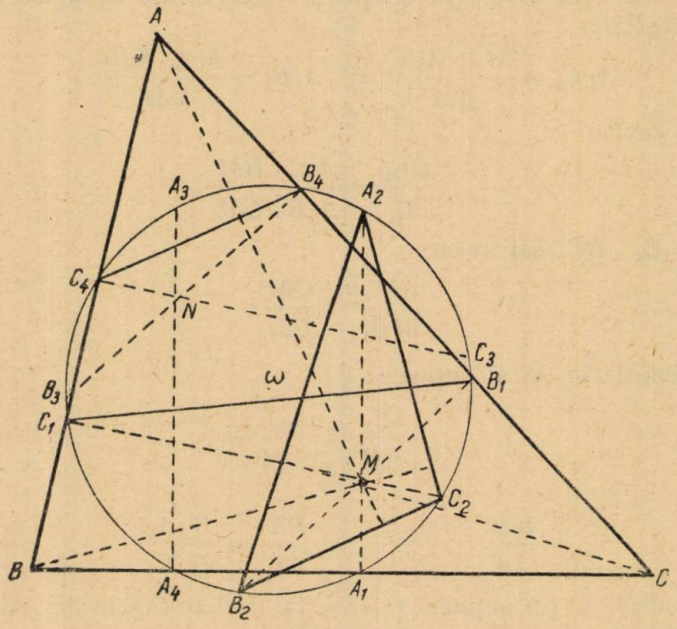


Fig. 2

În orice triunghi ABC razele vîrfurilor în cercul circumscris sînt perpendiculare pe laturile triunghiului său ortic (teorema lui Nagel) şi cum laturile triunghiului ortic sînt antiparalele cu laturile triunghiului ABC, razele vîrfurilor sînt perpendiculare pe antiparalelele la laturile triunghiului ABC. Aşa dar, în cazul nostru:

$$AM \perp B_4C_4. \tag{6}$$

Segmentele B_2B_4, C_2C_4 sînt diametri în cercul ω, deci:

$$B_2C_2 \parallel B_4C_4. \tag{7}$$

Din (6) şi (7):

$$AM \perp B_2C_2.$$

Analog, $BM \perp C_2A_2$ şi $CM \perp A_2B_2$

Prin urmare, triunghiurile ABC, $A_2B_2C_2$ sînt ortologice şi au centrele de ortologie confundate în punctul M. Conform proprietăţii nr. 1, cele două triunghiuri sînt omologice, adică dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sînt concurente.

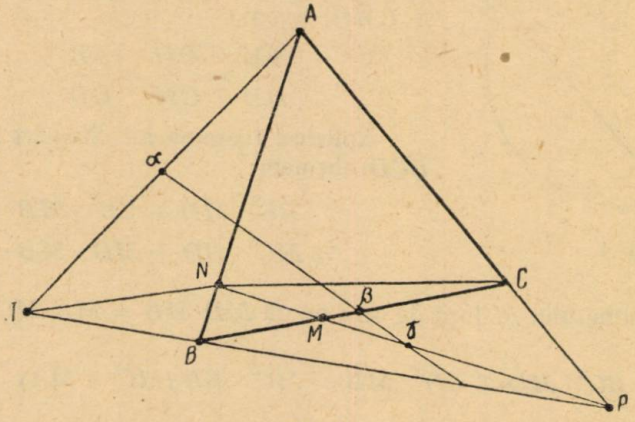


Fig. 3

Perpendicularele ridicate în A_4, B_4, C_4 pe laturile BC, CA, AB sînt concurente într-un punct N (G. Ţiţeica, *Culegere de probleme de geometrie*, nr. 27/IX). Aceste perpendiculare reîntîlnesc cercul ω în A_3, B_3, C_3 punctele diametral opuse punctelor A_1, B_1, C_1.

Sîntem în condiţii analoage cazului precedent; prin urmare, dreptele AA_3, BB_3, CC_3 sînt concurente.

Cazuri particulare sînt problemele cunoscute:

a) *Fie A' punctul de tangenţă al unui cerc înscris sau ex-nscris triunghiului ABC, cu latura BC, iar A'' punctul diametral opus lui A' în acest cerc. Să se arate că AA'', BB'', CC'' sînt concurente, B'' şi C'' fiind analoagele lui A''.* (G. Ţiţeica, *Culegerea de probleme de geometrie*, nr. 11/XI).

b) *Să se demonstreze că dreptele determinate de vîrfurile unui triunghi şi punctele unde mediatoarele laturilor intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului, sînt concurente.* (G.M.F.-B, nr. 8/1955, problema nr. 1797).

3. *Notă.* — În fig. 1 notăm cu A' intersecţia dreptelor A_1A_3, B_4C_4 şi avem: $\dfrac{A_3C}{A_3B} = \dfrac{A'C_4}{A'B_4}$

Relaţia (5) devine: $\dfrac{DC}{EB} = \dfrac{A'C_4}{A'B_4}$.

Folosind notaţii curente (fig. 3), avem proprietatea:

O paralelă la latura BC a triunghiului ABC taie laturile CA, AB şi înălţimile BB', CC' respectiv în B_1, C_1, B'', C''. Piciorul înălţimii coborîte din A fiind A', avem relaţia:

$$\frac{B_1C''}{C_1B''} = \frac{A'C}{A'B}.$$

D. C. Panu

14. Teorema lui Ptolomeu

Este cunoscută teorema lui Ptolomeu:

« Într-un patrulater inscriptibil suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor ».

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor AMD și BMC, avem:

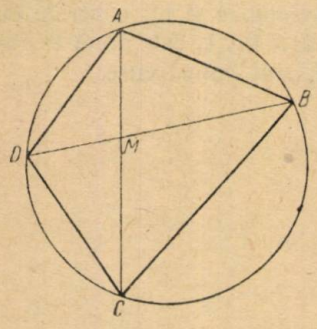


Fig. 4

$$\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM} = \frac{AD}{BC}. \tag{1}$$

La fel, din asemănarea triunghiurilor AMB și CMD, avem

$$\frac{AM}{DM} = \frac{BM}{CM} = \frac{AB}{CD}. \tag{2}$$

Aplicînd teorema lui Stewart în triunghiul BCD obținem:

$$BC^2 \cdot MD + CD^2 \cdot MB = MC^2 \cdot BD + MD \cdot MB \cdot BD. \tag{3}$$

Dar puterea punctului M față de cerc ne dă $MD \cdot MB = MA \cdot MC$, deci relația (3) devine:

$$BC^2 \cdot MD + CD^2 \cdot MB = MC^2 \cdot BD\,(MC + MA)$$

sau

$$BC^2 \cdot MD + CD^2 \cdot MB = MC \cdot BD \cdot AC.$$

Împărțind această relație cu MC obținem:

$$BC^2 \cdot \frac{MD}{MC} + CD^2 \cdot \frac{MB}{MC} = BD \cdot AC$$

sau avînd în vedere relațiile (1) și (2),

$$BC^2 \cdot \frac{AD}{BC} + CD^2 \cdot \frac{AB}{CD} = BD \cdot AC,$$

care ne dă

$$BC \cdot AD + AB \cdot CD = AC \cdot BD,$$

adică teorema lui Ptolomeu.

Marius I. Stoka

15. Generalizarea problemei 693

Dacă A_1, B_1 și C_1 sînt trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi oarecare și M, N, P punctele de intersecție ale dreptei AA_1 cu dreptele BB_1, CC_1 și B_1C_1, avem relația

$$\frac{A_1M}{MA} + \frac{A_1N}{NA} = \frac{A_1P}{PA}.$$

Soluție. Fie B_2, B_3; C_2, C_3 punctele de intersecție ale paralelelor prin B și C la AA_1, cu paralelele C_1B_1, C_3B_3 (C_3B_3 trecînd prin A_1). Din triunghiurile asemenea $BA_1B_3 \sim CA_1C_3$ găsim:

$$BB_3 + CC_3 = A_1B : A_1C, \tag{1}$$

însă, $BB_3 = PA_1 - BB_2$ și $CC_3 = CC_2 - PA_1$; $BA_1 + A_1C = BC$. Relația (1) împărțită cu AP ne dă, după ce am făcut înlocuirile de mai sus:

$$(BC \cdot A_1P) : AP = (CC_2 \cdot BA_1) : AP + (BB_2 \cdot A_1C) : AP. \tag{2}$$

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiurilor AA_1B și AA_1C tăiate respectiv de transversalele BMB_1 și CNC_1 dă

$$BA_1 \cdot B_1C \cdot AM = BC \cdot B_1A \cdot MA_1,$$
$$CA_1 \cdot BC_1 \cdot AN = BC \cdot C_1A \cdot NA_1,$$

de unde scoatem,

$$\frac{BA_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{BC \cdot MA_1}{AM} \quad \text{și} \quad \frac{CA_1\, BC_1}{C_1A} = \frac{BC \cdot NA_1}{AN}.$$

Ținînd seama că $CC_2 : AP = CB_1 : B_1A$ și $BB_2 : AP = BC_1 : C_1A$ relația (2) devine

$$\frac{BC \cdot A_1P}{PA} = \frac{BC \cdot A_1M}{MA} + \frac{BC \cdot A_1N}{NA},$$

de unde rezultă

$$\frac{A_1P}{PA} = \frac{A_1M}{MA} + \frac{A_1N}{NA}.$$

Observații. 1°. În cazul cînd C_1B_1 e paralelă cu BC găsim enunțul problemei 693 și anume,

$$\frac{A_1M}{MA} + \frac{A_1N}{NA} = \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{CB_1}{B_1A},$$

întrucît în acest caz,

$$A_1P : PA = BC_1 : C_1A = CB_1 = CB_1 : B_1A.$$

2° Cînd dreptele BB_1 și CC_1 sînt mediane, dreapta C_1B_1 rămîne paralelă cu BC și în consecință,

$$\frac{A_1M}{MA} + \frac{A_1N}{NA} = 1,$$

regăsind astfel, problema 554, R.M.F. anul IV, pag. 38.

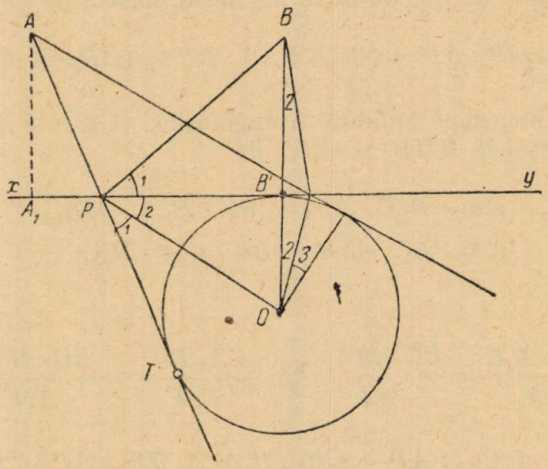
Mihai M. Stănciulescu, elev Tîrgoviște

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1364

Fie o dreaptă xy şi două puncte A şi B. Să se găsească un punct P pe dreapta xy astfel ca unghiul APx să fie dublul unghiului BPy.

* * *



Soluţie dată de **I. Drăgoescu,** *student, Timişoara.* — Fie A', B' proiecţiile pe xy ale punctelor A, B, şi O simetricul lui B faţă de xy, iar T punctul de tangenţă al tangente dusă din A la cercul de centru O şi rază $\frac{OB}{2}$.

Considerăm şi cealaltă tangentă la cerc dusă din A. Avem:

$$\sphericalangle APx = \sphericalangle B'PT = 2 \sphericalangle B'PO = 2 \sphericalangle B'PB = 2 \sphericalangle BPy,$$

unde $P = (xy, AT)$.

Problema 1401

Să se arate că funcţia:

$$y = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}$$

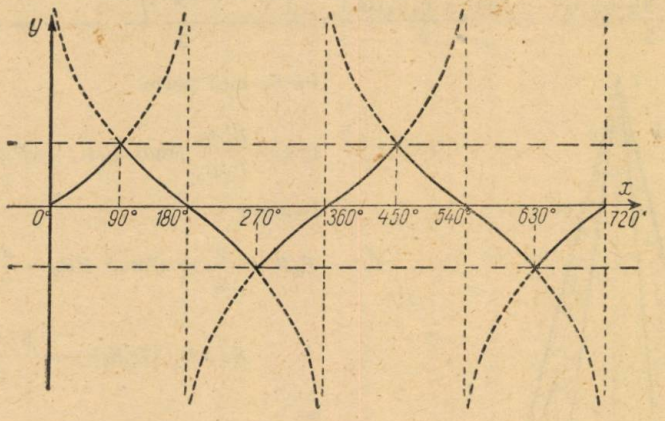
ia valoarea $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ *pentru* $0 \leqslant x \leqslant 90°$, $270° \leqslant x \leqslant 450°$, $630° \leqslant x \leqslant 810°$ *şi valoarea* $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ *pentru* $90° \leqslant x \leqslant 270°$, $450° \leqslant x \leqslant 630°$, *apoi să se reprezinte grafic funcţia y în intervalul* $(0°, 720°)$.

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie dată de **I. I. Cristea,** student, Bucureşti şi **N. Bărbuică,** elev, Craiova. — Ţinînd seamă că:

$$\sqrt{1 \pm \sin x} = \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \pm 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \left| \sin \frac{x}{2} \pm \cos \frac{x}{2} \right|$$

şi că pentru $\leqslant x \leqslant 90°$, $270° \leqslant x \leqslant 450°$, $630° \leqslant x \leqslant 810°$ avem: $\left|\cos\frac{x}{2}\right| \geqslant \left|\sin\frac{x}{2}\right|$ găsim $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Pentru $90° \leqslant x \leqslant 270°$, $450° \leqslant x \leqslant 630°$ avem $\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant \left|\sin\frac{x}{2}\right|$, deci $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\Big|$. — Graficul funcţiei y este:



Problema 1556

Se dă o piramidă exagonală regulată cu latura bazei a şi înălţimea h. Se taie această piramidă cu un plan ce trece printr-o latură a bazei şi prin centrul de greutate al feţei laterale opuse.

1. *Să se calculeze volumul care are ca bază secţiunea dată de acest plan şi ca vîrf, vîrful piramidei date.*

2. *Care este expresia acestui volum cînd unghiul diedru format de planul de secţiune cu planul bazei piramidei date este de* 30°?

Corneliu Georgescu

Soluţie. — Fie $ABCDEF$ baza şi V vîrful piramidei date. Considerăm planul care trece prin latura AF şi prin centrul de greutate al triunghiului VCD. Acest plan taie piramida după exagonul $AB_1C_1D_1E_1F$, în care $D_1C_1 \parallel DC$ şi $D_1C_1 = \frac{2}{3}DC = \frac{2}{3}a$. Exagonul de secţiune se proiectează pe planul bazei piramidei date în $AB_2C_2D_2E_2F$. Fie α unghiul diedru format de planul de secţiune cu planul bazei piramidei date. Avem:

$$S(AB_1C_1D_1E_1F) = S(AB_2C_2D_2E_2F) : \cos\alpha.$$

Ducem $C_2C_3 \perp AF$ şi atunci

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1C_2}{C_2C_3} = \frac{h}{3} : \frac{5R\sqrt{3}}{6} = \frac{2h}{5a\sqrt{3}},$$

căci dacă ducem $OL \perp AF$, avem

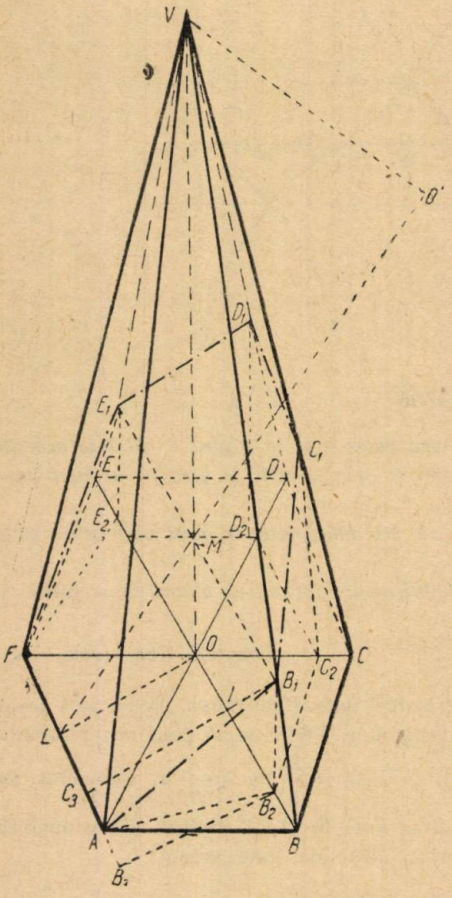
$$\frac{LO}{C_2C_3} = \frac{R}{\frac{SR}{3}}, \text{ de unde } C_2C_3 = \frac{5a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

și atunci:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{5\sqrt{3}\,a}{\sqrt{75\,a^2+4\,h^2}}.$$

Acum, $S(AB_2C_2D_2E_2F) = S(B_2C_2D_2E_2) + S(AB_2E_2F) =$

$$= \frac{(C_2D_2 + B_2E_2)\,C_2I}{2} + \frac{(AF + B_2E_2)\,C_3I}{2} = \frac{\left(\frac{2}{3}\,a + B_2E_2\right)\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{(a + B_2E_2)\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}.$$



Pe de altă parte

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}, \text{ unde } B_2B_3 \perp AF \text{ și } B_2B_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă

$$B_1B_2 = \frac{h}{5} \text{ și atunci } BB_2 = \frac{a}{5},\ B_2E_2 = \frac{8a}{5},$$

$$S(AB_2C_2D_2E_2F) = \frac{37\,a^2\sqrt{3}}{36},$$

iar

$$S(AB_1C_1D_1E_1F) =$$

$$\frac{37\,a^2\sqrt{3}}{36} : \frac{5\sqrt{3}\,a}{\sqrt{75\,a^2+4\,h^2}} = \frac{37\sqrt{75\,a^2+4\,h^2}}{180}.$$

$$\text{Vol. pir. } (VAB_1C_1D_1E_1F) =$$

$$= \frac{37\sqrt{75\,a^2+4\,h^2}\cdot a}{180}\cdot\frac{VO'}{3},$$

unde VO' este perpendiculara din V pe planul de secțiune.

$$VO' = VM\cos\alpha = \frac{4}{5}\,h\cdot\frac{5\sqrt{3}\,a}{\sqrt{75\,a^2+4\,h^2}}$$

și atunci

$$\text{vol. căutat} = \frac{37\sqrt{3}\,a^2h}{135}.$$

2. Cînd $\alpha = 30°$, $\operatorname{tg}30° = \frac{2h}{5a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, de unde $h = \frac{5a}{2}$ și vol. $= \frac{37\sqrt{3}\,a^3}{54}$.

Problema 1628

Bisectoarea unghiului B a unui triunghi ABC întîlnește respectiv înălțimea AD și mediana AM în F și E. Să se stabilească relația:

$$\frac{AE\cdot AF}{FM\cdot ED} = \frac{4\,\overline{AB}^2}{AC^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}.$$

* * *

Soluție și generalizare dată de **I. Rus**, Cluj. — Ținînd seama de teorema bisectoarei interioare putem scrie:

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{BD} \tag{1}$$

și

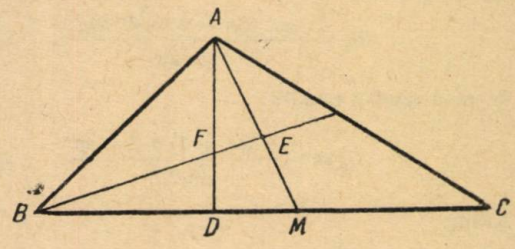
$$\frac{AE}{EM} = \frac{AB}{BM} = \frac{2\,AB}{BC}$$

sau

$$\frac{AE}{EM} = \frac{2\,AB}{BC} \tag{2}$$

și înmulțind relația (1) cu (2) obținem

$$\frac{AE \cdot AF}{FM \cdot ED} = \frac{2\,\overline{AB}^2}{BC \cdot BD},$$



și cum

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{\pm 2\,\overline{BC}}$$

($\pm$ după cum unghiul B este obtuz sau ascuțit), rezultă:

$$\frac{AE \cdot AF}{FM \cdot ED} = \frac{2\,\overline{AB}^2}{BC \cdot BD} = \frac{2\,\overline{AB}^2 \cdot 2\,BC}{BC \cdot |\,\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2\,|} = \frac{4\,\overline{AB}^2}{|\,\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2\,|}.$$

Pentru cazul particular $A = 90°$ avem,

$$\frac{AF \cdot AE}{FM \cdot ED} = \frac{4\,\overline{AB}^2}{|\,\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - (AB^2 + AC^2)\,|} = \frac{4\,\overline{AB}^2}{|\,\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2\,|} = 2$$

și astfel am obținut enunțul problemei 1628.

Problema 1802

Să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cos\,(2k-1)\,a.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. — Avem:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cos\,(2k-1)\,a = -\cos a + \cos 3a - \cos 5a + \cdots$$

$$+ \cos\,(4n-1)\,a = -\,[\cos a + \cos 5a + \cdots + \cos\,(4n-3)\,a] +$$
$$+\,[\cos 3a + \cos 7a + \cdots + \cos\,(4n-1)\,a].$$

Considerăm sumele:

$$S_1 = \cos a + \cos 5a + \cdots + \cos\,(4n-3)\,a,$$
$$S_1' = \sin a + \sin 5a + \cdots + \sin\,(4n-3)\,a,$$
$$S_2 = \cos 3a + \cos 7a + \ldots + \cos\,(4n-1)\,a,$$
$$S_2' = \sin 3a + \sin 7a + \ldots + \sin\,(4n-1)\,a.$$

Folosim formula lui M o i v r e: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. Avem:

$$S_1 + iS'_1 = (\cos a + i\sin a) + (\cos 5a + i\sin 5a) + \cdots$$
$$+ [\cos(4n-3)a + i\sin(4n-3)a] =$$
$$= (\cos a + i\sin a) + (\cos a + i\sin a)^5 + \cdots + (\cos a + i\sin a)^{4n-3} =$$
$$= (\cos a + i\sin a)\frac{(\cos a + i\sin a)^{4n} - 1}{(\cos a + i\sin a)^4 - 1} =$$
$$= \frac{\cos(2n-1)a\sin 2na}{\sin 2a} + i\frac{\sin(2n-1)a\sin 2na}{\sin 2a}.$$

De aci rezultă:

$$S_1 = \frac{\cos(2n-1)a\sin 2na}{\sin 2a}, \quad S'_1 = \frac{\sin(2n-1)a\sin 2na}{\sin 2a}.$$

În mod analog rezultă:

$$S_2 = \frac{\cos(2n+1)a\sin 2na}{\sin 2a}, \quad S'_2 = \frac{\sin(2n+1)a\sin 2na}{\sin 2a}.$$

Avem:

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos(2k-1)a = S_2 - S_1 = \frac{\cos(2n+1)a\sin 2na}{\sin 2a} -$$
$$- \frac{\cos(2n-1)a\sin 2na}{\sin 2a} = -\frac{\sin^2 2na}{\cos a} \text{ şi}$$

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sin(2k-1)a = \frac{\sin 4na}{2\cos a}.$$

Problema 1841

Ştiind că

$$\frac{\sin(x+z)}{\sin(y-z)} = m, \quad \frac{\cos(x-z)}{\cos(y+z)} = n,$$

în care m şi n sînt constante date, să se arate că

$$\frac{\cos 2z}{\cos(x-y)} = \frac{m+n}{mn+1}.$$

* * *

Soluţie. — Să calculăm numărătorul:

$$m+n = \frac{\sin(x+z)}{\sin(y-z)} + \frac{\cos(x-z)}{\cos(y+z)} = \frac{\sin(x+z)\cos(y+z) + \sin(y-z)\cos(y-z)}{\cos(y+z)\sin(y-z)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}[\sin(x+y+2z)+\sin(x-y)] + \frac{1}{2}[\sin(x+y-2z)-\sin(x-y)]}{\sin(y-z)\cos(y+z)} =$$
$$= \frac{\sin(x+y)\cos 2z}{\sin(y-z)\cos(y+z)}. \qquad (1)$$

Să calculăm și numitorul:

$$mn + 1 = \frac{\sin(x+z)\cos(x-z)}{\sin(y-z)\cos(y+z)} + 1 =$$

$$= \frac{\sin(x+z)\cos(x-z) + \sin(y-z)\cos(y+z)}{\sin(y-z)\cos(y+z)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 2z] + \frac{1}{2}[\sin 2y - \sin 2z]}{\sin(y-z)\cos(y+z)} = \frac{\sin(x+y)\cos(x-y)}{\sin(y-z)\cos(y+z)}. \qquad (2)$$

Împărțind relațiile (1) și (2) obținem

$$\frac{\cos 2z}{\cos(x-y)} = \frac{m+n}{mn+1}.$$

Problema 1842

Pe muchiile unui triedru dreptunghic ABC se ia $VA = a$, $VB = a$, $VC = c$. Să se arate că înălțimea h a piramidei $VABC$ este dată de relația:

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

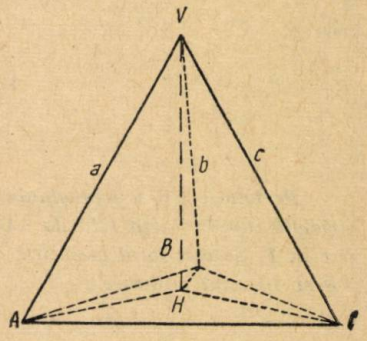
S. V. Ionescu, elev, Pitești

Soluție. — Avem:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$CA = \sqrt{c^2 + a^2}.$$



Punctul H joacă rol de ortocentru în triunghiul ABC. În acest caz avem:

$$HA = AB\frac{\cos A}{\sin C} = \sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{\cos A}{\sin C},$$

$$\cos A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2\,\overline{AB}\cdot\overline{CA}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2}{2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+a^2)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+a^2)}},$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB\cdot BC}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{c^4}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}.$$

Prin urmare:

$$HA = \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{a^2\sqrt{(c^2+c^2)(c^2+a^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+a^2)}\cdot\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = \frac{a^2\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Înălțimea h a acestei piramide va fi:

$$h^2 = VA^2 - HA^2 = a^2 - \frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

de unde

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Problema 1843

Să se simplifice expresia următoare ($a > 0$):

$$E = \frac{a^{\frac{3}{2}} \dfrac{1}{1-\sqrt{a}} + a + \dfrac{a}{1+\sqrt{a}} + \dfrac{a}{(1+\sqrt{a})^2} + \cdots}{\dfrac{a+3}{a^2+2a-3} + \dfrac{2-2a}{a^2-2a+1}}.$$

* * *

Soluție. — Avem:

$$a + \frac{a}{1+\sqrt{a}} + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^2} + \cdots =$$

$$= \frac{a}{1 - \dfrac{1}{1+\sqrt{a}}} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}(1+\sqrt{a}).$$

Deci, numărătorul expresiei date va fi

$$\frac{a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}(1+\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\ ;\ \text{numitorul este} - \frac{1}{a-1}.$$

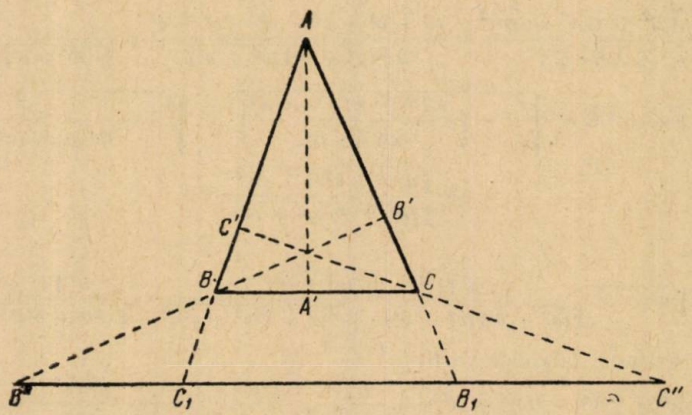
Deci:

$$E = \frac{\sqrt{a}(1-a}{1-\sqrt{a}} = a + \sqrt{a}\ .$$

Problema 1856

Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct fix M din care se duce o dreaptă variabilă care întîlnește laturile AB și AC respectiv în N și P. Cevienele CN și BP se întîlnesc în I. Se cere locul geometric al punctului I și să se arate că mijloacele segmentelor AI, NP și BC sînt colineare.

Dragomir Donescu



Soluție. — Luînd pe M ca pol, punctul I va descrie polara punctului M față de laturile unghiului BAC, adică dreapta AI. Luăm α, β, γ mijloacele diagonalelor patrulaterului complet $PCNBIA$, ele se vor găsi pe o dreaptă numită dreapta Newton — Gauss.

Problema 1861

Fie m mediana vîrfului A în triunghiul ABC de laturi a, b, c. Să se arate că:

$$bc - \frac{a^2}{4} \leqslant m^2 \leqslant bc + \frac{a^2}{4} \cdot$$

N. N. Mihăileanu

Soluție. — Valoarea medianei m_a în funcție de laturi este:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

sau

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \cdot \tag{1}$$

Știind că

$$\frac{b^2 + c^2}{2} \geqslant bc \tag{2}$$

și ținînd seama de relația (2), relația (1) devine

$$m_a^2 \geqslant bc - \frac{a^2}{4} \cdot$$

Mai scriem relația (1) sub forma:

$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}$, dar din relația cosinusurilor: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ scoatem:

$$bc\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \text{ dar cum } \cos A < 1, \text{ rezultă}$$

$$bc > \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \text{ și prin urmare} \tag{3}$$

$$m_a^2 \leqslant bc + \frac{a^2}{4} \cdot$$

Problema 1863

Patratul ABCD este așezat într-o poziție dată, fixă, pe foaia de hîrtie. Dacă se rotește apoi patratul în jurul punctului A de un unghi oarecare α, se obține noua lui poziție AB'C'D'. Se cere:

a) *Să se arate că CC' este egală cu diagonala patratului care are latura DD'.*

b) *Notînd cu E intersecția dreptelor BB' și DD' să se arate că unghiul AEC este drept.*

c) *Să se arate că dreptele BB', CC' și DD' sînt concurente.*

Olimpiada Matematică 1955, clasa VIII-a

Soluție. — a) Triunghiurile AD'D și AC'C fiind asemenea, avem:

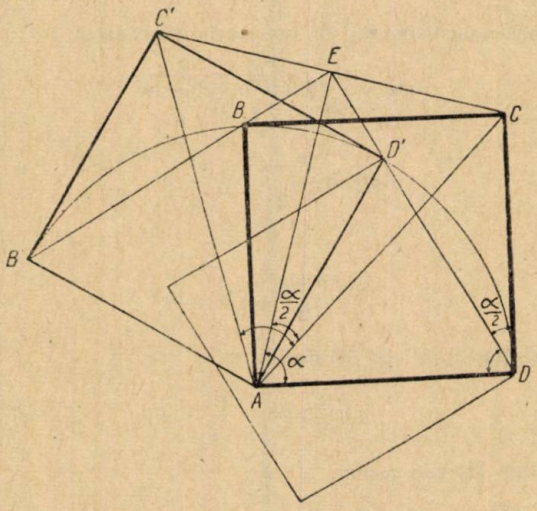
$$\frac{CC'}{DD'} = \frac{AC}{AD} = \sqrt{2} \quad *\,*\,* \quad CC' = \sqrt{2}\,DD'.$$

b) În triunghiul ADD' unghiul $D'DA = 90 - \frac{\alpha}{2}$; dar cum unghiul $ADC = 90°$

atunci:

$$\sphericalangle D'DC = \frac{\alpha}{2} \cdot$$

Ducem bisectoarea unghiului $C'AC$ astfel ca $\sphericalangle EAC = \frac{\alpha}{2}$. Atunci patrulaterul $AECD$



este inscriptibil deoarece: $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EDC$. Într-un patrulater inscriptibil: $\sphericalangle ADC + \sphericalangle AEC = 180°$, deci $\sphericalangle AEC = 90°$.

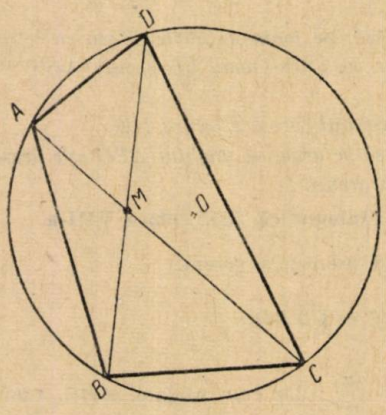
c) În triunghiul $AC'C$ dreapta AE este și înălțime, deci perpendiculară pe baza CC'. Atunci punctul E se află pe bază și anume, la jumătatea ei.

Problema 1866

Dacă intersecția diagonalelor unui patrulater inscriptibil este în mijlocul diagonalei BD, atunci există relația

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\,AC^2.$$

Stelian Lambă, Constanța



Soluție. — Ținînd seama că AM și CM sînt mediane în triunghiurile ABD și CBD, avem:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}, \qquad (1)$$

$$CM^2 = \frac{BC^2 + CD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \cdot \qquad (2)$$

Scriem dublul puterii punctului M față de cercul O:

$$2\,AM \cdot CM = 2\,\frac{BD^2}{4} \cdot \qquad (3)$$

Adunăm relaţiile (1), (2), (3):

$$AM^2 + CM^2 + 2\,AM \cdot CM = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} + \frac{BC^2 + CD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} + 2\,\frac{BD^2}{4},$$

$$(AM + CM)^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2}{2}.$$

Cum $AM + CM = AC$, rezultă tocmai relaţia de demonstrat:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2\,AC^2.$$

Problema 1872

Să se arate că ecuaţiile

$$a\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - a^2} = b,$$

$$b\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - b^2} = a$$

admit rădăcina comună

$$x = a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}.$$

Discuţie.

C. Ionescu-Ţiu

Soluţia I. — Prima ecuaţie se mai poate scrie:

$$a\sqrt{1 - x^2} = b - x\sqrt{1 - a^2}.$$

Prin ridicare la patrat obţinem:

$$x^2 - 2\,bx\sqrt{1 - a^2} + b^2 - a^2 = 0.1. \qquad (1)$$

La fel transformăm şi ecuaţia a doua:

$$x^2 - 2\,ax\sqrt{1 - b^2} + a^2 - b^2 = 0. \qquad (2)$$

Ecuaţia (1) dă rădăcinile:

$$x = b\sqrt{1 - a^2} \pm a\sqrt{1 - b^2}.$$

Ecuaţia (2) va da rădăcinile:

$$x = a\sqrt{1 - a^2} \pm b\sqrt{1 - a^2}.$$

Se observă deci că ecuaţiile (1) şi (2) au rădăcina comună:

$$x = a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2};$$

x va fi real dacă a şi b iau valori cuprinse între $+1$ şi -1.

Soluţia II-a dată de **Alexa Ion**, Sibiu. — Înmulţind prima ecuaţie cu b şi a doua cu a, apoi adunîndu-le obţinem:

$$x\,(b\sqrt{1 - a^2} - a\sqrt{1 - b^2}) = b^2 - a^2.$$

de unde

$$x = \frac{b^2 - a^2}{b\sqrt{1 - a^2} - a\sqrt{1 - b^2}}.$$

Înmulţim numărătorul şi numitorul cu conjugata numitorului şi avem:

$$x = a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}$$

care este rădăcina comună a celor două ecuaţii.

Problema 1888

Se așează pe un plan orizontal P o sferă de rază R și un con drept de rază R și înălțime $2R$. La ce distanță x de planul P trebuie dus un plan orizontal Q pentru ca volumul trunchiului de con cuprins între planele P și Q să fie egal de n ori cu volumul segmentului sferic cuprins între aceleași plane. Pentru ce valori ale lui n problema este posibilă?

* * *

Soluție. — Fie r raza trunchiului de con (raza mică). Din asemănarea celor două triunghiuri dreptunghice formate rezultă:

$$\frac{r}{R} = \frac{2R - x}{2R}.$$

De aici deducem: $r = R - \frac{x}{2}$. Conform enunțului problemei avem:

$$\frac{\pi x}{3}\left[R^2 + R\left(R - \frac{x}{2}\right) + \left(R - \frac{x}{2}\right)^2\right] = n\frac{\pi x^2}{3}(3R - x).$$

Simplificînd cu $\frac{\pi x}{3} \neq 0$ și făcînd reducerea termenilor asemenea obținem ecuația:

$$(4n + 1)x^2 - 6R(1 + 2n)x + 12R^2 = 0$$

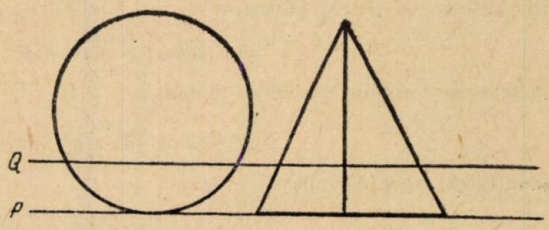
ale cărei rădăcini sînt

$$x_{1,2} = \frac{3R(1 + 2n) \pm R\sqrt{3(12n^2 - 4n - 1)}}{4n + 1}.$$

Discuție. Pentru ca problema să fie posibilă este necesar și suficient ca:

$12n^2 - 4n - 1 \geqslant 0$,

$n \geqslant \frac{1}{2}$ sau $n \leqslant -\frac{1}{6}$.



Deoarece condiția $n \leqslant -\frac{1}{6}$ nu interesează, rămîne

$$n \geqslant \frac{1}{2}.$$

În cazul particular $n = \frac{1}{2}$, avem $x = \frac{2}{3}R$.

Problema 1898

Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{a^0 + b^0}{(a + b)^0} + \frac{a^1 + b^1}{(a + b)^1} + \frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2} + \ldots + \frac{a^n + b^n}{(a + b)^n}.$$

I. I. Cristea

Soluție dată de **I. Lupuțiu** (București) și **Monica Vasiliu** (Botoșani). — Suma dată se poate descompune în două sume:

$$S_1 = \frac{a^0}{(a + b)^0} + \frac{a^1}{(a + b)^1} + \frac{a^2}{(a + b)^2} + \ldots + \frac{a^n}{(a + b)^n},$$

$$S_2 = \frac{b^0}{(a + b)^0} + \frac{b^1}{(a + b)^1} + \frac{b^2}{(a + b)^2} + \ldots + \frac{b^n}{(a + b)^n},$$

$$S_1 = 1 + \frac{\frac{a}{a + b}\left[\left(\frac{a}{a + b}\right)^n - 1\right]}{\frac{a}{a + b} - 1} = 1 + \frac{a}{b}\left[\frac{(a + b)^n - a^n}{(a + b)^n}\right],$$

$$S_2 = 1 + \frac{\dfrac{b}{a+b}\left[\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^n - 1\right]}{\dfrac{b}{a+b} - 1} = 1 + \frac{b}{a}\left[\frac{(a+b)^n - b^n}{(a+b)^n}\right],$$

$$S_n = S_1 + S_2 = \frac{(a+b)^{n+2} - (a^{n+2} + b^{n+2})}{ab\,(a+b)^n}.$$

PROBLEME PROPUSE *)

2288. – Să se contruiască triunghiul $A'B'C'$ avînd vîrfurile sale pe laturile triunghiului ABC, astfel încît ortocentrul lor să coincidă cu centrul cercului ABC.

Gh. Dobrotescu, Predeal

2289. – Dacă a, b, c sînt numere pozitive, să se arate că:

$$(1 + a + b + c + ab + bc + ca)^3 \leqslant$$
$$\leqslant [(1+a)^2 + c(1+a+c)] \cdot [(1+b)^2 + a(1+b+a)] \cdot [(1+c)^2 + b(1+c+b)].$$

C. Ionescu-Ţiu

2290. Pe mediana AA_1 din triunghiul ABC se ia un punct oarecare P şi se notează $\sphericalangle PBC = \beta$ şi $\sphericalangle PCB = \gamma$. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{A_1P}{A_1A} \cdot \frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)}.$$

Mircea Adam

2291. Să se arate că expresia:

$$E = (a + x)^n - anx^{n-1} - x^n$$

este divizibilă cu a^2 şi să se generalizeze.

I. Lupuţiu

2292. Se dă o piramidă regulată cu baza un patrat a cărei muchie laterală face cu planul bazei un unghi α. Secţionînd această piramidă cu un plan înclinat cu unghiul φ faţă de bază, să se afle aria secţiunii obţinute în funcţie de unghiurile α şi φ şi latura a a patratului de bază.

Lucia Both, an I Fac. mecanică, Timişoara

2293. Să se determine $A(x)$ şi $B(x)$ aşa ca:

$$(2x^3 + 4x^2 + 8x + 3)\,A(x) + (x^2 + x + 2)\,B(x) \equiv 1,$$

unde $A(x)$ şi $B(x)$ sînt polinoame în x.

Mircea Florescu, student, Bucureşti

2294. Două baloane de sticlă A şi B avînd acelaşi volum şi comunicînd printr-un tub foarte îngust, conţin acelaşi gaz şi sînt menţinute ambele la temperatura de 60°.

La ce temperatură trebuie pus balonul B, pentru ca balonul A rămînînd la 60°, să treacă din A în B a zecea parte din masa gazului conţinut iniţial în A?

(Cercul de probleme de fizică din Bucureşti)

---

*) Clasa VIII-a 2293, 2294, 2399, 2300, 2307, 2310).

2295. Să se construiască triunghiul ABC înscris într-un cerc dat, cunoscînd unghiul A care satisface şi relaţia: $\cos^2 A = \cos B \cdot \cos C$.

Gh. Bazacov

2296. Să se determine m astfel încît rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2 + (m - 7)\,x + m^2 - 9\,m + 5 = 0$$

să satisfacă condiţia $x_1 < 1 < x_2 < 3$.

Th. Mateescu, student, Timişoara

2297. Dacă $\alpha + \beta = 45°$, să se arate că:

$$\sec^2 \alpha\,(1 + \operatorname{ctg} \beta)^2 + \sec^2 \beta\,(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 2\,(\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{coec}^2 \beta).$$

N. Păun, R. Vîlcea

2298. Să se împartă volumul unei piramide patrulatere în medie şi extremă raţie printr-un plan ce trece prin una din muchiile laterale.

Gh. Bucur, elev, Pucioasa,

2299. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{nx + my}{xy + mn} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1},$$

$$\frac{my - nx}{xy - mn} = \frac{b^2 - 1}{b^2 + 1}.$$

Gh. Nicoară, Bucureşti

2300. O maşină pneumatică are capacitatea corpului pompei de 3 l. După patru curse de piston presiunea în recipientul pompei devine de 0,5 atm. Ştiind că presiunea la început în recipient a fost de 128 atm, să se calculeze:

a) capacitatea recipientului pompei maşinii pneumatice;

b) dacă maşina pneumatică ar fi fost o maşină simplă de compresiune avînd aceleaşi dimensiuni ca maşina pneumatică, care ar fi fost presiunea în recipient după opt curse de piston, presupunînd presiunea aerului înainte de începerea curselor pistonului de 2 atm.

Emil Stăncescu, elev, Giurgiu

2301. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x + z = 2,$$

$$xz + y + u = 2,$$

$$xu + yz = -2,$$

$$yu = 1.$$

Petre Albăstroiu, student, Bucureşti

2302. Considerăm un cablu de aluminiu de lungime $l = 4{,}5$ m şi diametrul $d = 0{,}8$ cm, într-un cîmp electric. De cîţi electroni liberi dispunem şi cît timp ar circula un curent cu intensitatea de 3 A, presupunînd că toţi electronii liberi se pun în mişcare? Densitatea aluminiului este 2,8.

Virgil Clapon, Bacău

2303. Să se rezolve sistemul:

$$xy = 2,$$

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{4}.$$

Gh. Călugăriţa

2304. Să se rezolve ecuația:

$$x^{10} + x^9 + x^6 + 2x^5 + x^4 + x + 1 = 0.$$

Const. Berdan

2305. — Să se determine numerele întregi a, b, c, astfel ca numărul $N = \dfrac{ab}{ac + b}$ să fie întreg.

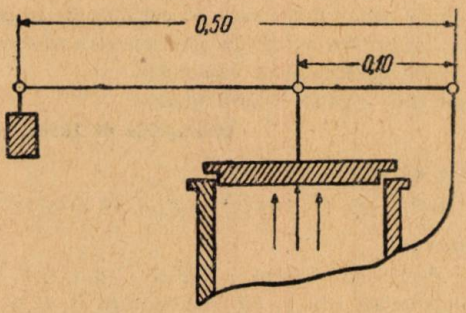
Gh. Buicliu

2306. Se consideră tetraedrul $A_1 A_2 A_3 A_4$ cu centrul de greutate G și un punct Z din spațiu. Să se stabilească relația:

$$\sum \overline{ZA_1}^2 = 4\ ZG^2 + \sum \overline{GA_1}^2.$$

M. D. Zigulescu, student, București

2307. O supapă de siguranță se compune dintr-o pîrghie AB lungă de 50 cm, avînd capătul B fix. Diametrul ventilului fiind 80 mm, greutatea proprie a pîrghiei 5 kg și poziția



punctului C fiind la 10 cm de capătul B, se întreabă: ce greutate trebuie atîrnată de capătul A pentru ca supapa să se deschidă cînd presiunea aburilor trece de 6 kg/cm^2.

* * *

2308. Să se determine m și să se rezolve ecuația:

$$x^3 - (m + 1)x^2 + (2m + 1)\,x - (2m - 4) = 0,$$

știind că suma cuburilor rădăcinilor este egală cu patratul sumei lor.

L. V. Panaitopol

2309. Să se calculeze k din relația

$$z = 2 \operatorname{arc\,ctg} k,$$

știind că,

$$3x + 3y + z = \pi,$$

$$x + y = \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

H. Dăscălescu

2310. Un corp trebuie comprimat cu o forță de 80 tf folosind o presă hidraulică la care raportul suprafețelor pistoanelor este de 1/100. Pentru aceasta pistonul cel mare trebuie să se ridice la 60 cm.

Să se calculeze cîte apăsări pe minut va trebui să facă pistonul cel mic dacă el coboară cu 20 cm la fiecare apăsare. Presa are randamentul de 80 % și este acționată de un motor cu puterea de 4 CP.

Teoria. — Masă și greutate.

(Olimpiada de fizică, clasa VIII, aprilie 1956)

2311. Şinele unei căi ferate fac o curbă cu raza de 400 m.

a) Să se calculeze unghiul de înclinare al planului şinelor faţă de orizontală, ştiind că trenul are 36 km/oră.

b) Ce viteză maximă în km/oră poate avea un tren ca să treacă fără pericol de răsturnare prin această curbă, dacă şina exterioară este cu 12,75 cm mai ridicată decît cea interioară curbei, iar ecartamentul şinelor este de 1,35 m. Se dă $g = 9{,}8$ m/s^2.

Teoria: — Gaz perfect şi gaze reale.

(Olimpiada de fizică, clasa IX, aprilie 1956)

2312. Un ceas de precizie cu pendul, care bate secunda la suprafaţa pămîntului, este mutat la o altitudine de 200 m în aceiaşi localitate.

a) Ce influenţă va avea această mutare asupra mersului ceasului şi cu cîte secunde va varia mersul lui în 24 ore? Raza pămîntului $R = 6400$ km.

b) Dacă la suprafaţa pămîntului temperatura ar fi de 20°C, iar tija pendulului ar fi din oţel, ce temperatură ar trebui să fie la altitudinea de 200 m pentru ca pendulul să meargă normal? Coeficientul de dilatare: $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

2313. O oglindă sferică concavă are raza de curbură de 14 cm. La ce distanţă de vîrful oglinzii pe axa principală, trebuie aşezat un obiect pentru ca imagina lui să se formeze cu 4 cm mai aproape de vîrful oglinzii decît obiectul?.

Teorie. — Fenomene care explică natura luminii.

(Olimpiada de fizică, clasa, X aprilie 1956)

2314. — Să se arate că expresia

$$E = a(x^5 + y^5) + 5\,bxy\,(x^3 + y^3) + 10\,cx^2y^2\,(x + y)$$

se poate pune sub forma:

$$A\,(x + y)^5 + B\,(x + ky)^5 + C\,(y + kx)^5,$$

A, B, C, k fiind independente de x şi y. Să se determine A, B, C, k.

C. Ionescu-Bujor

2315. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, să se arate că

$$\frac{15}{4} \leqslant \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{a+c} + \frac{p+c}{a+b} \leqslant \frac{9}{2},$$

unde $2p$ este perimetrul triunghiului.

N. Ciorănescu

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI**)

E: 851. Suma vîrstelor lui Leonardo da Vinci, Galileu şi Newton este de 229 ani. Dacă Leonardo da Vinci ar fi trăit încă 14 ani, atunci el ar fi atins jumătate din suma vîrstelor lui Galileu şi Newton, însă el a murit cu un an înainte de a atinge de 11 ori diferenţa dintre vîrstele lui Newton şi Galileu. Cît a trăit fiecare?

I. Munteanu

E: 852. Diferenţa a două numere este 118. Împărţind numărul cel mare la cel mic obţinem cîtul 2 şi restul 47. Să se afle cele două numere.

* * *

---

2) Problemele 2314 şi 2315 sînt extrase din « Gazeta Matematică », unde s-au propus cu numerele 4740 şi 4993, respectiv.

**) Clasa V-a (E: 851, 852, 854, 860; VI-a (E: 853, 855, 858, 859) VII-a (E: 856, 857, 861, 862).

E: 853. Din perimetrul triunghiului isoscel ABC, de 36 cm, ale cărui laturi egale sînt în raport cu baza de 5:8, să se calculeze diametrul cercului circumscris triunghiului dat, știind că unghiul de la vîrf este de 120°. (Două soluții).

B. I. Baieră

E: 854. Patru pionieri pleacă pe rînd dintr-o localitate în aceiași direcție. La un moment dat ei au parcurs următoarele distanțe: primul 18 km, al doilea 6 km, al treilea 4 km și ultimul 2 km. După cîți kilometri de mers din acel moment suma distanțelor parcurse de primul pionier este egală cu cele parcurse de ceilalți 3 pionieri?

G. Grofșoreanu, elev, București

E: 855. Un țăran întovărășit consumă jumătate plus 1/4 quintal din grîul recoltei anului pentru nevoile casei; apoi vinde jumătate din rest plus 13/4 quintale pentru a-și instala o baie și pentru a-și cumpăra un aparat de radio. Știind că i-au mai rămas 112,50 kg grîu se întreabă ce cantitate de grîu a avut țăranul la început?

Domide Leontin, Rodna

E: 856. Să se arate că

$$\frac{a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3}{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)} + 1 = 0.$$

Gh. Stoian

E: 857. Să se afle dimensiunile unui dreptunghi cu perimetrul de 880 m, știind că acest dreptunghi este asemenea cu un altul care are dimensiunile de 52 m și 36 m?

* * *

E: 858. Din două localități A și B, doi motocicliști pleacă în același moment, cu viteze diferite, primul de la A către B, iar celălalt din B către A. Ei se întîlnesc pe drum într-un punct M. Primul motociclist parcurge restul drumului de la M pînă la B, în 45 minute, iar celălalt restul drumului de la M pînă la A în o oră și 20 minute. Știind că fiecare din cei doi motocicliști au mers pe întreg parcursul AB cu viteze constante, să se afle în cît timp a parcurs fiecare din ei întreaga distanță.

* * *

E: 859. Se dau două aliaje cu titlurile de 0,920 și 0,750. Ce cantitate trebuie să luăm din fiecare pentru a obține 8 kg de aliaj cu titlul de 0,850?

* * *

E: 856. Dacă tata ar avea cu 5 ani mai mult, atunci vîrsta fratelui mai mic ar fi $\frac{1}{3}$ din vîrsta lui, iar dacă ar avea cu 5 ani mai puțin, vîrsta mea ar fi $\frac{1}{2}$ din vîrsta lui. Să se afle vîrsta fiecăruia știind că suma vîrstelor noastre este mai mică cu nouă ani decît vîrsta tatii.

Șerban I. Popescu

E: 861. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x + \dfrac{a-b}{a+b}}{x + \dfrac{2ab}{b^2-a^2}} = \frac{x - \dfrac{b^2-a^2}{a^2b+ab^2} : \left(\dfrac{a}{b^2-ab} + \dfrac{b}{a^2-ab}\right)}{x + b\left(\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2} + \dfrac{1}{a^2+b^2-2ab}\right) : \left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b-a}\right)}$$

Ioan Șt. Mușat

E: 862. Podul grajdului unei G.A.C. are forma unei prisme triunghiulare cu fundurî triunghiuri dreptunghice oarecare, cu perimetrul de 28,8 m și lățimea grajdului de 12 m. Să se calculeze care este lungimea grajdului dacă volumul podului acestui grajd este de 725, 760 m^3?

I. N. Munteanu

POŞTA REDACŢIEI

Mai multor corespondenţi. — Problemele propuse sînt cunoscute, ele găsindu-se în culegeri sau în alte publicaţii; altele sînt puţin schimbate faţă de cele recent publicate. Aceşti tovarăşi sînt sfătuiţi să rezolve cît mai multe din problemele propuse, să facă discuţii asupra lor sau să găsească diferite metode de rezolvare, şi abia mai tîrziu să înceapă să propună şi probleme, însă originale.

Tov. *Adler Iulius*, Bucureşti. — Problema ce aţi propus — cu paznicii şi merele — are un enunţ lung (34 rînduri) şi nu necesită o rezolvare deosebită, deci nu poate fi publicată.

Tov. *Anatolie Leuca* (Dej), *Ariton Vasile* (Galaţi) şi altor corespondenţi. — Pentru ca pe viitor să nu mai rămîneţi cu numere lipsă din revista G.M.F. — B, vă sfătuim să vă abonaţi prin oficiul poştal local pentru a primi acasă revistele ce vor apare. Volumele G.M.F.-B pe anul 1955, ca şi cele pe anul 1954 şi mai vechi, sînt epuizate.

Tovarăşii elevi care au fost premiaţi sau menţionaţi pentru activitatea lor la G.M.F. seria B pe anul 1955 şi nu au primit pînă în prezent cărţile acordate sînt rugaţi să ne comunice de îndată, printr-o *carte poştală*, adresa lor exactă unde să li se trimită cărţile.

Tov. *Bîscă Marcel* (Focşani) şi *Tomoiagă Doru* (Sighet) şi altor crespondenţi — Soluţii la problemele propuse de la rubrica « probleme propuse », de la « chestiuni de examen » sau de la rubrica « probleme propuse pentru şcoala de 7 ani », se primesc începînd de la apariţia revistei şi pînă la o săptămînă după apariţia celui de-al patrula humăr al revistei, care urmează după numărul ale cărui probleme expiră la termenul de primire a soluţiilor. De exemplu: nu se va ţine seamă de soluţiile primite la problemele publicate în nr. 7 (iulie 1956) dacă ele vor sosi la redacţie după trecerea unei săptămîni de la apariţia numărului 10 (octombrie 1956), adică circa 30 octombrie 1956.

— Mărirea rubricii de «*note matematice*», publicarea mai devreme a « *rubricii rezolvitorilor* » şi dezvoltarea rubricii de « *probleme rezolvate*» nu se poate realiza cu actualul număr de pagini afectat revistei.

Tov. *Peter Miklos* (Arad) şi altor corespondenţi — Date asupra exeamenelor de admitere şi a cursurilor ce se vor preda în facultăţile ce doriţi să urmaţi este bine să le cereţi direct facultăţilor respective şi în timp util. Programa de examen este publicată din vreme în « Gazeta învăţămîntului » şi cuprinde cunoştinţele ce se predau în şcoala medie.

Tov. Călin Mihai (Alexandria, str. Griviţa Roşie 127). — Pentru procurarea de numere mai vechi ale G.M.F. seria B, vă publicăm adresa pentru a primi corespondenţă de la acei care doresc să vă vîndă eventual, unele numere mai vechi.

Tov. *Bogdan Baieră*, profesor (Păuneşti, Adjud). — Am primit raportul ce aţi trimis în legătură cu *cercul de elevi ai şcoalei de 7 ani* unde predaţi, pe anul şcolar 1955—56. Continuaţi şi veţi obţine astfel rezultate frumoase. Noi păstrăm materialul trimis, pentru evidenţă.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din numărul 7, Rezolvitorii din localităţile care începe cu literele L—z)

EVIDENŢIAŢI.

Ioniţă Tudor (student, Oraşul Stalin), *Baltag Vasile* (cl. IX Ploeşti), *Pupăzan V. Nicolae* (U. M. Sibiu), *Pop Florica* (cl. VIII Zalău), *Brînduş Lucian* (cl. X. Oraşul Stalin), *Tudor Constantin* (cl. X Tîrgovişte), *Hegedüs Attila* (cl. X Tîrgovişte), *Grigorescu Ion* (cl. X R. Vîlcea), *Steinberg Mauriciu* (cl. X Roman), *Serdeşniuc Aurel* (an I, şcoala tehnică Lugoj), *Stan N. Dumitru* (cl. X Pucioasa), *Lăzărescu Emil* (cl. IX Moreni), *Podeanu Corneliu* (cl. X Oraşul Stalin), *Pleniceanu Ion* (student Petroşani), *Stănculescu M. M.* (clasa X Tîrgovişte), *Ciubotaru C. C.* (cl. X Truşeşti), *Marchiş Ion* (cl. X Reşiţa), *Bergthal Cristian* (cl. VIII Petroşani), *Bîrsan Ion* (cl. IX Sibiu), *Dudaş Nicolae* (cl. X Oraşul Stalin), *Alexa Ioan* (U. M. Sibiu), *Hodor Constantin* (cl. VIII Piatra Neamţ), *Ciortan Vasile* (cl. VIII Ploeşti), *Iftimie Viorel* (cl. X Rădăuţi), *Beu Gh. Ioan* (cl. X R. Sărat), *Ciobanu I. Ioan* (clasa X Oraşul Stalin), *Paulescu Dan* (cl. X. R. Săsat), *Ancuţoiu Gh.* (cl. IX Rîmnicul Vîlcea), *Nerodea Tiberiu* (cl. X Timişoara), *Sarion Virgil* (cl. X Rîmnicul Vîlcea).

SOLUŢII PRIMITE PÂNĂ LA 1 MARTIE 1956

LUGOJ. — Clasa VI. Florea Doina (1955, E: 723, 725, 726, 731, 735, 738, 747, 749, 750, 752, 754). Clasa VII. Buba Orest (1924, E: 725, 727, 729—731, 735, 737, 738, 740, 742), Munteanu Ionel (E: 725, 727, 729, 731, 733, 735—739, 747, 749, 750, 752, 758). Clasa IX.

Doba Dumitru (1875, 880, 881, 891, 936, 947, 948, 951, 954—956, 960), Florea Dorel (1878, 880, 881, 890, 891, 901, 919, 925, 931, 936, 947, 948, 951, 954—958, 960, 962, 971, 975, 992), Negru Simion (1874, 875, 877, 879, 882, 891, 914, 924, 943, 947, 956), Păpuşoi Gh. (1880, 881, 947—949, 951, 955—958, 960, 962). Şcoala tehnică de contabilitate agricolă. Anul I. *Serdeşniuc Aurel* (1618, 756, 762, 830—835, 837, 838, 841, 844, 847, 851, 858, 863. 871, 872, 875—878, 880, 882—884, 887, 889, 891—894, 900, 911, 914, 915, 917, 922, 924, 929, 937, 940, 942—945, E: 617, 659, 687, 708—711, 713, 714, 716, 718, 720, 722, 725—729, 731).

MEDIAŞ. Jilăreanu S. Gheorghe (1867, 888, 890, 891, 915, 916, 918, 920—928, 931, 938, 940, 941, 943, 944), Kästner Traute (1835, 841, 877, 881, 883—885, 891), Stănescu Dumitru (1877—880, 885, 904, 943, 947, 948, 951, 954—956, 960, 961—964, 971, 974, 990, 992, 993).

MORENI (Ploeşti). — Clasa IX. *Lăzărescu Emil* (1875—884, 889, 891, 914, 915, 922, 937, 940, 944, 947—951, 954—958, 960—963, 971, 974—977, 990, 992, 993, P).

NĂSĂUD (Cluj). Clasa VIII. Istrate Tiberiu (1949, 955, 957, E: 727, 729, 731, 733, 741). Clasa X. Lucuţa Eremia (1831, 834, 835, 874, 882, 883, 891, 893, 898, 947, 951, 954—957, 961).

NEGREŞTI (Oaş, Baia). Clasa X. Berinde Ştefan (1908, 947—949, 951, 954, 956, 957, 962, 964, 971, 976, 997).

ORADEA. Clasa VII. Enescu M. Anca (E:725, 727—732, 735, 738—750). Clasa IX. Enescu Cornelia (1877, 883, 891, 923, 925, 930, 943, 948, 950, 951, 954—956, 958, 960—963, 976, 977), Nicoară A. Nicolae (1882, 884, 930, 940, 943, 944, 048, 950, 951, 954—956, 960, 977).

ORŞOVA. Clasa IX. Petroi Constantin (1833, 838, 842, 844, 848, 849, 851, 867, 875, 882, 894, 922, 941).

ORAŞUL STALIN. Clasa VIII. Cîrdan (E: 708—711, 714, 716, 718, 721, 722, 747—751, 754), Florea Romulus (1876, 882, E: 714, 716, 720, 722, 725, 727, 729, 731, 735, 737), Lazăr Horia (1875, 882, 955, 956, 976, E: 716, 725, 727, 729, 731, 735, 738, 741, 750, 752), Popovici Sergiu (1875, 882, 955, 956, 970, 971, 976, E: 714, 716, 720, 722, 725, 727, 749, 754, 758), *Stoian Mircea* 1830, 838, 848, 849, 851, 875, 876, 879, 882, 884, 915, 920, 924, 931, 940, 944, 949, 954—957, 960, 962, 970, 971, 976, E: 719, 721, 730, 741, 747, 750—752, 754, 757, 758), Ţeculescu Serban (1875, 879, 882, E: 714, 716, 720—722, 725, 729, 740, 747). Clasa IX. Dragomir Adrian (1851, 857, 861, 862, 866, 868, 871, 874—877, 879, 880, 882, 884, 885, 887, 889, 890), Jinga Gheorghe (1875—877, 882—884, 915, 937, 940, 944, 948, 949, 951, 952, 954—957, 960, 962—964, 976, 977, 992, 993). Clasa X. *Brînduş Lucian* (1878, 888, 891, 892, 898, 904, 905, 911, 915—918, 920, 922, 924—926, 937, 938, 940, 943—945, 947—949, 951—958, 960—964, 966, 967, 971, 974—977, 987, 992, 993, 996), Budin I. Pavel (1918, 927, 948—951, 954—958, 960, 971, 974—976, 990), *Ciobanu I. Ioan* (1877, 879—882, 891, 894, 898, 914, 915, 917, 924, 931, 838, 940, 943, 944, 948, 949, 951, 952, 954—958, 960, 962, 971, 973—977,), Ciurea Vlad (1876, 879, 880, 884, 924, 945, 948, 951, 955, 956, 960, 971, 977), Craioveanu Ştefan (1875, 878—883, 894, 914, 940, 946, 948, 951, 955—960, 962—964, 975), *Dudaş Nicolae* (1832, 833, 835, 842, 874, 876—884, 914, 915, 917, 947—949, 951 952, 954—964, 974—977), Lupaşcu Mihai (1875—878, 881, 882, 891, 894, 946, 947, 949, 950), Măiereanu Mircea (1877, 879, 891, 948, 949, 951, 955—958, 960, 961, 975), Mezaroş Constanţa (1833—837, 843—845, 947, 974, 975, 891), Minea Florin (1940, 948, 949, 951, 954—958, 960, 962—964, 968, 970, 971, 974—976), Modval N. (1947—949. 951, 952, 955—964, 967, 974—977), Nedelescu Stelian (1875, 877, 879, 882, 884, 891, 915, 920, 924, 938, 940, 943), Păcurariu Dan (1875, 879, 882, 915—920, 922—926, 955), *Podeanu Corneliu* (1618, 626, 630, 635, 838, 842, 843, 874—884, 888, 891, 894, 914, 915, 917—920, 924, 938, 943, 948,951, 952, 954—958, 960—962), Seceleanu Alex. (1877, 879—881, 891, 940, 947—949, 951,954—956, 960—962, 967, 974, 975, 977). Şcoala medie tehnică de căi ferate. Anul IV. Ariton I. Vasile (1616, 618, 620—623, 628, 629, 635, 636, 638, 640, 641, 643—645, 647—653), absolvent Munteanu Mihai (1762, 877, 880, 884, 886, 890, 898, 915, 917, 919—922, 924, 938, 940, 943—945), student *Ioniţă Teodor* (an I Mecanică) (1874—886, 888, 890—892, 894, 898, 900—903, 908, 911, 913—916, 919, 923—927, 931, 935, 937, 940—945, 947—964, 966, 967, 970, 971, 973—977, 990).

OCNA MUREŞULUI (Aiud). Clasa X. Diamantstein Marin (1874, 877, 882, 915, 920, 924, 940, 943, 947, 948, 951, 954, 961, 962, 967, 974, 975), Mîrza Mircea (1831, 833, 835, 875, 876, 879, 881—884, 891, 917, 920, 924, 925, 940, 947, 948, 951, 954—956, 960—962, 974—976).

PETROŞANI. Clasa VIII. *Bergthal Cristian* (1915, 922, 924, 928, 935, 940, 947, 949, 954, 955, 957, 960, 962—964, 971, 976, 982, 990, E: 739, 741—745, 747—759), Mihăilă Cornel (1954, 955, 957, 960, 970, 971, E: 744, 749, 750, 752—755, 758), student *Pleniceanu Ion* (1783, 831, 833, 835, 837, 840, 849, 855, 866, 867, 874—876, 878, 879, 881—884, 886—888, 891, 892, 894, 915, 916, 918, 920, 922, 924, 925, 928, 931, 936, 937, 940, 941, 944).

PIATRA NEAMŢ. Clasa VIII. *Hodor D. Constantin* (1814, 879, 884, 947, 951, 954, 955, 960, 963, 971, 976, E: 659, 690, 706, 724, 725, 727, 729—731, 733, 735, 738, 741, 744,

746, 747, 749—754, 757). Clasa X. Bocoş Stela (1874, 877, 878, 880, 881, 891, 917, 920, 922, 924), Galu Florin (1875—877, 879, 881, 883, 891, 894, 914, 920, 924, 931, 940, 951), Munteanu Lelia (1931, 942, 943, 947, 948, 953, 955, 957, 960, 962, 966, 974, 975), Murguleţ Dumitru (1875—877, 879, 881, 883, 891, 914, 924, 931, 955, 956), Pop Leontina (1875, 881, 880—882, 994, 891, 915—917, 920, 924, 925, 943).

PITEŞTI. Clasa VIII. Barboş Iuliu (1955, 971, 976, E: 747, 749—752, 754, 755, 757, 758), Vituşinski Ion (1955, 960, 963, E: 747—753, 757).

PLOEŞTI. Clasa VII. Ene V. Pavel (E: 727, 729, 731, 732, 735, 738, 747, 750—752, 758); clasa VIII. *Ciortan Vasile* (1875, 879, 882, 914, 940, 949, 950, 954, 955, 957, 960, 962, 967 992, E: 659, 677, 690, 716, 721, 722, 741, 742, 745, 747, 748, 750—752, 754, 756—758, 760), Dimorcineanu Paul (E: 725, 727, 729—733, 745, 752, 754), Dumitrescu C. Viorel (1915, 940, E: 725, 727, 731, 735, 738, 747, 749, 750), Gîrbu Eugen (1938, 940, 944, E: 725, 731, 732, 735, 741, 742, 745), Leonte Dinu (1851, 875, E: 708—710, 713—716, 718, 721, 722), Minasian M. Mihail (1875, 882, 955, 957, 971, E: 727, 731, 737, 741, 750), Şovăială Dan (1944, E: 727, 729—731, 741, 742, 745, 752, 754), Toga S. Mihail (1915, 937, 939, 940, 945, 954, 955, 960, 963, 964, 976, E: 735, 736, 738, 741, 745, 747, 750, 752, 753), Tănăsescu Anton (E: 735, 737, 738, 741, 749—752, 754, 755), Tudor Florin Corneliu (1882, 884, 915, 920, 924, 955, 970, 971, E: 687, 708, 709, 713, 714, 724, 727, 729, 738, 749, 750, 752). Clasa IX. Avram Ion (1879, 880, 891, 831, 948, 949, 951, 954—956, 961, 977), *Ballag Vasile* (1616, 618, 762, 874—877, 879—884, 889, 891, 898, 903, 904, 914—916, 919, 922—925, 938—944, 947—952, 954—963, 967, 970, 971, 973—977, 981, 984, 990, 992, 993, 996, P), Boiangiu Nicolae (1947—951, 954—958, 960—962, 94, 971, 976, 992), Delibas Constantin (1879, 880, 891, 898, 922, 923, 925, 947—951, 954—958, 960—964, 971, 976, 977, 984, 990, 992—994, P), Drăgan Radu (1877, 879, 880, 882, 883, 913, 938, 942, 948, 956), Dumitrescu Marian (1879, 880, 940, 948, 949, 954—957, 962, 976), Panaitescu M. Gh. (1875, 877, 879—884, 889, 891, 915), Pop Stefan (1915, 923, 924, 938, 940, 944, 968, 976, 981, 985), Rusu Dan (1830, 831, 835, 837, 841, 843, 844, 875—877, 879). Clasa X. Bogdan P. Mircea (1829, 840, 842, 852, 857, 863, 864, 867, 868, 872, P), Chirilescu Caliopi (1874, 875—877, 879—882, 884, 914, 915, 920, 924, 937, 940, 947, 948, 951, 954, 955, 957, 960, 961, 974, 975), Cioltei Anca (1948, 949, 951, 954—957, 960, 963, 977), Costeanu I. Sorin (1875—877, 879, 880, 882—884), Cucu Ştefania (1874—877, 879, 891, 915—917, 920, 924, 947, 948, 951, 956, 967, 974, 975), Curelea D. Iulian (1874, 879—881, 883, 884, 886, 891, 894, 924, 948, 951, 954—956, 960), Dinescu Sorin (1874—877, 879—882, 886, 890—892, 914, 915, 917, 919, 920, 922, 924, 935, 937, 938, 943), Dima Ştefan (1875, 877, 880—884, 891, 914, 924, 938, 945, 947, 948, 951, 954, 962), Dinu Constantin (1874—884, 891, 914), Dodura Ioan (1874, 878, 885, 898, 908, 915, 916, 917, 920, 922, 924, 926, 927, 930, 938, 940), Dumitrescu Nicolae (1875—884, 891, 894, 898, 902, 914), Ene V. Gh. (1881, 917, 918, 940, 947, 948, 951, 956, 960, 963, 974—976), Grecul Viorica (1874—877, 879—884, 889, 891, 892, 899, 901, 907, 915—917, 920), Ionescu Al. Vladimir (1874—879, 881—884, 892), Ionescu Mihaela (1874—877, 879—884, 889, 891, 892, 900, 915—917, 920, 924, 940, 947, 928, 951, 954—956, 963, 974, 975, 992, 996), Lipean Sergiu (1874—884, 892, 893), Mătuşă Mioara (1618, 762, 948, 949, 951, 954—957, 960, 963, 977), Mihai C. Reveica (1948, 949, 951, 954—958, 960, 961, 971, 977, 993), Minculescu Gh. (1874—877, 879, 880, 882—884, 886, 893, 900, 914, P), Mocanu Florin (1875—884, 891, 893, 914, 915, 924, 948, 951, 955—958, 960—962, 971, 974, 975, 977), Munteanu Silviu (1875—877, 880—885, 891, 894, 914, 915, 917, 924, 943, 947, 948,951, 954—956, 961, 974, 975), *Nicolaescu Mihai* (1875—885, 891, 894, 914, 915, 917, 922, 925, 940, 943, 945, 947, 948, 951, 954—957, 960—962, 970, 971, 974,—976, 982, P), Stănescu Vladimir (1876, 877, 879, 880 883, 950, 948, 951, 956, 992).

PUCIOASA. Clasa X. *Bucur D. Gh.* (1779, 832, 857, 911, 913, 915—927, 930, 931, 935, 938, 940—944, P), Frăţiloiu Gheorghe (1878, 915, 917, 920, 922—926, 930, 931, 941, 944, 948, 951, 954—958, 960—958, 960—963, 967, 971, 973—975), *Stan N. Dumitru* (1618, 879, 916—918, 927, 940—945, 948—952, 954—958, 960—964, 966, 967, 971, 974—977, 984, 990, 992—994).

RĂDĂUŢI. Clasa IX. Deutsch Herbert (1875, 877, 879, 880, 882, 883, 889, 891, 908, 914, 915, 920, 924, 943, 944, 948, 949, 954—958, 960, 962, 964, 977, 990), *Iftimie Viorel* (1875—877), 880, 882—884, 889, 891, 899, 901, 908, 911, 913,—915, 919—921, 923—925, 928, 930, 931, 935, 940, 942—945).

REŞIŢA. Clasa VIII. Beretz Eugen (1882, 938, 940, 945, 963, E: 708, 713, 714, 722, 725—727, 729, 730, 735, 738, 739, 741, 747, 750, 758). Clasa X. Bagherea Ion (1917, 920—922, 924, 926, 927, 931, 938, 943, 945, 948, 954—956), Farcaş Dan (1875—884, 931, 938, 940, 943, 944), *Marchiş Ion* (1830, 833, 835, 841, 844, 861, 866, 872, 875—877, 883, 884, 890, 915, 917, 919—927, 931, 938, 940, 943—945, 948, 951, 956—958, 960—962).

Schwienert St. Ion (1917, 919, 924, 931, 940, 942—945, 947—949, 951, 954—957, 961, 962, 964).

RÎMNICUL SĂRAT. Clasa VIII. Drăgiţan Valerian (1955, 960, 976, E: 735, 738, 747, 750, 753, 755, 756, 758), Manolache Maria (1955, 957, 976, 992, E: 747—752, 758), Stamatiu Ionica (1930, 957, 976, E: 723—727, 729—731, 742), Surdeanu Georgeta (1955, E: 708, 710, 714, 718, 722, 727, 729, 731, 935, 738, 750, 752, 753). Clasa IX. Jercan Mircea (1915, 924, 940, 941, 943, 944, 948, 951, 954—957, 960—962, 971), Kern Ruth (1923, 940, 948, 949, 954, 957, 960, 962, 964, 977). Clasa X. *Beu Gh. Ioan* (1877—880, 884, 885, 890, 898, 899, 901, 914, 915, 918, 921, 925, 945—858, 960, 962, 966, 971, 976, 977, 984, 990, 992), Curocichin Veronica (1875, 876, 882—884, 915, 920, 923, 924, 940, 943, 947, 948, 951, 953—956, 960, 963, 976), *Paulescu Dan* (1879, 880, 885, 890, 891, 899, 901, 914, 918, 935, 942, 947—950, 952, 954—958, 960—962, 964, 966, 974—977, 984, 990, 992), absolvent Costea S. Marcel (1947—949, 950, 955—957, 961—964).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa VIII. Neguţ Nicolae (1914, 954, 955, 970, 971, E: 725, 727—729, 731, 735, 738, 741, 747, 749—751, 753, 758). Clasa IX. *Ancuţoiu Gheorghe* (1783, 875, 876, 879, 882—884, 890, 898, 902, 908, 914, 915, 931, 935, 938, 942, 948, 951, 954—956, 960—962, 964, 970, 971, 976, 977), Cîmpeanu Vladimir (1879, 920, 931, 943, 951, 954-956, 958, 960, 961, 963, 977, 982), Mărgăritescu Corneliu (1877, 882, 943, 948, 951, 954—957, 960, 962, 976, 977, 993), Sărătură Minodora (1866, 900, 940, 941, 944, 945, 967, 974—976, 984). Clasa X. Boiangiu Ilie (1881, 918, 947, 948, 951, 954—956, 960—962, 967, 971, 973—977, 982, 990), *Grigorescu Ion* (1825, 874, 875, 879, 880, 884—886, 888, 891—894, 898—900, 904, 908, 914, 915, 917, 918, 920—924, 931, 935, 938, 940—943, 945, 947, 948, 955, 960, 961), Lazăr Gheorghe (1875, 879, 882, 883, 885, 914, 918, 935, 941, 942, 944, 947, 949, 954, 956, 957, 962—964, 980, 982), Rotaru Paula (1915, 920, 924, 948, 950, 954—956, 960, 974, 975, 992), *Sarion Virgil* (1918, 925, 926, 934, 935, 941—943, 946—958, 960, 962, 964, 966, 974—977, 984, 990—994, 996), absolvent Stan Dumitru (1874—876, 879, 880—884, 891, 892, 894, 914, 915, 920, 931, 940, 941, 944).

ROMAN. Clasa VIII. Nicolăescu Vasile (1875, 876, 879, 894, 912, 943, 948, 954—956, 971, 973, E: 738, 750, 752). Clasa X. Humă Vasile (1805, 835, 837, 839, 841, 857—859, 862, 871), *Steinberg Mauriciu* (1393, 654—656, 658, 674, 682, 684, 687—689, 695—701, 705—707, 762, 830, 832,—835, 837, 838, 840, 841, 843, 844, 846, 847, 859, 861, 862, 866, 871, 874—877, 880, 881, 883, 884, 891, 892, 915, 917, 919, 920, 923, 924, 938, 940, 943, 944).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa VIII. Grecu Anton (1939, 944, 976, E: 727, 729, 730, 732, 733, 735, 738, 742, 747, 749—751, 753), Lebedencu Iulian (1976, E: 7 7, 735, 737, 738, 740, 743, 747, 749, 750). Clasa IX. Burcea Dumitru (1947, 948, 950, 951, 956, 960, 961, 976, 977, 985), Gîndac M. Florea (1879, 880, 948, 950, 951, 956, 960, 961, 974, 976, 977), Noica Mihail (1937, 940, 943, 948, 950, 951, 955, 956, 970, 971).

SATU MARE. Clasa X. Chira Aurel (1919, 923, 925, 931, 940, 943, 948, 951, 955—957, 960).

SATU-LUNG (Stalin). Barbu Silvia (1875—878, 881, 882, 884, 888, 891, 894).

SIBIU. Şcoala medie « Gheorghe Lazăr ». Clasa IX. *Birsan Ion* (1835, 844, 851, 874—877, 879—884, 891, 814, 915, 922, 924, 939, 940, 944, 946, 948—951, 953—958, 976, 977). Şcoala pedagogică. Anul III. Ciocu Valeria (1915, 917, 920, 923, 924, 926, 930, 938, 947, 948, 951, 954—957), *Alexa Ioan* (1915, 917, 919, 920, 922—924, 926, 927, 931, 938, 940, 943—949, 9591, 954, 955, 957, 960, 962, 964, 967, 970—975, 977, 981, 985), *Pupăzan V. Nicolae* (1915—917, 919, 920, 923—927, 930, 931, 937, 938, 940, 941, 943—952, 954—964, 967, 970—977, 980—983, 985, 990, 992, 993).

SIGHIŞOARA. Clasa IX. Bukowski Petre (1830, 875—877, 882, 884, 914, 915, 920, 940, 943). Clasa X. Bontea Adrianel (1947, 948, 955—957, 961, 963, 971, 974, 975, 967).

SIMERIA (Hunedoara). Clasa X.Ardeleanu Dumitru (1875, 884, 917, 920, 924, 931, 938, 940, 943, 947, 948, 955).

SINAIA. Clasa IX. Arapu Petre (1922, 931, 940, 943, 948, 949, 951, 954—956, 960, 970, 976, 977).

SLATINA. Clasa VIII. Pană Gabriela (E: 747, 749, 752, 753, 755—758). Clasa X. Crăciun Andrei (1876, 878, 885, 893, 900, 901, 908, 914, 917, 919, 922, 923, 926, 944, 945). Şerbănescu N. Tiberiu (1885, 890, 900, 901, 908, 915, 917, 920, 922, 924, 943), Vătăşescu T. Anton (1830, 832, 833, 835, 837, 857, 884, 891, 920, 924, 938, 942, 943), Voicu I. Traian (1946—964, 966, 967, 971—977, 984, 992—994, P).

SUCEAVA. Clasa IX. Ticu Constantin (1947, 948, 956, 960, 961, 963, 980). Clasa X. Creoleanu Nicolae (1877, 881—883, 891, 917, 919, 920, 925, 927, 940, 943).

TECUCI. Clasa IX-a. Adrian Iulian (1840, 877, 879, 882, 883, 891, 943, 948, 955, 956—958, 960—964, 970, 974, 976, 977), Leibovici Hari (1882, 883, 914, 940, 962, 963, 970, 971, 977); clasa X-a. Borş Ion (1877, 880,—882, 884, 891, 920, 948, 954—956, 974, 975), Dănilă Silviu (1877, 881, 882, 884, 891, 920, 955, 956, 960, 971, 974, 975), Groparu Sergiu (1877

882, 940, 943, 956, 958, 961, 971, 976, 977), Ilia Valeriu (1877, 880—882, 884, 891, 920, 948, 955, 956, 960), Niță Fănică (1875, 877, 879—882, 894, 920, 948, 954—956, 974, 975), Pîrvănescu Iuliu (1876—878, 880—882, 884, 891, 894, 920, 925), absolvent Stoica Radu (1831, 833, 843, 844. 875, 879. 884, 920, 924, 948, 954, 956, 960, 961, 963).

TIMIȘOARA. Clasa VII-a. Aman Ilariu (1954, E: 748, 750—752, 754, 755), Mihăileanu Alexandru (E: 739, 765, 768, 772, 775). Clasa VIII-a. Coșereanu Radu (1955, E: 724, 727, 729—731, 733, 735, 738, 741, 745, 752). Clasa IX-a. Mihăileanu Constantin (1917, 922, 940, 942, 943, 2004, 005, 010, 021, 023). Clasa X-a. Cișmariu Ionică (1880, 883, 915, 916, 927, 940, 943, 945, 951, 954, 960, 961, 974, 980), *Nerodea Tiberiu* (1820, 833, 877, 883, 894, 917. 946—964, 971, 974—977), Popa Laurențiu (1874, 877, 879, 880, 883, 885—887, 900, 920), Vasilievici Alex. (1882—884, 917, 925, 943, 945, 948, 950—952, 954—956, 960, 971, 974, 975, 977).

TÎRGOVIȘTE. — Clasa IX-a Brînzan Traian (1875, 879, 882—884, 898, 908, 911, 913, 924, 940, 944, 945, 948, 949, 956). Clasa X-a. Cărbunaru M. Const. (1727, 728, 730, 793, 795, 838, 851, 876, 877, 881, 882, 884, 916, 920, 924, 925, 931, 938, 940, 943), Dumitru Petre (1946—949, 954, 960, 961, 971, 973), Popovici Alexandru (1947, 948, 950, 951, 954—956, 960—962, 974), *Stănculescu M. M.* (1586, 615, 660, 756, 805, 856, 911, 913, 915—917, 919—924, 927, 936, 942, 943, 945—947, 949, 951,—953, 955, 959—964, 966, 977, 978, 992, 993), *Tudor Constantin* (1662, 762, 856, 858, 879, 880, 886, 899, 901, 903, 904, 908, 921, 922, 928, 930, 944, 947—952, 954—964, 966, 967, 970, 971, 973—977, 982, 983, 990, 992).

TÎRGU JIU. Clasa X-a. Budianu. I. Gheorghe (1940, 944, 948, 949, 951, 954—957. 960, 961, 974—976), Bunget Ion (1875, 876, 882, 884, 947, 948, 951, 953, 956, 960,974, 975), Cătălina Ion (1877, 879, 883, 896, 917, 920, 925, 947—949, 951, 954—958, 960, 961, 975), Popescu Iulian (1877—879, 882, 883, 891, 894, 917, 920, 939, 941, 947—945, 951, 954—957, 960, 962—964, 967, 971, 974, 975).

TÎRGUL NEAMȚ. Clasa X-a. Focșăneanu Ioan (1616, 618, 879, 880, 896, 897, 903, 904, 905, 908, 914—928, 931, 934, 940, 941, 943—945), Răileanu Mihai (1618, 915—918, 923—926, 931, 940, 944).

TÎRGUL MUREȘ. Clasa VIII—a, Neagoe Olimpia (1915, 955, 960, 971, E: 735, 738, 747, 749, 750, 752, 753, 757, 758). Clasa X-a, *Hegedüs Attila* (1874—884. 891, 898, 900, 915, 917, 920, 924, 937, 940, 946—964, 974—977, 990, 992), Pașca Magdalena (1833, 835, 838, 842, 844, 848, 851, 876, 877, 879—884, 894, 917, 924, 941), Sildan Nuța (1875, 877, 880, 882. 884, 886, 887, 917).

TÎRGUL OCNA. Clasa X-a. Goța Mihai (1828, 866, 940, 944, 945, 967, 868, 974—976).

TÎRNĂVENI. Clasa IX-a. Grigoriu Corneliu (1877, 879, 882, 898, 915, 940, 948—950, 955—957, 960—963, 971, 977, 990). Clasa X-a. Bălțatu Mihai (1875, 877—879, 881, 884, 920, 931, 940, 947—949, 951, 953—957, 960—963, 974, 975), Cosăceanu Adrian (1833, 844, 881, 940, 946, 948, 949, 956, 957, 962, 964, 967, 974—976), Murar Ștefan Cornel (1875, 877—879, 881, 882, 884, 920, 924, 931, 940, 946—949, 951, 953—957, 960—963, 974, 975), Oprea Mircea (1924, 940, 946, 948, 956, 957, 962, 974—976).

TITU. Clasa IX-a. Ghinea Ion (1875, 876, 882, 914, 915, 923, 940, 944, 948, 949, 955 958, 960, 962, 971, 992).

TURDA. Clasa X-a. Radu Gabriela (1874, 877, 878, 915—917, 920, 922, 924, 925), Reich Toma (1916—918, 923, 924, 931, 940, 941, 943, 947, 948, 951, 956).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII-a Metoni Gh. (E: 735, 738, 739, 747, 748, 750—752, 755—758, 760). Clasa X-a. Nicloș Florea (1875—877, 879, 880, 883, 891, 915, 917, 924, 940, 943, 948, 954, 956, 962, 974, 975), Niculescu Iulius (1943, 947, 948, 951, 952, 954—964, 967, 970, 971, 973—977, 978, 992, 996, 997, 2003, 004). Absolvenți: Colomei Stelian (1948—964, 970, 971, 973—975, P), Cosac Paraschiv (1891, 940, 948, 951, 956, 961, 962, 981, 982, 986).

TURNU SEVERIN. Clasa VIII-a. Luici Gheorghe (1976, E: 735, 738, 741, 742, 747—753). Clasa X-a. Bîrzoi Dumitru (1948, 951, 955—957, 960, 962, 964, 967, 974—976), Ionescu Radu (1948, 950, 951, 956—958, 961, 962, 974, 977, 990).

TRUSEȘTI. Clasa X-a. *Ciubotaru C. C.* (1831, 840, 864, 878, 880, 891, 893, 916, 920, 924, 926, 927, 931, 932, 941, 947—958, 960—964, 971, 974—977, 984).

TULCEA. Clasa IX-a. Herșcovici Clara (1924, 938, 943, 947, 954—957, 960, 961, 963, 971, 974—977).

URLAȚI. Clasa X-a. Petcu Diamanta (1923, 931, 940, 947, 948, 950, 951, 954—957, 962, 975—977).

VIDRA (reg. București) Clasa IX-a. Armaș A. Petre (1923, 925, 938, 940, 948, 949, 951, 955—957, 960, 962—964, 976, 977).

ZALĂU. Clasa VIII (seral) Ilieș Florica (1831, 835, E: 708, 716, 718, 722, 725, 727, 729, 731, 735, 738, 742, 745), *Pop Florica* (1569, 570, 574, 575, 578, 582, 588, 591, 592, 603, 635, 636, 640, 655, 669, 670, 674, 681, 688, 697, 706, 728, 730, 733, 736, 7547, 784, 786, 799, 800, 816, 9819—822, E: 669, 672, 674, 677, 695, 696—698, 701, 703, 707). Clasa X-a.

Farcaş V. Beniamin (1618, 875, 882, 884, 920, 931, 941, 955—957, 967, 971, 974). Absolvenţi: Enăchescu T. Stoian (1830, 831, 833, 835, 836, 838—842, 844, 845, 847—849, 851, 857, 872, 882), Opriş A. Ioan (1618, 631, 786, 830, 831, 842, 848, 861, 862, 874—876, 879, 881—884, 889, 901, 907, 924, 931, 940, 943, P).

* * *

Ptnă la 1 aprilie 1956 s-au primit următoarele soluţi bune de la:

ADJUD. — *Clasa VI-a.* Novac Gheorghe (E: 728, 30, 47, 49—51, 58, 62, 71, 73), Pintilie Florica (E: 728, 30, 37, 47, 49, 50, 58, 62, 71, 73), Vasilache Zarafina (E: 728, 30, 32, 47, 49—51, 56, 58, 71, 73). *Clasa VII-a* Apostu C. Ioana (E: 714, 22 28, 33, 52, 58, 65, 68, 72, 74), Bostan Costică (E: 709, 27, 36, 39, 47, 50, 53, 58, 68, 71), Ignat Maria (E: 724, 36, 39, 49, 51, 53, 65, 68, 71 72, 74,), Şerban Ligia (E:714, 28, 53, 58, 62, 65, 68, 72—74), Şerbănescu Gh. Cornelia (E: 714, 22, 41, 51, 52, 54, 58, 67, 71, 72, 74), Ursei Maria (E: 709, 14, 36, 38, 39, 58, 65, 68. 71, 74). *Clasa IX*-a. Chiorcea Niculai (1875,—77, 79. 82, 84, 914, 24, 40, 47—51, 54—57, 60, 62, 63, 74, 77). *Clasa X-a. Avram N. Constantin* (1947—51, 60—64, 74, 75, 77, 82, 84, 90, 92—98, 2001—03, 05, 06, 08, 10, 15, 20, 24. *Absolvent* Ciobotaru Vasile (1948, 51, 56, 57, 60, 61, 63, 64, 67, 73—75, 2004, 06, 21).

AIUD.—Clasa X-a. FischerGheorghe (1947,—49 51, 54, 56, 57, 60—62, 74—77), Suciu I. Ioan (1992, 97, 98, 2006—08, 10, 11).

ALBA JULIA. — Clasa VIII-a. Maniţiu Cornel (1915, 24, 60, 71, 74, 76, E: 714, 35, 37, 38, 40, 43, 45, 47, 49, 50, 51). Clasa IX-a. Avam (1879, 931, 40, 48, 54, 57, 60, 2, 71, 76), Sîntimbrean Gheorge (1948—52, 54—57, 60, 61, 76, 77). Absolvenţi: Benţa Ioan (1967, 74, 75, 88, 2015, 20, 21, 23, 24, 32, P. Nicolae Torsan Ilie (1879, 927, 44, 46, 48, 49, 51, 52, 54—57, 60, 51, 63, 64, 71—75, 92, 93, 2006).

ALEXANDRIA. — Clasa VIII-a. Beşu F. Georgeta (1924, 54, 55, 70, 76, 2022, E: 735, 38, 45, 47, 49, 50, 52, 55, 65—68, 71, 74). Clasa IX-a. Ploeşteanu Ioan (1948—51, 54—57, 60, 62—64, 76). Clasa X-a. Prăşineanu Constantin (1947, 48, 51, 52, 54, 56, 57, 60—63, 67, 74—77, 84, 85, 92, 97, 98, 2006, 10, 23). Absolvent Iesnic Constantin (1920, 24, 38, 48, 49, 51, 54—57, 60, 61, 63, 67, 71, 73—75, 2003, 06, 23).

ARAD. — Clasa VIII-a Balint Ioan (1915, 55, 60, 71, 74, 76, E: 738, 45, 48, 49, 51 52, 54, 55), Biştea Cătălin (1976, 85, E: 747, 49—57), Blidariu Cornel (1954,—57, 62, E: 747, 49—51, 53—55), Boar Teodor (1955, 57, 62, 63, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 54, 74), Bodea H. Florian (1944, 49, 57, 76, 2023, E: 737, 52, 65, 67, 68, 74), Bogdănescu Silviu (1955, 57, 62, 63, 71, 74, 76, E: 747, 49, 50, 52, 54), Cătuneanu C. (1940, 56, 57, 76, E: 745, 47, 48, 52, 54, 55, 60), Cîra Alexandru (1915, 55, 71, 74, 76, E: 738, 42, 48, 49, 51, 52, 54), Codreanu Lucian (1924, 38, 40, 49, 54, 57, 76, 92. E: 754, 56), Demşoreanu Brutus (1915, 46, 47, 49, 54, 55, 57, 60, 63, 64, 70, 71, 74, E: 747, 49, 52, 54, 56), Filotti George (1955, 57, 63, E: 737, 38, 49, 51, 52, 58, 59, 74), Nistor Gheorghe (1955, 71, 74, 75, E: 747—52, 54, 55), Noian Cornelia (1915, 55, 71, 75, E: 738, 42, 46, 47, 49, 52, 54), Patean T. Marius (1915, 24, 55, E: 735, 37, 38, 40, 42, 44—46, 53), Petrişor Septimiu (1947, 54, 55, 60, 76, E: 737, 48—52, 54), Rotărescu Ionel (1955, E: 731, 35, 36, 47, 49—52, 54, 55), Savin Virgil (1882, 915, 24, 38, 60, 49, 54, 55, 57, E: 742, 52, 53, 67), Scriban Romulus (1955, 57, 92, E: 737, 38, 45, 47, 49, 50, 52, 58), Sezonov Hilde (1943, 48, 57, 60, 92, 97, 98, 2005, 06, 21), Sîrb Petru (1915, 55, 71, 74, E: 738, 42, 47—49, 51, 54). Clasa X-a. Andra Viorel (1948, 51, 54, 55, 60, 63, 67, 74, 75, 80, 84).

BACĂU. — *Şcoala elementară Blăgeşti.* Clasa VII-a. Simion Gh. Constantin (E: 747, 49, 50, 52, 53, 58). Clasa VIII-a. Antohi Ştefan (1937, 55, E: 721, 25, 27, 31, 47, 50, 58, 74), Covic Mircea (1876, 77, 940, 49—51, 55—57, 60, 64, 70, 71, 76, 77, 90), Dobronăuţeanu Silviu (1949, 57, 60, 71, 76, 90, 97, 98, 2006, 17, 23, E: 748, 52, 54, 55, 60, 68, 72, 75, P), Tiţaru Ion (1930, 45, 47, 54, 55, 57, 60, 62, 71, 90, 98, 2006, 21, E: 748, 52, 68, P). Clasa X-a. Popa Ioan (1879, 80, 947—52, 54—57, 60—62, 67, 71, 74—77, P), Hărăboi Mihai (1830, 31, 40, 44, 47, 66, 76—78, 81—83).

BAIA-MARE Absolvent *Fejes Iuliu* (1916 18, 21, 23—25, 31, 40, 43, 44, 47, 48, 50—55, 60—64, 73, 74, 77, 90, 92, 96—98, 2001, 03—07, 09, 10 15, 21, 22, 32).

BALŞ (reg. Craiova). Clasa VIII-a. Stoenică Gruia (1955, 57, 60, 76, 92, 93, E: 735, 38, 47, 49, 50, 52, 66, 71, 72). Clasa X-a. Peta George (1915—17, 19, 40, 43, 47—49, 51, 55, 60, 61).

BEIUŞ. Clasa IX-a. Bodeanu Valeriu (1948, 51, 54-55, 58, 60, 63, 70, 71, 74, 77, 92, 97, 98, 2004, 06, 10, 21, 24), Huplea Corneliu (1948, 49—51, 54—57, 60, 62, 64, 70, 71, 82, 93, 97, 98, 2002—08, 10, 15, 21, 23, 24), Partenie Valeriu (1992, 93, 95—98, 2002—08, 10, 15, 21, 23, 24).

BOTOŞANI. Clasa VII-a. Cojocaru Elena (1938, E: 735, 38, 47, 49—52, 65, 68). Clasa IX-a. Arion Adrian (1880, 925, 45, 47—49, 51, 52, 54—57, 60, 62, 63, 70, 71, 76, 77, 81, 82, 90, 92—95, 97, 2000, 05, 06, 08, 10, 11, 15, 17, 19—21, 24, 27, P), Avram I. Gh. (1931, 39, 40, 43, 47, 48, 51, 55, 56, 58, 61, 76, 77, 92, 2021,) *Lucan Mihai* (1875, 77, 79, 82—

14, 89, 901, 15, 19—21, 23, 28, 30, 38, 35, 40, 42, 44, 47—51, 54—64, 76—78, 81, 90, 92—95, 97, 98, 2000, 01, 03—06, 09—11, 15, 21, 23, 24, P). Clasa X-a. Corneanu Florica (1881, 915—17, 24,43, 47, 48, 55—57, 60—64), Lelescu Neculai (1911, 16, 20, 23, 31, 58, 67, 72—75, 97, 98, 2003, 10, 24, 40, 47—49, 52, 55—57, 60 61, 64). Student fără frecvență *Grosu Gheoghe* (1875—77, 79—84, 91, 914, 40, 43, 44, 48, 50—52, 54—56, 60, 62, 71, 73—76, 90, P)

BREAZA (reg. Ploești). — Școala medie « Dimitrie Cantemir ». Clasa IX-a. Bohățel Dumitru (1948, 49, 52, 54—57, 61, 76, 77), Moraru N. Marin (1940, 46, 48—52, 54—58, 60, 62), Văcaru Gheorghe (1940, 48, 49, 51, 55—57, 61, 76, 77). Clasa X-a. Ioniță N. Ion (1920, 38, 40, 43, 47—52, 54—58, 60—62, 74—77, 82, 90, 92, 96), Petcușin R. Ion (1915, 20, 38, 40, 43, 48, 51, 54—58, 60, 61, 74, 77, 2006).

BRĂILA. Clasa IX-a. Ciocan N. Mihai (1948, 51, 54—57, 60, 62, 63, 76, 77, 90, 2006, 21), Comănici D. Petre (1922, 48, 51, 55, 56, 60, 62, 92, 2004, 10, 11), Dragomir Bujor (1954—57, 62, 76, 77, 92, 97, 2006). Clasa X-a. Calenstein Zigu (1946, 48, 49, 51, 54—58, 60, 62, 92, 2006, 10), Costin P. Mircea (1994—98, 2003, 05—07, 09, 10, 18, 20, 21), Dragomir Nicolae (1901, 08, 15, 17, 19, 20, 24, 25, 31, 40, 44, 47—51, 54—58, 60, 62—64, 67, 71, 74, 75, 76, 84, 93, 94), Georgescu Laurian (1879, 80, 917, 25, 43, 47, 48, 50, 51, 54—56, 58, 60—, 64, 74—77, 90, 92, 93, 96), Gheorghe Vasile (1951, 54—56, 60, 62, 63, 71, 73—75, 77, 92, 97, 2007, 21), Iordache Gh. Vasile (1921, 27, 47—58, 60—64, 67, 71 74—77, 90, 92, 93, 96, 97, 2003—11, 15, 20, 21, 23, 24, 32, 33), Lungu D. Octavian (1917, 24, 40, 47, 48, 51, 56, 75, 76, 2020), Negraru I. Viorica (1947, 48, 51, 54—57, 62, 75, 76), Urse N. Ștefan (1947, 48, 51, 52, 74—58, 60, 62, 63, 71, 73—75, 77, 90, 92, 93).

BUCUREȘTI. *Studenți*: Cîrstoiu (C. Barbu (Fac. Matematică) (1992, 93, 95—98, 2004, 06, 08, 10, 11, 14—16, 21, 23, 24), *Ene Ion* (1874—94, 98, 99, 901, 04, 07, 08, 11, 13—27, 29—32, 36—64, 66, 67, 71—77, 82, 84, 86, 90, 92, 93, 97, 98, 2000, P), Georgescu I. Emil (1841, 44, 49, 55, 67, 77, 80—84, 91, 920, 24, 43, 48, 54, 56, 60, 61, 73), Ionescu N. Mircea (Fac. Construcții) (1947—51, 53, 55—57, 60—62, 66, 70, 71, 73, 77, 84, 90, 96, 97, 2006, 08, 11, 15, 21, 32), Leștanu Marius (Inst. Politehnic) (1914, 48, 55—57, 60, 61, 90, 2006, 10, 23), Prisadă Dan (Fac. Mecanică) (1914, 31, 46—48, 51, 53—58, 60—64, 77, 90, P), *Roșianu C. Dragomir* (1874, 76—78, 85, 88, 90, 92, 93, 98, 99, 904, 08, 10, 13, 14, 16, 18, 19, 21—23, 27, 29—32, 39, 41, 42, 44, 47, 48, 53, 55—57, 59, 66, 67, 70, 71, 76, 85 86, 92—94, 96—98, 2005—10, 15, 20, 24, P), *Stoian I. Gheorghe* (1716, 854, 904, 14, 92, 93, 96—98, 2001—06, 08—10, 12, 16—24, 41—43, 45, 48, 49, 51, —54, 59, 60, 63, 65, 66, 78, 100—02, 04), Tepușanu Doina (Fac. Matematică) (1924, 26, 27, 39, 40, 43, 47, 48, 55, 56, 63, 73, 84, 90), *Torjescu Florin* (an II Mecanică) (1808, 11—13, 15, 20—22, 29—49, 51—59, 61—63, 66, 71, 72, 74—81, 83—91, 94, 98—901, 04, 07, 08, 13—17, 20, 22—26, 28—32, 35—68, 71—77, 81— 83, 85, 90, 92—2012, 15—22, 24, P). Absolvenți: Măriucă D. Maria (1947, 48, 55, 56, 58, 60, 61, 67, 73), Mavrogheorghe Vanghele (1783, 915, 21, 38, 42, 44, 77, 92, 93, 95, 97, 2001, 05, 06, 09, 10, 15, 20—23), Răducu Marcel (1947—52, 54—57, 60, 92, bid, 97 bis, 2001 bis, 03, bis 04 bis, 05—07, 20, 21, 23), Stan C. Dumitru (1923—26, 43, 47—58, 60—62, 64, 76, 77, 84, 90, 92), Tudor Mihai (1879, 948—51, 54—57, 60, 64, 74—77, 92).

Școala medie nr. 1 « N. Bălcescu ». Clasa VI-a. *Zamfirescu Tudor* (E: 742, 44, 45, 54, 58, 62—68, 70—74, 76—78, 80, 81, 84, P); Clasa VII-a. Cocîrlan Paul (1954, 55, 60, 2006, E: 745, 47, 52, 57, 59, 72, 74); Clasa IX-a. Bodea C. Mircea (1948—57, 62, 71, 76, 77, 90), Boldea Vasile (1879, 944, 49, 54—57, 60, 76, 77, 2006, 21), Cipere I. Lucian (1879, 80, 89, 915, 22, 24, 38, 40, 43, 44, 47—51, 54, 55, 57, 58, 60, 62, 63, 71, 76, 77, 83,) Cristea Paul (1874—79, 81—84, 86), Doniga N. Nicolae (1879, 914, 23—25, 38, 40, 43, 44, 49, 54, 55, 57, 62, 71, 76, 77), *Urmă Radu* (1847, 51, 67, 71, 75—77, 82—84, 86, 98, 915, 20, 22, 24, 31, 41—43, 47—49, 51, 52, 54—58, 60—64, 71, 74, 76, 77, 90). Clasa X-a. *Emanoil Alex.* (1885, 94, 946—55, 57—64, 67, 70, 71, 73—77, 82—84, 87, 90, 92—94, 96—98, 2000, 01, 03—11, P), Schileru Dinu (1992, 93, 96—98, 2001, 02, 03, 06, 08, 10, 11, 21, 24, 32).

Școala medie nr. 2. Clasa IX-a. *Jianu Ion* (1848, 51, 71, 75—77, 79, 82—84, 98, 915, 19, 22—25, 41, 42, 47—49, 51—52, 54—57, 60—64, 67, 71, 74—77, 90, 92, 93, 95, 98, 2001, 04, 08 bis, 09 bis 10 bis, 15 bis, 21 bis, 32 bis).

Școala medie nr. 3. Clasa VII-a. Ioachim Alexandru (1940, 44, E: 746—48, 50, 52, 54, 56—59).

Școala medie de băieți nr. 4 « Aurel Vlaicu ». Clasa VIII-a. Joniță F. Livius (1915, 40, 55, 57, 60, 62, 64, 76, 2006), Nicolau Cornel Virgil (1864, 957, 60, 62, 82, 90, 2006, 23, 24, E: 763, 66, 71—73, 76). Clasa IX-a. Ionescu Dumitru (1924, 46, 48—56, 58, 60—62, 64, 92, 93, 95—98, 2003, 08, 10, 11), Zvorișteanu Alexandru (1993—99, 2001—03, 05—11, 15, 20—23). Clasa X-a. Armășelu D. Dumitru (1948, 51, 55, 56, 58, 60, 67, 74, 75, 93, 95, 2022, 23, 32), Cristache Aurel (1898, 949, 50, 92, 97, 98, 2006—10, 13, 21—24, 40, 42, 45, 48, 53, 54, 109—17, 22, 23, 25, 27, 29, 31), *Nistreanu N. Valeriu* (1814, 21, 32, 74, 79, 80, 91, 94, 922, 47—49, 51, 52, 54—58, 60—64, 71, 73—77, 90, 92, 94, 96, 97, 97 bis, 98 bis, 2005—08, 10,

11, 15, 22, 32, 42, 43, 45, 50, 64, 86, 89, 90, 100, 02, 04), *Pătraşcu Sorin* (1879, 80, 914, 46—64, 71, 74—77, 82—84, 90, 92, 93 bis, 94, 96 bis, 97 bis, 98 bis, 2001 bis, 02 bis, 03, bis, 04 bis, 05—08, 10, 11, 18, 20, 22, 43, 45, 50, 89, 100, 02, 04, 05, P), Puşcaşu Nicolae, (1997, 2111, 12, 14, 16, 17, 23—26, 29), Russo Dan (1955, 77, 90, 92, 2006, 09—11, 21, 23, 32, 102), Ştefănescu I. (1992, 98, 2006, 08—10, 21, 22, 24), *Tănăsescu I. Ştefan* (1946—52, 54—58, 60—64, 71, 74—77, 92, 92 bis, 93 bis, 95 bis, 97 bis, 98 bis, 2001 bis, 04 bis, 05 bis, 06—11, 15, 18, 23), Viscopoleanu O. (1783, 924, 26, 38, 40, 46—52, 54—57, 60—64, 76).

Şcoala medie nr. 5. Clasa VIII-a. Crivăţ Gabriela (E: 653, 65, 68, 724, 725, 727, 29—34, 42), Gronda Francisca (1875, 76, 82, 946—50, 54, 55, 57, 60, 63, 64, 76). Clasa X-a. Ionescu V. Elena (1947, 48, 51, 55, 60, 74—76, 92, 93, 97, 98, 2006—08, 21).

Şcoala medie nr. 7 « I. L. Caragiale ». Clasa VIII-a. Grofşoreanu T. Gelu (1884, 914, 47, 49, 53, 54, 57, 63, 64, 67, 70, 71, 90, E: 751, 60). Clasa X-a. Maxim Dan (1874, 75, 77, 79—84, 91, 914), Stroe Gh. Victor (1879, 84, 91, 915, 17, 19—21, 25, 40, 43, 45, 63, 64, 70, 74, 76, 77).

Şcoala medie de fete nr. 8. Clasa VI-a. Mazilu Gabriela (2004, E: 735—40, 43, 47, 49—51, 55—58, 66—67, 71, 73, 74). Clasa IX-a. Andreescu Sofia (1944, 48, 50, 51, 54—56, 60, 63, 77), Ganea Maria (1948, 51, 54—56, 60, 67, 71, 74, 75, 90, 92, 97, 2001, 04, 07, 08, 10, 21, 22, 32), *Marinaş Marina* (1875, 77, 79, 83, 914, 23, 47, 48, 50—52, 54—57, 60, 63, 64, 76, 77, 90, 92, 97, 2004—06, 10, 11, 22, 23), Moisin Lucia (1948, 55, 56, 60, 63, 77, 92, 2005, 06, 10, 21, 23), Petrescu Anamaria (1877, 79, 82, 940, 43, 48, 50, 51, 54—57, 60, 63, 64, 77, 97, 2005, 10 11, 21, 23), Vlad Silvia (1923, 24, 31, 40, 43, 48, 51, 54—57, 60, 62, 63, 76, 77).

Şcoala medie de fete nr. 10 « Zoia Cosmodemianskaia ». Clasa VII-a. *Predoiescu Marieta* (1947, 55, 60, 63, 74, 76, E: 735—38, 41, 42, 44, 45, 47, 49—54, 58, 62, 65—67, 71, 72, 74). Clasa VIII-a. Repciuc Rodica (1915, 24, 31, 38, 40, 44, E: 729, 30, 41, 42). Clasa X-a. Fărcăşanu Marinela (1915, 17, 20, 24, 48, 50, 51, 56, 60, 73, 75, 84), Vasiliu G. Viorica (1914, 15, 17, 20, 24, 25, 40, 43, 47, 48, 50, 51, 54—56, 62), Voiculescu Sanda (1915—17, 20, 26, 48, 54—56, 77, 92, 2001, 10, 15, 21, 22, 26, 27).

Şcoala medie de băieţi nr. 11. Clasa VIII-a. Schiopulescu Dan (1931, 38, 71, 76, 79, E: 739, 44, 45, 55, 66, 71, 74). Clasa IX-a. Peteanu Ion (1947, 48, 50, 51, 55—57, 60, 61, 68, 71, 76, 77, 85, 92, 93), Pîrvănescu A. Pîrvan (1948, 51, 55—57, 60, 71, 76, 97, 2006, 21, 24), Rădulescu Mihai (1915, 20, 23—25, 40, 43, 47—51, 54—58, 60—64, 67, 71—76, 90, 92, 93). Clasa X-a. Corbu Ion (1879, 911, 15—17, 19—26, 31, 38, 40, 42—44, 47—58, 60—64, 70, 71, 73—77, 79, 90), Nicolae M. Valentin (1915, 37, 38, 40, 43, 50, 51, 54, 56, 92, 93), Popescu P. Roger (1926, 63, 82, 90, 92, 93, 95—98, 2001, 03—11, 20, 21), Schiketanz Iosif (1949, 52, 53, 57, 60, 61, 63, 64, 73, 84, 92, 93, 97, 98, 2001, 04, 06, 08).

Şcoala medie nr. 12. Clasa VIII-a. Glasberg Vladimir (1970, 71, 73—76, E: 747—58).

Şcoala medie nr. 13. Clasa VIII-a. Ţugulea Mircea (1976, 90, 2014, 16, 19, 23, E: 752, 67, 73). Clasa IX-a. Grigore Costică (1947—49, 51, 52, 54—57, 60—64, 70, 71, 76, 77, 92, 93), Sorescu Gheorghe (1879, 949—52, 54—57, 60—64, 70, 71), Stancu Mihai (1915, 23, 24, 31, 38, 40, 43, 48, 50, 55, 57, 60—62). Clasa X-a. *Bărăitaru Florin* (1877—84, 89, 91, 908, 14, 17, 23, 24, 31, 40, 41, 43, 44, 48—51, 54—58, 60—62, 71, 74, 75, 90), *Dobre Ion* (1833, 66, 74, 915, 17, 24, 25, 40, 43, 47—51, 53—63, 74—77, 84, 92, 96—98, 2001), *Flueraşu Cezar* (1946—64, 66, 71—77, 81, 92—94, 96—98, 2000, 02, 03, 05, 06—11, 17, 21, 26, 30, 32, 34), Ionescu Dan (1915, 17, 19—27, 31, 38, 40, 43, 45, 48—58, 62—64).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa VIII-a. Delcescu V. Marilena (E: 687, 708, 16, 21, 27, 30, 31, 37—39, 49, 52). Clasa IX-a. Ciocănea Valentina (1942, 43, 77, 90, 2015, 21, 24). Clasa X-a. Teodorescu Viorica (1875, 79, 81—84, 91, 915, 20, 24, 48, 51, 54—56, 60—63, 77).

Şcoala medie de băieţi nr. 17. Clasa VIII-a. Paşa Florin (1963, 71, 76, E: 747, 50, 58, 62, 65—68, 71). Clasa IX-a. Adam Gheorghe (1922, 47—49, 51, 54—57, 64, 71, 87, 2004), Elian Dinu (1948, 50, 51, 54—58, 60—63, 76, 77), Ionescu V. Corneliu (1948, 50, 51, 54—56, 58, 60, 62, 63, 77), Pop R. Andrei (1949, 52, 57, 58, 71, 76, 77, 90, 92, 93 2004). Clasa X-a. Avram Aurel (1874—77, 79—81, 83, 84, 86, 91, 903), Bucică Mihai (1923, 25, 45, 55, 92—94, 96—99, 2001, 03—10, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 32), Coliren Ignatz (1957, 58, 60— 62, 92, 93, 2001, 02, 06—08), Herşcu Sergiu (1992, 95, 97, 98, 2001, 04—11, 20, 22, 32), Kaufmann A. Ioan (1947, 48, 50, 51, 53, 55—58, 60—62, 92, 94), *Păunescu I. Lucian* (1879, 92, 94, 914, 16, 21—23, 41, 47—58, 61—64, 67, 71, 74—76, 90, 92, 93, 96), Popa Adrian (1874—86, 91, 94, 98, 915—18, 22—26, 40, 46—58, 60—64, 71, 74).

Şcoala medie de băieţi nr. 18. Clasa VII-a. Enişteanu N. Nicolae (E: 735, 47, 50, 51, 54, 57, 62, 64, 66, 71). Clasa VIII-a. Tohăneanu Florin (E: 747, 49, 50, 52, 53, 65—67,

71, 72, 74). Clasa IX-a. Angelescu I. Valeriu (1948, 49, 51, 55—57, 62, 64, 76, 2017,) Enache, Corneliu (1915, 23, 40, 48, 49, 51, 55—57, 62, 64, 67, 68, 71, 74—77), Filotti Ion (1700, 69, 857, 915, 20, 23, 24, 30, 40, 43, 44, 48, 49, 55—57, 62, 76, 77), Minciu C. (1924, 30, 45, 48, 49, 51, 54—57, 62, 76, 77, 89, 97, 2201), Zamfirescu A. Martin (1915, 23, 24, 40, 48, 49, 55—57, 62, 64, 71, 76, 77). Clasa X-a. Bănescu Andrei (1618, 40, 47—58, 60, 67, 71, 75, 92, 94), Nicolau Florin (1915, 16, 24, 25, 47, 48, 54—56, 58, 60—62), Roşu I. Const. (1948, 54, 56, 62— 64, 67, 74—76).

Şcoala medie de fete nr. 19. Clasa X-a. Nicolau Ileana (1947, 60, 61, 63, 64, 67, 71, 74, 75).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. Clasa VII-a. Bogdan Mircea (1974, E: 724, 27, 29—33, 35, 38, 42, 47, 49, 58). Clasa VIII-a. Bogdan Alecu (1944, 74, 76, E: 725, 27, 29—33, 35, 38, 40, 42, 47, 49, 50, 58, 64, 66, 67, 71, 73, 74), Enulescu C. Alexandru (1882, 915, 24, 34, 38, 39, 44, 49), Trandabura Tiberiu (1947, 54, 55, 60 63, 63, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 64—66, 71). Clasa IX-a. Grigorescu Ştefan (1947—49, 51, 54—58, 60, 62—64, 76, 77), Iorgulescu Radu (1877, 79, 80, 86, 90, 908, 14, 47—51, 54, 55, 57, 60, 63, 63), *Zorapapel Tiberiu* (1835, 37, 43, 67, 71, 74—77, 79, 80, 82—84, 86, 91, 98, 900, 01, 15, 22, 24, 25, 31, 38, 40, 43, 46, 48—52, 54—58, 60—64, 76, 77, P). Clasa X-a. Iorgulescu Alexandru (1992—2011, 15, 17, 18, 20, 21—24, 27), *Stănescu Gh. Ion* (1900, 04, 14—17, 20, 40, 41, 43, 45, 47—52, 54—58, 60—64, 67, 70, 71, 73—75, 90, 92, 95, 97, 2004, 06, 08—11, 15, 17, 20—24, 32, P).

Şcoala medie de fete nr. 21. Demayo Adriana (1915, 24, 46—49, 51, 54—57, 60, 62, 76, 77, 92, 97).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa VI-a. Niţă Georgeta (E: 724, 27, 29, 31, 36, 40, 47, 49, 50, 52, 58, 61). Clasa IX-a. Gheorghiţă Mariana (1948, 54, 56—58, 60, 61, 63, 77, 90).

Şcoala medie serală « Casa Scînteii ». Clasa X-a. Chirigiu Dumitru (1947, 48, 51, 54—58, 60, 61, 63, 67, 74, 75).

Şcoala de 7 ani nr. 147. Clasa VII-a. Pătru Irina (E: 708, 10, 13, 35, 37, 42, 47, 49, 50—52).

BUZĂU. Clasa IX-a. Suciu A. Tita (1992, 93, 96—98, 2004—07, 09—11, 15, 20, 21, 34). Clasa X-a. Andrei Corneliu (1874, 76—84, 91, 919, 40, 47, 48, 51, 54—56, 60, 61, 63, 64, 74—76, 90, 92, 93), Dumitrescu Const. (1947, 51, 55, 56, 71, 74—76, 97, 2006, 08), Marinescu N. Alexandru (1915, 24, 40, 48 51, 55, 56, 60, 61, 63, 64, 74—77, 85, 93).

CALAFAT. Clasa IX-a. Ciurezu C. Radu (1949, 63, 64, 77, 92, 97, 2005, 06, 09, 10, 15, 21, 23, P), Pascu I. Ştefan (1948, 49, 51, 54—58, 60, 62, 64, 71, 76, 97, 2006), Pîrlea Constantin (1943, 48, 51, 56, 61—63, 92, 95, 2010, 15, 21). Clasa X-a. Prodan Ştefan (1920, 40, 45, 47, 48, 51, 54—57, 63, 67, 71, 73—77, 84, 2021), Sîrbu D. Tiberiu (1947, 48, 51—56, 60, 67, 74—76, 79, 84).

CĂLĂRAŞI. Clasa IX-a. Onuţă N. Ion (1960, 92, 97, 2004—08, 10, 11, 17, 21), *Strătescu I.* (1783, 872, 79, 80, 914, 46—52, 54—58, 60—64, 70, 71, 73, 76, 77, 81, 83, 90, 92—95, 2005, 96, 10, 11, 17, 18, 21, 23, 27, P). Clasa X-a. Bragadiru Lascăr (1878—80, 82—84, 94, 914, 22, 24, 26 35, 40, 43, 44, 48, 52—57, 60, 61), *Nicolescu Dan* (1905, 19, 21—23, 30, 31, 44, 45, 48, 49, 51, 54—57, 60—64, 71, 73—77, 79, 80, 84, 92, 96—98, 2003—07, 10, 11, 20, 21, 28, 33), Pita Bujor (1875, 76, 82, 83, 91, 95, 913, 17, 24, 73, 74, P), Stan Aurel (1891, 94, 926, 48, 51, 55, 56, 61, 74, 75).

CAREI. Clasa X-a. Berciu Mihai (1875—82, 91, 915, 17, 24, 38, 40, 43, 48, 55—57, 67, 71, 74—76, 92), Godea Tiberiu (1876—82, 917, 48, 56, 74—76), Micu Emil (1947, 48, 51, 54—57, 60, 61, 71, 74—76, 84, 90, 92, 93, 97, 2003, 06, 10, 15, 20, 21).

CARACAL. Clasa X-a. Bobîrcă Florin (1920, 22, 24, 25, 44, 48, 51, 54—58, 62, 63, 77), Ivănuş Puiu (1875, 79, 81, 82, 93, 94, 943, 55, 56, 60).

CARANSEBEŞ. Clasa IX-a. Haţegan Cornel (1947—51, 54—57, 60, 62—64, 70, 71, 76, 80, 84, 85, 92, 93, 95—2004).

CÎMPIA TURZII. Clasa IX-a. Picla Gheorghe (1879, 80, 914, 48—50, 54—57, 60, 62, 64, 76, 77).

CÎMPINA. Clasa X-a. Liess Gerhard (1875—80, 83, 94, 914, 15, 21, 24, 44, 56, 60, 74, 75, 77), *Moisin L. Tudor* (1915, 17, 22, 24, 31, 38, 40, 41, 43—45, 47—51, 54—58, 60—64, 71, 74—77, 90, 92—94 .

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa VIII-a. Vlăhuţă Mihai (1970 71, 73, 74, 2024, E: 747, 49, 51, 52, 72). Clasa X-a. Gogoncea Nicolae (1946—58, 60—64, 67, 68, 70, 71, 74—77, 79, 84, 85, 93, 96, 2002).

CLUJ. Clasa VII-a. Cimoca Gheorghe (E: 747, 49—51, 54—56, 58, 60, 71), Teognoste Mihai (E: 747, 49—51, 54, 55, 58, 60, 71, 74). Clasa VIII-a. Bunea Mircea (E: 735, 42,

47, 50, 52, 64—66, 71), Mînăştureanu Florica (1914, E: 735, 38, 39, 41, 47, 50, 58, 65, 74). Clasa IX-a Bîrzan Romanel (1947, 52, 58, 81, 88, 90, 92, 93, 95, 2001, 03—06, 10, 11, 15, 20—24). Student an. I. Aschilean Viorel (1925, 31, 38, 40, 43, 45, 47—51, 54—57, 60, 61, 63, 77, 90, 92, 93, 2006, 10, 23). (urmarea în numărul 9)

* * *

Rezolvitorii de probleme sînt din nou rugaţi să scrie pe plicul cu soluţii: trimis lunar, numele, clasa, şcoala şi localitatea unde este şcoala; iar soluţiile să fie aşezate în ordinea numerică crescîndă.

* *

— Se mai primesc soluţii pînă la apariţia numărului 9, septembrie 1956, numai la problemele apărute în ultimele trei numere şi la problemele: 2080, 2093, 2098, 2108, 2170, 2189, 2196, 2199, 2213, 2215 şi următoarele, iar de la elementar începînd cu E: 807 şi următoarele.

— Se primesc soluţii la exerciţiile propuse pentru şcoala de 7 ani numai de la elevii claselor a V-a, a VI-a a VII-a, şi a VIII-a, precum şi de la elevii şcoalelor profesionale sau de învăţători.

— Pentru abonarea pe ultimele trei luni, adică pentru numerile ce urmează 10, 11, 12 se poate achita la oficiul poştal suma de trei lei, preţul fiind de 1 leu exemplarul.

— Pentru anul 1957 nu s-a fixat costul abonamentului.

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— La exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani se primesc rezolvări de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, de la elevii anului I al şcolilor tehnice de maiştri sau din anul I şi II ai şcolilor profesionale, pedagogice de învăţători. Nu se iau în seamă soluţiile problemelor propuse pentru şcoala de 7 ani dacă sînt trimise de elevi ai *claselor a IX-a, a X-a, ai şcolilor medii tehnice sau de studenţi* şi nici soluţiile trimise după trecerea a trei luni de la publicarea problemelor respective sau de la publicarea eratei, dacă a fost cazul.

Rezolvitorii de probleme sînt rugaţi să nu trimită plicuri cu mai puţin de 10 soluţii; trimiterea rezolvărilor şi propunerilor să se facă numai odată în cursul aceleiaşi luni, aşezînd problemele rezolvate în ordinea lor numerică aşa cum vor fi apoi, anunţate la rubrica rezolvitorilor de probleme. Pe o parte a plicului se va scrie: localitatea, şcoala sau institutul, numele şi adresa rezolvitorului, iar pe cealaltă parte, adresa: «Gazeta Matematică şi Fizică», seria B, strada Academiei nr. 14, Bucureşti I.

Din problemele primite nu se anunţă cele incomplet rezolvate, cele care conţin greşeli, cele neglijent redactate, cele care au greşeli de calcul, desene neglijent făcute, sau sînt copiate după altele.

De asemenea, nu se publică problemele propuse de către colaboratori, dacă ele sînt cunoscute sau nu sînt însoţite de soluţia lor clar redactată.

— Deoarece numărul abonaţilor se apropie de numărul de exemplare tipărite, iar tirajul este numai de 16.000 exemplare, G.M.F. seria B va apare la chioşcuri într-un număr foarte redus de exemplare şi de aceea colaboratorii sînt astfel anunţaţi să se aboneze de îndată pentru a nu rămîne cu colecţia necompletă.

ERATA. — La problema 2011 în loc de $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ se va scrie $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

— La problema 2055 în loc de $+ 32$ se va scrie $- 32$.

— La problema 2238 primul $=$ se va scrie $-$

— La problema 2287 pag. 379 în loc de MA, MB, MC şi NA, NB, NC se va scrie MA_1, MB_1, MC_1 şi NA_1, NB_1, NC_1.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu**
2. *Șiruri recurente* de **A. I. Marcușevici**
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev**
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov**
5. *Metoda inducției matematice* de **I. S. Sominski**
6. *Elemente de calculul probabilităților* de **Gh. Mihoc**
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu**
8. *Arii și logaritmi* de **A. I. Marcușevici**
9. *Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi* de **A. I. Ghelfond**
10. *Despre conice și alte curbe* de **O. Sacter**
11. *Maxime și minime geometrice* de **Ion Ionescu**
12. *Cometele* de **F. I. Zighel**
13. *Radioastronomia* de **S. Sklovski**
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu**
15. *Soarele și observarea lui* de **V. V. Saronov**
16. *Elemente de calcul vectorial* de **O. Kreindler**
17. *Experiențe simple cu ultrasunete* de **B. B. Kudriavțev**
18. *Nomograme* de **M. V. Pentkovski**
19. *Elemente de teoria congruențelor de drepte* de **A. Kahane**
20. *Culegere de probleme de geometrie* de **Gh. Țițeica** (*revăzută și complectată* de **G. D. Simionescu**)
21. *Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale* de **A. Halanay**
23. *Introducere în fizica solidului* de **V. Sergiescu**

Pentru abonarea pe **4** luni se poate achita la oficiul poștal local suma de 4 lei (prețul fiind 1 leu exemplarul)

Volumul VII, Nr. 8 (Gazeta Matematică și Fizică seria B) august 1956

C. 843. – INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 **Prețul Lei 1 exemplarul**

E 1426

KAT

Országos Mű... Könyvtár MADONA

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - СМЕНА

Anul VII — septembrie 1956

9

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII, Nr. 9 — septembrie 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *Tineretul trebuie să-şi însuşească temeinic cunoştinţele de matematică, de prof. univ. C. Ionescu-Bujor* 449
2. *Introducere în studiul inelelor şi corpurilor numerice şi abstracte, de Lucreţia şi Benone Constantinescu* 454
3. *Curent trifazat, de Ion Opran* 463
4. *Observări asupra unor probleme de natație, de Radu Bădescu* 470
5. *Caleidoscop matematic de A. Hollinger* 475
6. *Probleme rezolvate* (1716; 1825; 1841; 1901; 1932; 1936; 1942; 1943; 1989; 1990; 1991; 1997; 2017; 2038; E: 682; 719, 747, 749, 754) 483
7. *Probleme propuse* (2316—2341) 494
8. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani* (*E*: 863—*E*: 873) 497
9. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 498

ANUL VII 9 SEPTEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul VII * Nr 9 septembrie 1956

TINERETUL TREBUIE SĂ-ŞI ÎNSUŞEASCĂ TEMEINIC CUNOŞTINŢELE DE MATEMATICĂ

Prof. univ. C. IONESCU-BUJOR

EDUCATORII din şcoala noastră nouă, creată după Reforma învăţămîntului din anul 1948, consideră că tineretul din şcoli are capacitatea de a înţelege importanţa problemelor de învăţămînt. Ei combat la elevii şi studenţii noştri atitudinea pasivă faţă de desfăşurarea procesului de învăţămînt, atitudinea de simplă primire şi însuşire a cunoştinţelor, şi-i învaţă să participe activ la munca şcolară, conştienţi de importanţa ei. Elevii şi studenţii trebuie deprinşi să pătrundă obiectul şi scopul muncii lor, să înţeleagă măreţele sarcini care le revin în patria noastră în perspectiva luminoasă a viitorului.

Elevii şi studenţii trebuie să se asocieze la efortul întregului popor muncitor pentru realizarea unei vieţi fericite a oamenilor muncii în statul nostru democrat popular. Educatorii trebuie să sădească şi să cultive în inimile tineretului aspiraţii înalte şi sănătoase, convingerea că el formează schimbul de mîine al tehnicienilor şi inginerilor, al oamenilor de ştiinţă al profesorilor, agronomilor, medicilor, al tuturor acelora care contribuie prin activitatea lor la dezvoltarea economică şi culturală a patriei noastre. Marea răspundere pentru pregătirea temeinică a «schimbului de mîine» revine atît cadrelor didactice, cît şi tineretului însuşi. Şi am dori să întărim sublinierea răspunderii ce îi revine.

Reflectînd asupra căilor pe care pot ajunge la pregătirea temeinică, necesară rolului pe care-l vor avea în viitor, elevii noştri îşi pun inevitabil, întrebarea: «de ce învăţăm matematică», «de ce şcoala acordă o importanţă atît de mare cunoştinţelor de matematică ale elevilor?»

În multe şcoli profesorii s-au străduit să ajute pe elevi să-şi lămurească just aceste întrebări. Aceasta o dovedeşte numărul însemnat de absolvenţi ai şcolilor medii care se prezintă cu pregătire temeinică în matematică la institutele politehnice, la facultăţile de fizico-matematici, la institutele de construcţii, mine, petrol, la institutele agronomice. Aceasta o dovedeşte şi numărul mereu crescînd de elevi care colaborează la «Gazeta matematică şi fizică», numărul participanţilor la olimpiadele de matematică şi de fizică.

Cu toate acestea, rămîne încă un procent destul de mare de absolvenţi ai şcolilor de 7 ani sau medii insuficient sau chiar foarte slab pregătiţi la

matematică. Aceasta înseamnă că rolul şi scopul învăţăturii matematicii în şcoală nu au fost deajuns lămurite elevilor de către profesorii respectivi, că o bună parte din elevi nu a reflectat destul asupra acestor probleme, înseamnă de asemenea că în multe clase studiul matematicii se desfăşoară cu multe lipsuri.

Profesorii de matematică şi tineretul studios au sarcina de a lichida această situaţie, sarcină formulată limpede în Directivele Congresului al II-lea al P.M.R. cu privire la cel de-al doilea plan cincinal de dezvoltare a economiei naţionale pe anii 1956—60:

« Se va intensifica munca pentru ridicarea nivelului ştiinţific al învăţămîntului, acordîndu-se o atenţie deosebită studiului ştiinţelor fizico-matematice, legînd procesul de învăţămînt de viaţă, de activitatea practică ».

Această sarcină trebuie îndeplinită cu elan şi simţ de răspundere de către toţi factorii şcolii, în special de către profesorii de fizică, de matematică şi de elevi.

Cu deosebire, această sarcină trebuie să găsească ecou puternic în rîndurile elevilor şi studenţilor U.T.M-işti, în rîndurile pionierilor.

Să acordăm o atenţie specială studiului ştiinţelor fizico-matematice. Să legăm şi prin acest studiu procesul de învăţămînt de viaţă, de activitatea practică!

Legarea învăţămîntului de viaţă este unul dintre principiile de bază ale şcolii în statul nostru democrat popular. Acest principiu constituie unul din elementele fundamentale prin care se deosebeşte şcoala statului socialist de şcoala burgheză.

Într-adevăr, legarea învăţămîntului de practică decurge din conţinutul ştiinţific al învăţămîntului, este conformă cu concepţia materialist-dialectică.

În şcoala burgheză conţinutul învăţămîntului cuprinde teorii neştiinţifice, este mistic, impregnat cu concepţii idealiste, reacţionare, care îl rup de viaţă, de practică. Ca atare, disciplinele se studiază pentru ele însile, nu pentru aplicarea lor. Ştiinţele despre natură, de exemplu, fizica, matematica, lipsite de perspectiva aplicării lor practice, au un conţinut abstract, greu accesibil elevilor, un conţinut care nu poate interesa şi atrage elevii. Aceasta determină rămînerea în urmă a elevilor la matematică şi la fizică şi explică afluenţa elevilor slabi la liceele clasice sau la secţiile moderne. Se ştie că în timpul regimului burghezo-moşieresc foarte mulţi absolvenţi de liceu, neavînd o pregătire bună la matematică erau nevoiţi să se înscrie la facultăţile de drept sau la cele de litere. Pentru a scuza aceste imprejurări, burghezia a născocit ideea că numai anumiţi elevi, născuţi cu « cap pentru matematică » îşi pot însuşi temeinic cunoştinţele de matematică. Această teză falsă este respinsă de pedagogia ştiinţifică, progresistă.

Cu totul opus şcoalei burgheze este orientată şcoala în statul nostru democrat popular; ea crează premizele necesare realizării unei legături strînse între învăţămînt şi practică. Învăţămîntul nostru are un conţinut ştiinţific, fundamentat pe concepţia materialist-dialectică. Obiectivele învăţămîntului derivă din legea fundamentală a statului socialist: creşterea continuă a nivelului de trai material şi cultural al oamenilor muncii. De aceea unul dintre scopurile învăţămîntului este de a pregăti cadrele necesare dezvoltării economice a patriei noastre, cadre stăpîne pe tehnica şi ştiinţa cea mai avansată, capabile să creeze în tehnică şi în ştiinţă, precum şi cadrele necesare ridicării nivelului cultural al poporului. Acest obiectiv principal al învîţămîntului în R.P.R. se referă la toate treptele şcolii,

la toate sectoarele învățămîntului, la școala de cultură generală, ca și la școlile profesionale de ucenici, la universități ca și la institutele de învățămînt tehnic superior. Este deci firesc ca în conținutul învățămîntului de cultură generală, în alegerea obiectelor de studiu, în alcătuirea programelor și manualelor, să avem în vedere problemele practice pe care le pune economia și cultura în procesul de construcție a socialismului. Este firesc să se țină seamă în organizarea și conținutul învățămîntului de cultură generală, de factorii care determină dezvoltarea producției patriei noastre. Care sînt acești factori? Cei mai importanți sînt: tehnica (luînd cuvîntul în sensul cel mai larg) din ce în ce mai ridicată — în care potrivit Directivelor Congresului al II-lea al P.M.R. se va dezvolta mecanizarea și automatizarea proceselor tehnologice — apoi știința, îmbogățită prin munca cercetătorilor științifici. Zi de zi tehnica și știința se depășesc pe ele însele, se crează ramuri noi, se dezvoltă cele existente.

Tineretul nostru trebuie să țină seama de importanța crescîndă a acestor doi factori. Cadrele didactice trebuie să-i cuprindă în orizontul muncii lor.

Progresele tehnicii și științei vor determina depășirea mașinilor pe care le folosim actualmente în uzine, agricultură, transporturi și chiar înlocuirea lor cu alte mașini mai bune, mai rezistente, mai productive, mai economice. Metodele de lucru bune astăzi vor fi de asemenea înlocuite prin alte metode de lucru încă mai bune. Omul va deveni astfel mai tare în lupta pe care o dă pentru supunerea și folosirea naturii.

Ce rezultă din această privire asupra aspectelor din prezent și asupra perspectivei în viitor a muncii productive în patria noastră, pentru tineretul nostru școlar?

Rezultă că tineretul nostru trebuie să-și însușească cunoștințele în domeniul științelor naturii și deprinderi practice temeinice ca să poată participa cu pricepere la efortul colectiv pentru realizarea și dezvoltarea producției. În același timp tineretul trebuie să aibă capacitatea de a-și însuși în producție noile cuceriri ale tehnicii și științei.

Sistemul școlar în care elevii își pot însuși temeinic cunoștințele teoretice și practice din domeniul științelor despre natură (fizică, matematică, chimie biologie), în legătură cu principalele sectoare și mijloace de producție moderne este învățămîntul politehnic.

Învățămîntul politehnic dă elevilor baza teoretică și cunoștințe asupra mașinilor unelte și motoarelor, asupra electrotehnicii și agriculturii, asupra mecanizării și automatizării producției, formîndu-le totodată deprinderi de lucru, deprinderea de a mînui scule, de a executa operații elementare cu principalele mașini. Politehnizarea învățămîntului de cultură generală orientează elevii în problemele producției și le formează baza necesară pentru participarea la procesul de producție. Învățămîntul politehnic realizează sinteza dintre munca manuală și munca intelectuală.

Prin politehnizare se soluționează și problema intrării în producție a absolvenților care nu intră în învățămîntul superior. Pe măsură ce se va dezvolta învățămîntul mediu de cultură generală numărul absolvenților din această categorie va crește. În condițiile învățămîntului politehnic de cultură generală acești absolvenți se vor integra ușor în procesul producției. În condițiile învățămîntului rupt de producție acești absolvenți ar constitui un balast, pentru că fiind străini de producție ei nu ar ști să lucreze nimic (aceasta este situația absolvenților liceelor în regimul burghez). În Uniunea Sovietică pe baza

Directivelor Congreselor al XIX-lea şi al XX-lea al P.C.U.S, politehnizarea învăţămîntului de cultură generală se dezvoltă cu succes. În ţara noastră învăţămîntul se orientează spre includerea elementelor de politehnizare şi spre dezvoltarea lor.

Rezumînd cele arătate pînă acum cu privire la sarcinile şcolii noastre, deci ale cadrelor didactice şi ale tineretului din şcoli, în prezent şi în anii următori, putem spune următoarele:

Pentru a putea contribui efectiv la construirea socialismului în patria noastră elevii trebuie să-şi însuşească temeinic conţinutul ştiinţelor despre natură, legînd teoria de viaţă, de practică, cunoscînd principalele mijloace şi metode de producţie, formîndu-şi deprinderi practice. În acelaşi timp trebuie dezvoltată la elevi capacitatea de muncă independentă şi creatoare necesară atît asimilării noului în tehnică şi ştiinţă cît şi inovării, contribuţie proprie la crearea noului.

Dacă acestea sînt premizele şi direcţia învăţămîntului nostru de cultură generală, înţelegem de ce în planurile de învăţămînt, în programele şcolare, la examene, se acordă o deosebită importanţă pregătirii la matematică a elevilor. În epoca pe care o trăim, numai cunoaşterea temeinică a matematicii deschide porţile spre studiul unor ştiinţe ale naturii ca fizica, chimia şi spre înţelegerea aplicării lor în domeniul industriei, agriculturii, transporturilor, biologiei, medicinii.

Fizicianul şi chimistul exprimă fenomenele naturii şi legile ei în limbaj matematic. Cu cît fenomenele studiate sînt mai complexe, cu atît aparatul matematic folosit este dezvoltat, mai pretenţios. Numeroase ramuri ale matematicii au fost create şi adîncite tocmai spre a pune la îndemîna fizicii şi chimiei mijloacele cele mai proprii de generalizare a datelor experienţei şi posibilitatea de a prevedea desfăşurarea altor fenomene din această generalizare. Teoria funcţiilor de variabilă complexă, studiul ecuaţilor diferenţiale, teoria cîmpurilor, calculul matricial şi tensorial şi alte numeroase ramuri ale matematicii au fost elaborate în acest scop. Sub ochii noştri se constituie o mare şi importantă ramură a fizicii cu perspectivele cele mai mari pentru revoluţionarea tehnicii: fizica nucleară. Pentru a pătrunde această ramură a fizicii este necesară însă cunoaşterea unui subtil material matematic.

În industrie, agricultură, transporturi se folosesc maşini şi agregate din ce în ce mai complexe. Calculul, proiectarea, folosirea acestor maşini şi agregate se sprijină de asemenea pe stăpînirea unui bogat material matematic.

Problemele electrotehnicii, ale construcţiei de maşini electrice, problemele energeticii, ale radiofoniei, implică de asemenea extinse cunoştinţe de matematică. Medicina însăşi foloseşte atît pentru diagnostic, cît şi pentru terapeutică instalaţii şi aparate complexe a căror cunoaştere, manipulare şi construcţie implică însuşirea matematicii. Metodele moderne de cercetare în biologie şi medicină valorifică din plin progresele fizicii, chimiei şi tehnicii moderne. Pentru exemplificare este suficient să notăm recenta folosire a atomilor marcaţi în medicină şi biologie. Aşadar, pe această cale, medicul şi biologul sînt solicitaţi să cunoască bine matematica.

Se înţelege astfel pentru ce muncitorul calificat, tehnicianul, specialistul cu înaltă calificare — fiecare la nivelul sectorului său de muncă, al răspunderii ce-i revine în producţie, astăzi — şi tot mai mult în viitor — trebuie să stăpînească instrumentul ştiinţific de calcul, care este matematica. Pregătirea insuficientă la matematică determină însuşirea la un nivel scăzut a ştiinţelor

despre natură şi ca urmare, a specialităţii. Aceasta duce la o muncă empirică în producţie. Aceasta influenţează negativ dezvoltarea producţiei, îngrădind posibilităţile de documentare deci de însuşire a noului în tehnică, în ştiinţă.

Aşadar, matematicile constituind instrumentul de calcul şi de exprimare al fenomenelor şi legilor naturii, al construcţiei şi funcţio ării maşinilor, al tehnologiei, fiind folosite cu atît mai mult cu cît cunoaşterea fenomenelor naturii devine mai adîncă şi cu cît punerea acestor fenomene în serviciul omului se face pe o scară mai întinsă, este explicabil de ce învăţămîntul nostru realist-ştiinţific accentuează asupra bunei pregătiri matematice a elevilor.

De aceea tineretul nostru din şcoli, înţelegînd sarcinile ce-i revin în construcţia viitorului luminos al patriei, trebuie să considere ca datorie a sa temeinica însuşire a matematicii.

Astfel tineretul va avea baza necesară şi pentru a da contribuţia sa la mersul înainte al tehnicii şi ştiinţei.

Matematica, prin riguroasa înlănţuire a raţionamentului educă organizarea gîndirii elevilor. Ea este un puternic instrument de investigaţie şi exprimare. După cum fără cunoaşterea scrisului şi cititului omul rămîne la marginea culturii, fără cunoaşterea matematicii omul rămîne la marginea ştiinţei şi a tehnicii, sclavul empirismului şi al rutinei.

Că matematica are un rol important în pregătirea tineretului nostru se poate deduce din accentul care a fost pus pe acest studiu după Reforma Învăţămîntului din 1948. Recenta Hotărîre a Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Romîn şi a Consiliului de Miniştri al Republicii Populare Romîne cu privire la îmbunătăţirea învăţămîntului de cultură generală, din 13 iulie 1956, subliniază mai mult acest rol. Astfel constatînd că nivelul ştiinţei şi tehnicii moderne impune lărgirea cunoştinţelor de matematici încă din şcoala medie, s-a considerat că este necesar a se completa programa studiată în prezent pentru şcoala medie de 11 ani, cu elemente de algebră superioară, de geometrie analitică, de calcul diferenţial şi integral. Studiul acestor ramuri ale matematicilor în liceu va crea posibilitatea expunerii mai complete şi mai ştiinţifice a fizicii, va face să crească capacitatea tineretului de a înţelege şi rezolva problemele tehnice.

Alături de acţiunile ce vor trebui întreprinse de cadrele didactice pentru îmbunătăţirea învăţămîntului matematicilor şi pentru a lămuri elevilor datoria ce au de a studia temeinic această ştiinţă «Gazeta matematică şi fizică», răspunzînd sarcinii trasată de Partid la Congresul al II-lea, va trebui să-şi intensifice activitatea şi să găsească mijloacele, căile, prin care să contribuie la ridicarea nivelului de pregătire matematică a absolvenţilor şcolilor medii.

INTRODUCERE IN STUDIUL INELELOR ŞI CORPURILOR NUMERICE ŞI ABSTRACTE

L. şi B. CONSTANTINESCU, Iaşi

ÎN acest articol vom da noţiunea de inel şi corp numeric şi apoi, vom generaliza aceste noţiuni pentru o mai bună înţelegere a aplicaţiilor lor, în algebra elementară.

I. *Inele şi corpuri numerice.*

a) *Inelul numerilor întregi.*

Mulţimea numerelor întregi pozitive, negative şi zero, adică totalitatea numerelor întregi pe care o vom nota cu litera Z, se bucură de următoarele proprietăţi principale cu privire la operaţiile de adunare şi înmulţire:

1. Fie a şi b două numere oarecare care aparţin mulţimii Z. Există un număr $c = a + b$ care aparţine tot mulţimii Z. În acest caz se spune că în mulţimea Z este definită operaţia de adunare sau că mulţimea Z este închisă faţă de operaţia de adunare.

2. În mulţimea Z există un element 0, care poartă numele de elementul neutru faţă de operaţia de adunare, astfel încît:

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

oricare ar fi numărul a, al mulţimii Z.

3. Oricare ar fi numărul a al mulţimii Z există un număr $-a$, care face parte din aceiaşi mulţime şi poartă numele de opusul numărului a. El se bucură de proprietăţile:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

4. Fie a şi b două numere oarecare care aparţin mulţimii Z. Există un număr $d = a.b$, care aparţine mulţimii Z. În acest caz se spune că în mulţimea Z este definită operaţia de înmulţire sau că mulţimea este închisă faţă de operaţia de înmulţire.

5. În mulţimea Z există un element neutru faţă de operaţia de înmulţire care poartă numele de elementul unitate al mulţimii. Acest element este numărul întreg 1 şi se bucură de proprietăţile:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Mulţimea Z îndeplinind ac ste condiţii, formează un *inel numeric.*

b) *Inelul numerelor raţionale.*

Mulţimea tuturor numerelor de forma $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, p şi q fiind numere întregi numită mulţimea numerelor raţionale, o vom nota cu litera R.

Elementele acestei mulţimi satisfac aceleaşi condiţii pe care le satisfac elementele mulţimii Z.

1. Fie $\frac{p}{q}$ şi $\frac{p'}{q'}$, două numere ale mulţimii R. Suma lor, $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$, este un număr care aparţine aceleiaşi mulţimi R.

2. Mulțimea R conține elementul 0, astfel că:

$$\frac{p}{q} + 0 = 0 + \frac{p}{q} = \frac{p}{q}.$$

oricare ar fi numărul rațional $\frac{p}{q}$.

3. Oricărui număr de forma $\frac{p}{q}$ al mulțimii R, îi corespunde un număr $-\frac{p}{q}$ care poartă numele de opusul numărului $\frac{p}{q}$ și care face parte din aceiași mulțime R. El se bucură de proprietățile:

$$\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = \left(-\frac{p}{q}\right) + \frac{p}{q} = 0$$

4. Fie $\frac{p}{q}$ și $\frac{p'}{q'}$, două numere oarecare ale mulțimii R. Produsul lor, $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$ este numărul care aparține tot mulțimii R.

5. Mulțimea R conține elementul unit te care este numărul 1 și îndeplinește condițiile:

$$\frac{p}{q} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q},$$

oricare ar fi numărul rațional $\frac{p}{q}$.

Mulțimea R satisfăcînd aceste cinci axiome formează de asemenea un inel numeric.

c) *Inelul numerelor reale.*

Mulțimea numerelor reale pe care o notăm cu litera D, satisface cele cinci axiome date mai sus, deci este un inel numeric. Cititorul este rugat să verifice prin exemple numerice, această afirmație.

d) *Inelul numerelor complexe.* Mulțimea numerelor de forma $a + bi$, unde $i^2 = -1$, i r coeficienții a, b sînt numere reale, formează mulțimea numerelor complexe, pe care o vom nota cu litera K. Această mulțime verifică cele cinci axiome:

1. Fie $z = x + yi$ și $z' = x' + y'i$, două numere oarecare aparținînd mulțimii K. Suma lor $c = z + z' = (x + x') + (y + y')\,i$, este un număr care aparține tot mulțimii K.

2. Există în mulțimea K, numărul 0 ($a = 0$, $b = 0$) astfel ca:

$$0 + z = z + 0 = z,$$

oricare ar fi numărul z, aparținînd mulțimii K.

3. Oricărui element de forma $a + bi$ îi corespunde elementul opus $-a - bi$, care aparține mulțimii K, astfel că:

$$(a + bi) + (-a - bi) = (-a - bi) + (a + bi) = 0.$$

4. Oricare ar fi numerele $z = x + yi$ şi $z' = x' + y'i$, aparţinînd mulţimii K, numărul $zz' = (x + yi).\ (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'\ y)\ i$ aparţine mulţimii K.

5. Mulţimea K conţine elementul unitate care este numărul 1 ($a = 1$, $b = 0$), astfel ca $1 \cdot z = z \cdot 1 = a$, oricare ar fi numărul z aparţinînd mulţimii K.

Mulţimea K îndeplinind aceste axiome formează un inel numeric.

Exemplele de mai sus sînt exemple de inele care au elementul unitate, adică elementul neutru faţă de operaţia de înmulţire. Mulţimile ale căror elemente satisfac numai primele patru axiome obligatorii pentru definiţia unui inel numeric formează inele numerice fără elementul unitate.

Exemple de inele fără elementul unitate:

1) Mulţimea numerelor pare, 2) mulţimea numerelor întregi multipli ai lui m, $m \neq 1$.

Mulţimi numerice care nu formează inel.

1. Mulţimea numerelor impare nu formează inel deoarece suma a două numere impare este un număr par, deci nu aparţine aceleiaşi mulţimi.

2. Mulţimea numerelor de forma: $c = a + b\sqrt[3]{p}$, unde a şi b sînt numere întregi sau raţionale oarecare, iar numărul p întreg $\neq m^3$, nu formează un inel deoarece produsul a două numere de această formă este un număr care nu face parte din aceiaşi mulţime.

Cititorul este rugat să verifice afirmaţia.

3. Mulţimea numerelor pozitive ca şi mulţimea numerelor negative nu formează inele numerice căci opusul oricărui număr din aceste mulţimi este un număr care nu face parte din mulţimea respectivă. Se mai pot găsi şi alte exemple.

Subinel: O mulţime care conţine elemente ale altei mulţimi dar nu pe toate, se numeşte o submulţime. Dacă mulţimea ce cuprinde submulţimea este un inel, iar submulţimea formează şi ea un inel, atunci inelul format de submulţime este un subinel al inelului format din mulţime.

Exemple: 1. Inelul numerelor pare este un subinel al inelului numerelor întregi;

2. Inelul numerelor reale este un subinel al inelului numerelor complexe.

Cititorul este rugat să găsească alte subinele ale inelului numerelor complexe.

Unităţile unui inel.

Unele elemente ale unui inel se bucură de proprietatea că inversele lor sînt elemente ale aceluiaşi inel. Vom numi inversul unui element $a \neq 0$, elementul a^{-1} pe care-l vom nota cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$, îndeplinind condiţiile $a^{-1} \cdot a = a.a^{-1} = 1$. Elementele care îndeplinesc aceste condiţii se numesc *unităţi ale inelului.*

Se va face deosebire între aceste unităţi şi unitatea inelului care este elementul neutru faţă de înmulţire şi care este unic determinat. Se va observa că inelele care nu au elementul unitate (neutru) nu au nici un alt element unitate, adică nici un element al cărui invers să aparţină inelului respectiv.

Exemple: 1. Inelul numerelor întregi are ca unităţi numerele $a = 1$ şi $a = -1$. Se demonstrează uşor că acestea sînt singurele unităţi ale acestui inel.

2. Inelul numerelor raţionale are ca unităţi toate numerele raţionale diferite de 0, căci orice număr de forma $\frac{p}{q} \neq 0$ are un invers $\frac{q}{p}$ care aparţine aceluiaşi inel.

3. Inelul numerelor pare nu are nici un element unitate.

Corp numeric.

Un inel numeric se numeşte *corp numeric* atunci cînd orice element al său $a \neq 0$, are un invers care îi aparţine, adică ale cărui elemente diferite de 0 sînt toate unităţi.

Exemple de corpuri numerice. 1. Inelul numerelor raţionale este un corp numeric.

2. Inelul numerelor complexe este un corp numeric deoarece oricare element de forma $x = a + bi$; $x \neq 0$ are un invers:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i,$$

care este tot un număr complex.

Se observă că dacă a şi b sînt numere întregi, inelul numerelor complexe de forma $a + bi$ nu este un corp.

3. Mulţimea tuturor numerelor complexe de forma $c = a + bi\sqrt{3}$ unde a şi b sînt numere raţionale oarecare, formează un corp.

4. Mulţimea numerelor de forma $c = a + b\sqrt{d}$, unde a şi b sînt numere raţionale, iar d un întreg oarecare, formează un corp.

Cititorul este rugat să verifice aceste afirmaţii.

Subcorp. Dacă R este un corp şi toate elementele lui sînt elementele unui alt corp necuprinzîndu-le pe toate, atunci vom spune că R este un subcorp al corpului K.

Exemple de subcorpuri. 1. Corpul numerelor reale este un subcorp al numerelor complexe.

2. Corpul numerelor raţionale este un subcorp al numerelor reale.

Se face observarea: în corpul numerelor reale sînt cuprinse diferite corpuri numerice. Cel mai mic dintre ele este corpul numerelor raţionale.

II. *Inele şi corpuri abstracte.* Ne-am ocupat pînă acum, de mulţimi ale căror elemente sînt numere. Vom generaliza noţiunile introduse considerînd mulţimi de elemente abstracte, adică mulţimi de elemente a căror natură nu intră în demonstraţie. Întîlnim astfel de mulţimi în diferite ramuri ale matematicii şi aplicaţiile ei în tehnică şi în ştiinţele naturii.

Inel abstract. O mulţime de elemente M se va numi inel dacă elementele ei satisfac următoarele axiome:

1. În mulţimea M sînt definite două operaţii: adunarea şi înmulţirea.

2. Adunarea este comutativă: $a + b = b + a$, oricare ar fi elementele a şi b ale mulţimii M.

3. Adunarea este asociativă: $a + (b + c) = (a + b) + c$, oricare ar fi elementele a, b, c ale mulţimii M.

4. Mulţimea M conţine un element 0 neutru faţă de operaţia de adunare, astfel că $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi elementul a al mulţimii M.

5. Oricare ar fi elementul a al mulţimii M, există un element $-a$, numit opusul lui a, care aparţine mulţimii M, astfel că $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

6. Operaţiile de înmulţire şi adunare sînt legate prin legea de distributivitate: $a(b + c) = ab + ac$, oricare ar fi elementele a, b, c ale mulţimii M.

Acestea sînt axiomele pe care trebuie să le satisfacă o mulţime pentru ca ea să fie un inel.

Sînt mulţimi care satisfac următoarele axiome suplimentare, pe lîngă cele obligatorii:

1. Înmulțirea este comutativă: $ab = ba$, oricare ar fi elementele a, b ale mulțimii considerate. În acest caz, mulțimea formează un *inel comutativ.*

2. Înmulțirea este asociativă: $a(b\,c) = (a\,b)\,c$, oricare ar fi elementele a, b, c, ale mulțimii date. În acest caz, mulțimea formează un *inel asociativ.*

3. Mulțimea conține un element neutru față de operația de înmulțire — pe care-l vom nota convențional cu e — satisfăcînd condițiile: $e \cdot a = a \cdot e = a$, oricare ar fi elementul a al mulțimii date.

Vom arăta că acest element este unic determinat. Presupunem că mulțimea dată mai are un element unitate e'. Conform condițiilor pe care le satisface elementul unitate avem: $e \cdot e' = e' \cdot e = e' = e$, deci elementul unitate este unic determinat. Inelul care conține un astfel de element se numește *inel cu unitate.*

Din exemplele numerice date deducem că toate inelele numerice sînt comutative și asociative, dar nu toate au elementul unitate.

Există mulțimi de elemente care formează inele necomutative sau inele neasociative. Se găsesc astfel de inele atît în matematică, cît și în aplicațiile ei în tehnică și științele naturii.

Corp abstract. Vom numi corp abstract orice mulțime de elemente abstracte care formează un inel ale cărui elemente, diferite de zero, sînt toate unități; adică, orice element a diferit de zero al unui inel are un invers care-i aparține și care îndeplinește condițiile: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Exemple de inele abstracte. a) Considerăm o mulțime P, ale cărei elemente sînt polinoame de o variabilă cu coeficienți din inelul numerelor întregi. Vom arăta că această mulțime formează un inel, numit *inelul polinoamelor de o variabilă cu coeficienți întregi.*

1. Fie A și B două elemente ale acestei mulțimi. De exemplu:

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$
$$B = b_0 + b_1 x.$$

Suma lor: $A + B = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) \cdot x + a_2 \cdot x^2$; se vede că suma este un polinom care face parte din mulțimea P, fiind tot un polinom cu coeficienți întregi.

Produsul lor: $A.B = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)(b_0 + b_1 x) =$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_2 b_0 + a_1 b_1)\, x^2 + a_2 b_1 x^3.$$

Se vede că acest produs este un polinom cu coeficienți întregi, deci face parte din aceiași mulțime P.

2. Adunarea este comutativă:

$$A + B = B + A = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + a_2 x^2 =$$
$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)\, x + a_2 x^2.$$

Oricare ar fi elementele A, B ale mulțimii P se vede că adunarea este comutativă, deoarece coeficienții fac parte dintr-un inel comutativ.

3. *Adunarea este asociativă.* Oricare ar fi elementele A, B, C ale mulțimii P vom avea:

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Această axiomă se verifică, deoarece coeficienții polinoamelor obținute sînt elementele inelului numerelor întregi, care este un inel asociativ.

4. Mulțimea P conține un element zero, neutru față de operația de adunare: $A + 0 = 0 + A = A$, oricare ar fi elementul A al mulțimii P. Elementul 0 este polinomul al cărui coeficienți sînt toți nuli: $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

5. Oricare ar fi elementul A al mulțimii P, există un element $-A$ numit opusul elementului A. El aparține aceleiași mulțimi și se obține schimbînd semnul tuturor coeficienților polinomului A.

Exemplu: fie $A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; opusul său este: $-A = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2$. El se bucură de proprietățile:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0.$$

De exemplu:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (-a_0 - a_1 x - a_2 x^2) =$$

$$= (-a_0 - a_1 x - a_2 x^2) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 0.$$

6. Operațiile de înmulțire și adunare satisfac legile de distributivitate: la dreapta și la stînga.

Fie A, B, C, polinoame care fac parte din mulțimea P. Vom avea:

$$A(B + C) = AB + AC; \quad (B + C)A = BA + CA.$$

Verificarea se face ușor.

7. Inelul P are un element unitate, care se obține făcînd termenul liber al unui polinom e al cu numărul întreg 1, iar toți ceilalți coeficienți egali cu zero ($a_0 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$). Acest element unitat se bucură de proprietățile: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$, oricare ar fi elementul A al mulțimii P.

8. Inelul polinoamelor de o variabilă cu coeficienți întregi este un inel comutativ: $A \cdot B = B \cdot A$, oricare ar fi elementele A și B ale mulțimii P. Verificarea se poate face ușor.

9. Inelul polinoamelor de o variabilă cu coeficienți întregi este un inel asociativ: $A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$, oricare ar fi elementele A, B, C ale mulțimii P. Verificarea se poate face ca în cazul axiomelor de mai sus.

b) *Inelul polinoamelor de o variabilă cu coeficienți complexi.*

c) *Inelul polinoamelor de o variabilă cu coeficienți reali.*

d) *Inelul polinoamelor cu coeficienți numerici dintr-un inel oarecare numeric.* (Cititorul poate lua coeficienții din inelele numerice considerate.)

e) *Inelul claselor de resturi.*

Considerăm mulțimea numerelor întregi. Ea se poate împărți în clase după restul pe care-l dau numerele prin împărțirea lor cu un număr întreg dat. Aceste clase se numesc *clase de resturi*, iar numărul prin care se împart se numește *modul*. Fie spre exemplu, împărțirea numerelor întregi în clase după restul ce se obține prin împărțirea lor cu 3. Vom obține:

— clasa multiplilor de 3 cuprinde numerele ce dau restul 0. Vom nota această clasă cu C_0;

— clasa numerelor ce dau restul 1; o vom nota cu C_1;

— clasa numerelor ce dau restul 2; o vom nota cu C_2.

Acestea sînt singurele clase în care se pot împărți numerele după restul dat prin împărțirea lor cu 3, deoarece restul împărțirii printr-un număr dat este cel mult cu o unitate mai mic decît împărțitorul. Aceste clase vor cuprinde numerele întregi, sub forma: $C_0 = 3m$; $C_1 = 3h + 1$; $C_2 = 3k + 2$, unde m, h și k sînt numere întregi.

Considerînd clasele de numere astfel obținute, C_0, C_1, C_2, ca fiind elementele unei mulțimi pe care o vom nota cu C, vom arăta că această mulțime este un inel pe care-l vom numi *inelul claselor de resturi*.

1. Mulțimea este închisă față de operația de adunare. Dăm mai jos tabelul care ne indică clasa în care se află suma a două elemente oarecare ale mulțimii C.

	C_0	C_1	C_2
C_0	C_0	C_1	C_2
C_1	C_1	C_2	C_0
C_2	C_2	C_0	C_1

Ele se bucură de proprietatea: $C_i + C_j = C_j + C_i$ pentru oricare $i, j = 0, 1, 2$. De exemplu: $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$, adică:

$$(3h + 1) + (3k + 2) = (3k + 2) + (3h + 1) = \\ = (h + k + 1)\ 3 = C_0 .$$

Elementele acestui tabel se obțin adunînd un element de pe linia întîia cu un lement de pe coloana întîia, iar rezultatul se află la intersecția liniei și coloanei pe care se găsesc elementele sumei.

Mulțimea este închisă față de operația de înmulțire. Dăm mai jos tabelul care ne indică clasa în care se află produsul a două elemente oarecare ale mulțimii C:

	C_0	C_1	C_2
C_0	C_0	C_0	C_0
C_1	C_0	C_1	C_2
C_2	C_0	C_2	C_1

De exemplu: $C_2 \cdot C_1 = (3k + 2)(3h + 1) = 3 \cdot (3hk) + (2 \cdot 3h + 3k) + 2 = C_2$. Oricare ar fi elementele mulțimii $C(C_i, C_j)$, produsul lor este un element al mulțimii C. Această axiomă este verificată de tabelul însuși. Acest tabel se citește ca și tabelul adunării.

2. Adunarea este comutativă: $C_i + C_j = C_j + C_i$, oricare ar fi $i, j = 0, 1, 2$. Exemplu: $C_2 + C_1 = C_1 + C_2$; adică:

$$(3k + 2) + (3h + 1) = (3h + 1) + (3k + 2) = C_0 .$$

3. Adunarea este asociativă: $C_i + (C_j + C_k) = (C_i + C_j) + C_k$, oricare ar fi $i, j, k = 0, 1, 2$. Exemplu: $C_0 + (C_1 + C_2) = (C_0 + C_1) + C_2$, adică:

$$3m + [(3h + 1) + (3k + 2)] = [(3m + (3h + 1)] + (3k + 2) = \\ = 3\ (m + h + k + 1) = C_0 .$$

4. Mulțimea C conține un element neutru față de operația de adunare C_0, care satisface condițiile: $C_0 + C_i = C_i + C_0 = C_i$; oricare ar fi $i = 0, 1, 2$.

Verificarea axiomei se poate face din tabelul de adunare.

5. Oricare ar fi elementul C_i al mulțimii C există un element $-C_i$, numit opusul elementul i C, care satisfac condițiile: $C_i + (-C_i) = (-C_i) + C_i = C_0$ oricare ar fi $i = 0, 1, 2$.

Exemplu : fie $C_i = C_1 = 3h + 1$; $-C_i = -C_1 = -3h - 1$. Vom avea: $C_1 + (-C_1) = (-C_1) + C_1$; adică, $(3h + 1) + (3h' - 1) = (3h - 1) + (3h' + 1) = C_0$.

6. Mulțimea C satisface legea distributivității: $C_i (C_j + C_k) = C_i \cdot C_j + C_i \cdot C_k$, oricare ar fi $i, j, k = 0, 1, 2$.

Exemplu: $C_0 (C_2 + C_1) = C_0 \cdot C_2 + C_0 \cdot C_1$, adică:

$$3m [(3k + 2) + (3h + 1)] = 3m (3k + 2) + 3m (3h + 1).$$

Am arătat deci, că mulțimea claselor de resturi satisface axiomele unui inel, prin urmare, ea formează un inel. Se demonstrează ușor că acest inel satisface axiomele de comutativitate și asociativitate față de operația de înmulțire.

Inelul claselor de resturi este deci, un inel comutativ și asociativ. Inelul claselor de resturi are elementul unitate, elementul C_1.

Studiind proprietățile elementelor inelelor claselor de resturi, vom observa că ele se bucură de proprietăți pe care nu le au elementele inelelor numerice. De exemplu: dacă considerăm elementele claselor de resturi de modul 4: C_0, C_1, C_2, C_3, observăm că produsul elementului C_2 cu el însuși ne dă ca rezultat, elementul C_0:

$$C_2 = 4k + 2; \quad (C_2 \cdot C_2) = (4k + 2)(4k + 2) = 16k^2 + 16k + 4 = C_0.$$

Dacă considerăm elementele claselor de resturi de modul 6: C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 observăm că produsul elementului C_2 cu elementul C_3 ne dă ca rezultat elementul C_0 :

$$C_2 \cdot C_3 = (6h + 2)(6h' + 3) = 36hh' + 12h' + 18h + 6 = C_0.$$

În general se va observa că în mulțimea claselor de resturi de module neprime există elemente diferite de zero ale căror puteri sînt zero, și elemente ale căror produse sînt egale cu zero fără ca elementele să fie nici unul egal cu zero. Aceste proprietăți sînt specifice și altor inele de elemente abstracte întîlnite în matematică și aplicațiile ei, proprietăți pe care inelele numerice nu le au.

Exemple de corpuri abstracte.

1. Inelul claselor de resturi de modul prim formează un corp, deoarece orice element al inelului diferit de zero are un invers care aparține inelului, deci toate elementele lui diferite de zero sînt unități.

Exemplu: inelul claselor de resturi de modul 3. Elementul C_1 are ca invers pe el însuși. Elementul C_2 are ca invers pe el însuși, căci $C_2 \cdot C_2 = C_1$.

Inelul claselor de resturi de modul 5 are toate elementele afară de C_0, unități, adică orice element C_i înmulțit cu un anumit element C_j ne dă elementul C_0.

Cititorul este rugat să găsească inversul fiecărui element diferit de elementul C_2. Exemplu: elementul C_3 este inversul lui C_2 deoarece $C_3 C_2 = C_2 \cdot C_3 = C_1$.

2. Inelul fracţiilor raţionale de forma $\frac{P}{Q}$, unde P şi Q sînt elementele unui inel de polinoame cu coeficienţi oarecari, este un corp deoarece orice element $\frac{P}{Q} \neq 0$ are un invers $\frac{Q}{P}$ care aparţine aceleiaşi mulţimi.

Aplicaţii în algebră.

În baza axiomelor referitoare la operaţiile de adunare şi înmulţire date mai sus, ne putem permite să facem cu elementele unui inel abstract toate calculele pe care le facem în mod obişnuit cu elementele unui inel numer c. Cu ajutorul acestor axiome vom deduce *regula semnelor din algebră.*

1. Oricare ar fi elementul a al unui inel, avem $a + 0 = a$. Înmulţind egalitatea de mai sus la stînga cu b şi aplicînd legea distributivităţii avem: $b(a + 0) = b \cdot 0 + b \cdot a$. Adunînd în ambele părţi ale egalităţii: $b \cdot a + b \cdot 0 = b \cdot a$, opusul elementului $b \cdot a$ care este $-(b \cdot a)$ avem:

$$-(b \cdot a) + b \cdot a + b \cdot 0 = b \cdot a + [-(b \cdot a)].$$

De aci deducem $b \cdot 0 = 0$.

Înmulţind egalitatea dată cu b la dreapta, avem:

$$(a + 0)\, b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b.$$

Adunînd în ambele părţi ale egalităţii: $a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b$, opusul elementului $a \cdot b$, obţinem:

$$-(a \cdot b) + a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b + [-(a \cdot b)]$$

de unde deducem: $0 \cdot b = 0$.

Am dedus prin urmare, că orice element al unui inel înmulţit la stînga sau la dreapta cu zero dă elementul zero, ca o consecinţă a legii distribu ivităţii.

2. Oricare ar fi elementul a al unui inel, avem $a + (-a) = 0$. Înmulţind la stînga cu b şi aplicînd legea distributivităţii, avem:

$$b[a + (-a)] = b \cdot a + b \cdot (-a) = b \cdot 0 = 0.$$

Adunînd în ambele părţi ale egalităţii: $b \cdot a + b \cdot (-a) = 0$ elementul $-(b \cdot a)$ avem $-(b \cdot a) + b \cdot a + b \cdot (-a) = -(b \cdot a)$, de unde deducem:

$$b \cdot (-a) = -b \cdot a.$$

De asemenea, înmulţind la dreapta cu elementul b şi aplicînd legea distributivităţii, avem:

$$[a + (-a)]\, b = a \cdot b + (-a) \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Adunînd elementul $-(a \cdot b)$ ambelor părţi ale egalităţii $ab + (-a) \cdot b = 0$, avem: $-(a \cdot b) + a \cdot b + (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, de unde deducem:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

Am dedus astfel, produsul unui element pozitiv cu unul negativ şi produsul unui element negativ cu unul pozitiv.

Dacă e ementul b este un întreg n, pentru orice e'ement a al unui inel, vom avea: $n(-a) = -(n \cdot a)$.

Am dedus astfel, multiplii negativi ai elementelor unui inel.

3. Fie $-a$ şi $-b$ elementele opuse ale elementelor a, b ce aparţin unui inel. Vom arăta că:

$$(-a) \cdot (-b) = (a \cdot b).$$

Ştim de mai sus că:

$$-b\,[a + (-a)] = (-b) \cdot 0 = 0.$$

Aplicînd legea distributivităţii, avem:

$$(-b) \cdot (a) + (-b) \cdot (-a) = 0.$$

În baza celor de mai sus avem:

$$-(b \cdot a) + (-b) \cdot (-a) = 0.$$

Adunînd în ambele părţi ale egalităţii elementul opus $-(b \cdot a)$, care este $b \cdot a$, avem:

$$-(b \cdot a) + b \cdot a + (-b) \cdot (-a) = 0 + b \cdot a.$$

De aci deducem:

$$(-b) \cdot (-a) = b \cdot a.$$

Am dedus astfel, produsul unui element negativ cu alt element negativ al unui inel.

Din regulile deduse se observă că întrebuinţînd axiomele care definesc un inel, s-au putut deduce toate regulile din algebră.

CURENT TRIFAZAT

Prof. **ION OPRAN**

şc. m. mixtă nr. 2, Bucureşti

SECOLUL în care trăim poate fi denumit pe drept cuvînt secolul electricităţii, deoarece energia electrică a devenit temelia tehnicii moderne şi constituie o forţă revoluţionară în toate domeniile vieţii. Actualmente nu mai există niciun domeniu de activitate industrială, agricolă, tehnică sau culturală, în care energia electrică să nu poată fi folosită într-o formă oarecare.

Varietatea mare a domeniilor în care este folosită energia electrică se explică prin faptul că ea poate fi uşor transportată, transformată în alte forme de energie şi obţinută prin transformarea altor forme de energie. În prezent, cel mai mult întrebuinţat este motorul electric. Aceasta se explică prin faptul că el poate fi instalat în orice loc, în încăperi închise sau în aer liber, ori unde este necesar.

Prima încercare de a obţine o mişcare mecanică cu ajutorul curentului electric a fost făcută în 1822 de către marele fizician Faraday; el a construit cîteva dispozitive, care funcţionau prin rotirea unui conductor străbătut de un curent electric în jurul unui magnet sau invers.

Din punctul de vedere al construcţiei, maşina cu abur a avut o mare influenţă asupra construcţiei şi principiilor de funcţionare ale primelor electromotoare. Electromotoarele care au apărut în cel de-al treilea deceniu al secolului trecut erau motoare cu mişcare alternativă, în care bateria galvanică

avea rolul generatorului de abur. Solenoizii înlocuiau cilindrul mașinii cu abur, iar bara de oțel care se putea mișca în interiorul solenoizilor, pistonul.

Pentru alimentarea motoarelor electrice s-a folosit pila lui Volta, care a fost înlocuită treptat prin elemente galvanice și baterii termoelectrice mai perfecționate, iar ulterior dinamul.

În afară de curentul continuu obținut cu elementele galvanice și cu dinamul, s-a găsit un altfel de curent — cel alternativ — obținut cu generatoare electromagnetice.

Pentru a putea cunoaște îndeajuns curentul continuu cît și pe cel alternativ, să analizăm cîteva caracteristici ale unuia și ale celuilalt.

Deși în mașinile electrice se formează curent alternativ, totuși electrotehnicienii erau preocupați de transformarea curentului alternativ în curent continuu. Abia mai tîrziu s-au văzut foloasele mari pe care le poate aduce curentul alternativ.

Astăzi curentul continuu este produs numai în uzinele mici pentru a fi distribuit pe suprafețe restrînse sau pentru scopuri speciale, acolo unde prezintă avantaje față de cel alternativ: la tracțiune, la motoarele care necesită variații mari de viteză, la mașini de tipărit etc. El este folosit de asemenea în electroliză și la fabricarea diferitelor produse în cuptoare încălzite electric.

Marile centrale electrice produc curent alternativ ale cărui avantaje sînt mult mai numeroase. Transmiterea energiei electrice la distanță se face economic numai la tensiuni înalte.

Curentul alternativ poate fi produs ușor direct la tensiuni de 6 000 V, 10 000 V și chiar 15 000 V, în timp ce curentul continuu nu poate fi produs în mod obșnuit decît pînă la tensiuni de 750 V (la tramvai) și numai pentru anumite scopuri, de maxim 1500 V. Tensiunea curentului alternativ poate fi ușor ridicată cu ajutorul transformatoarelor, care sînt mai ieftine, au un randament mare și o funcționare care nu impune o deosebită îngrijire deosebită, tocmai pentru că nu au părți în mișcare.

Cu ajutorul lor tensiunea poate fi ridicată foarte mult, la 100 000 V și chiar mai mult. La aceste tensiuni energia electrică poate fi transmisă la mari distanțe în mod economic. Tot cu ajutorul transformatoarelor tensiunea poate fi redusă spre a fi distribuită fără pericol.

Tensiunea curentului continuu nu poate fi mărită sau coborîtă decît cu ajutorul transformatoarelor rotative (convertizoare), mașini mai scumpe, cu randament mai mic decît al transformatoarelor și cu cheltuieli mari de întreținere. De aceea transmiterea energiei sub formă de curent continuu se face în general la joasă tensiune și pe distanțe mici.

Curentul alternativ este produs în mari unități, care în general sînt acționate cu mare viteză. S-au construit generatoare de curent alternativ de 100 000 kW ale căror viteze ating 3 000 rot/min. Generatoarele de curent continuu nu depășesc 5 000 kW și nu ating viteze prea mari, din cauza dificultăților de comutație.

De asemenea, trebuie adăugat că motoarele de curent alternativ prin inducție sînt mai ieftine și mai ușor de întreținut decît cele de curent continuu; la viteză constantă ele sînt tot atît de bune ca și cele de curent continuu.

Deosebirile de construcție între un generator de curent continuu și unul de curent alternativ sînt:

1. Indusul alternatorului este stator, iar inductorul este rotor, pe cînd la generatorul de curent continuu este invers.

2. Înfăşurarea în care se produce curentul în alternator se găseşte pe partea fixă a maşinii, şi anume pe partea interioară a inelului stator, iar electromagneţii se învîrtesc, fiind alimentaţi de un curent continuu, care vine prin perii şi inele. Alternatorul nu mai are colector. Acest fel de construcţie este justificat de următoarele motive:

a) Alternatoarele sînt în general maşini care produc curenţi la tensiune mai mare decît generatorul de curent continuu, de obicei de 6 000 V. La tensiuni atît de mari este mai uşor de realizat o izolare pe o înfăşurare care stă pe loc, decît pe una în mişcare.

b) Curentul produs de alternator este mai greu de trecut prin inele şi perii, fiind de intensitate mai mare decît curentul de excitaţie, a cărui intensitate şi tensiune (110 V) sînt mici.

3. Înfăşurarea indusului unui alternator este mai simplă decît a indusului de curent continuu. Pe cînd la acesta din urmă înfăşurarea este închisă formînd mai multe căi de curent (cel puţin două), în paralel, la alternatoare înfăşurările sînt deschise.

4. Un alternator are neapărată nevoie şi de o sursă de curent continuu, care să producă excitaţia necesară inductorului. De obicei această sursă se montează pe acelaşi arbore şi este un mic generator de curent continuu, numit excitatoare.

5. În sfîrşit, o altă deosebire importantă: alternatorul nu se poate învîrti cu orice viteză, ci numai cu anumite viteze, care depind de frecvenţa curentului pe care vrem să-l obţinem.

După ce am expus pe scurt avantajele curentului alternativ faţă de cel continuu şi deosebirile dintre cele două categorii de generatoare de curent electric, să examinăm condiţiile care au dus la descoperirea curentului trifazat.

După cum se ştie, o primă dificultate care stă în calea extinderii reţelelor de curent continuu a constat în imposibilitatea de a întrebuinţa în reţelele de acest fel, în care erau conectate lămpi cu incandescenţă, o tensiune mai înaltă. Într-adevăr, în aceste reţele tensiunea trebuie să fie aceiaşi ca şi în receptoare; deoarece însă, lămpile cu incandescenţă se fabrică numai pentru o tensiune de maximum 110—120 V, tensiunea din reţele nu putea fi nici ea mai mare. În afară de aceasta, chiar la o tensiune de aproximativ 220 V, raza de alimentare a reţelei nu putea depăşi 1,5 km. La transmiterea curentului la distanţe mai mari pierderile ce aveau loc, făceau dispozitivul de alimentare cu energie inacceptabil din punct de vedere economic, deoarece pentru funcţionare oarecum satisfăcătoare a lămpilor erau necesari conductori de diametru mai mare şi prin urmare o cantitate mai mare de cupru.

Reversibilitatea maşinilor cu magnet permanent fusese observată încă de academicienii Lenz şi Iacobi, care au studiat aceste maşini, dar posibilitatea de a pune în mişcare o maşină de curent continuu cu ajutorul curentului obţinut de la o altă maşină de acest fel, precum şi aceea de a obţine de la cea dintîi un lucru mecanic, a fost demonstrată pentru prima oară la expoziţia de la Viena din 1883, de către electricianul francez Fontaine. Acesta a arătat posibilitatea de a pune în mişcare o mică maşină a lui Gramme cu ajutorul curentului obţinut de la o altă maşină mai mare de acelaşi tip, chiar racordînd între ele un conductor cu lungimea de 2 km. Mica maşină a lui Gramme, lucrînd ca motor, a putut pune în funcţiune o mică pompă hidraulică.

Posibilitatea transportării energiei electrice la distanţă mare a fost demonstrată amplu la expoziţia de la München în 1882 de către academicianul francez

1991. Într-un loc de latitudine φ, culminația superioară și inferioară a Soarelui este deasupra orizontului.

— In aceeași zi, lungimea umbrei meridiane a unui turn este U_1 la culminația inferioară și U_2 la culminația superioară.

— Să se demonstreze relația:

$$\frac{U_1 + U_2}{U_1 - U_2} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta},$$ δ fiind declinația soarelui.

C. V. Costăchescu

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 747. O garnitură de tren are în total, 30 de vagoane cu cîte două și patru osii, în total sînt 84 osii. Se întreabă cîte vagoare sînt cu 4 osii și cîte sînt cu 2 osii.

Șerban Popescu

E: 748. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, iar x, y, z sînt segmentele determinate pe aceste laturi de cercul înscris, să se dovedească relația:

$$xy + xz + yz = ab + ac + bc - p^2$$

unde $2p = a + b + c$.

Harry Schip, București

E: 749. Pe un șantier, în patru barăci, sînt 436 muncitori. În prima baracă sînt cu 10 muncitori mai mulți decît în baraca a patra unde sînt cu 8 muncitori mai mulți decît în baraca a treia, iar în baraca a doua sînt cu 10 muncitori mai mult decît în baraca a treia. Să se găsească cîți muncitori sînt în fiecare baracă. Rezolvare aritmetică și algebrică.

Mecea Petru, Dej

E: 750. Să se găsească două numere știind că diferența lor este 290, iar dacă împărțim primul număr la al doilea obținem citul 4 și restul 8.

* * *

E: 751. Se dă triunghiul oarecare ABC. Ducem înălțimea AD, iar din D ducem o perpendiculară pe AC care întîlnește bisectoarea unghiului DAC în O. Să se arate că triunghiul DOM (M fiind piciorul bisectoarei) este isoscel.

Șerban Popescu

E: 752. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{2b + 2c - a}{x}\right)^2 + \left(\frac{2c + 2a - b}{x}\right)^2 + \left(\frac{2a + 2b - c}{x}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Florin Torjescu, student București

E: 753. Să se verifice identitatea:

$$(a + b - 2c)^3 + (b + c - 2a)^3 + (c + a - 2b)^3 =$$
$$= 3(a + b - 2c)(b + c - 2a)(c + a - 2b)$$

Gheorghe I. Stoian

---

*) (V: E: 747, 749, 750, 758, VI: E: 751, 753, 756, 757, VII: E: 748, 752, 754, 755, 759, 760).

E: 754. Să se demonstreze că dacă unul din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este 15° înălțimea coborîtă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză este un sfert din ipotenuză.

* * *

E: 755. Într-un cerc de centru O și rază R se înscrie un triunghi ABC. Razele AO și BO întîlnesc tangenta în C la cerc, respectiv în punctele A_1 și B_1. Să se găsească unghiurile triunghiului OA_1B_1 cunoscînd unghiurile triunghiului ABC.

Dragomir Donescu

E: 756. În trapezul dreptunghic $ABCD$ de baze AB, CD fie E mijlocul înălțimi AD și $AD = DC$. Să se arate că dacă BE este perpendicular pe EC atunci suprafața trapezului $ABCD$ este egală cu 10. AB^2.

Gh. Dobrotescu, Predeal

E: 757. Dacă: $\frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$ să se arate că $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 3$.

* * *

E: 758. Să se arate fără a face adunarea, că numărul:

$$N = 232 + 257 + 428 + 5164$$

este un multiplu de 3.

Ioan Rus

E: 759. Se dă un triunghi ABC în care punctul E reprezintă punctul în care înălțimea din unghiul A taie cercul circumscris, iar D punctul în care dreapta EF taie latura BC, F fiind punctul diametral opus vîrfului B. Să se arate că triunghiul AED este isoscel.

Dan Sămărescu

E; 760. Să se afle locul geometric al vîrfului A al unui triungi oarecare ABC pentru care BC fiind fixă, medianele corespunzătoare laturilor AB și AC rămîn perpendiculare.

Octavian Stănășilă, student București

DIN VIAȚA CERCURILOR DE ELEVI

La 27 noiembrie 1955 s-a deschis cercul de matematică pentru elevii din Capitală care a intrat anul acesta în al 7-lea an de funcționare. Conferința de deschidere a fost ținută de tov. prof. univ. *A. Kahane,* cu subiectul « Introducere în geometria proiectivă » și va fi urmată de alte conferințe din același ciclu. S-a dat lista problemelor pentru ședința din 11 decembrie 1955.

La 4 decembrie 1955 s-a deschis cercul de fizică. Conferința de deschidere a fost ținută de tov. conf. univ. *N. Stănescu,* cu subiectul « Unități de măsură ». După conferință a avut loc prima ședință a cercului de probleme de fizică, care începe să funcționeze anul acesta sub conducerea tov. conf. univ. *A. Șaichin.* Prima ședință a cercului de probleme a avut ca temă « Echilibrul fluidelor ». După ce s-au repetat legile fluidelor: Principiul lui Arhimede, legea vaselor comunicante, legea Boyle-Mariotte și s-a vorbit despre unitățile de măsură a presiunilor, s-au rezolvat un număr de 3 probleme model. S-a dat apoi o listă de 5 probleme participanților la cerc pentru a fi rezolvate pînă la ședința următoare, cînd vor fi discutate soluțiile aduse de participanți.

Problemele propuse la cercul de matematici elementare din Capitală în ședința din 27 noembrie 1955

1992. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ să se formeze ecuația cu rădăcinile

a) $y_1 = x_1^2$ și $y_2 = x_2^2$

b) $z_1 = 3y_1 + 2y_2$ și $z_2 = 2y_1 + 3y_2$

c) ce condiții trebuie să îndeplinească p și q pentru ca aceasta din urmă ecuație să aibă rădăcinile egale.

1993. Să se arate că între b și c și înălțimea h a unui triunghi dreptunghic avem relația

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Să se studieze dacă avem o reciprocă.

1994. Să se împartă un triunghi în două părți de egală suprafață cu ajutorul unei drepte perpendiculare pe una din laturi.

1995. Să se afle dacă există triunghiuri cu un unghi de 60° ale căror laturi să fie numere întregi. Aceeași problemă pentru unghiul de 30°.

1996. Baza unei piramide este un dreptunghi. O muchie laterală este perpendiculară pe planul bazei, iar două fețe laterale formează cu planul bazei unghiurile α și β. Să se determine suprafața laterală a piramidei dacă înălțimea ei este H. Să se pună expresia sub formă calculabilă prin logaritmi.

Problemele tratate în ședința din 4 decembrie 1955

1997. Două tuburi cilindrice verticale, avînd secțiunile de 4 cm și 8 cm respectiv, comunică în partea inferioară și conțin mercur ($d = 13{,}6$) în cantitate suficientă. Se toarnă în primul o coloană de apă de 100 cm înălțime, în al doilea o coloană de benzină ($d = 0{,}8$) de 50 cm înălțime. Cum se va deplasa nivelul mercurului în cele două cilindre?

1998. Un barometru împreună cu cuva lui se află într-un vas mai mare.

a) Știind că deasupra mercurului din tubul manometric este vid, se întreabă cîtă apă trebuie turnată în vasul exterior pentru ca apa din exterior și mercurul din barometru să fie la același nivel.

b) Se introduce deasupra mercurului o cantitate de aer, așa fel încît nivelul mercurului din tub să fie la 50 cm deasupra nivelului mercurului din cuvetă, lungimea totală a tubului fiind 100 cm. Care va fi nivelul mercurului dacă în vasul exterior se toarnă apă pînă la înălțimea de 90 cm?

(Se consideră cuveta largă în raport cu tubul așa fel încît nivelul mercurului din cuvetă să nu varieze).

1999. *a)* Să se calculeze presiunea atmosferică la 2000 m deasupra nivelului mării, presupunînd pentru simplificare că stratul de aer între nivelul mării și înălțimea de 2000 m are o densitate mijlocie egală cu media aritmetică a densităților la nivelul mării și la 2000 m, iar temperatura sa este de 0°. Densitatea aerului în condiții normale: 1,293 g/dm³.

b) Să se rezolve aceiași problemă împărțind stratul de la 0 la 2000 m în două straturi și calculînd în prealabil presiunea la nivelul intermediar de 1000 m.

c) Care din cele două rezultate se apropie mai mult de realitate?

Problemele de fizică date pentru ședința din 18 decembrie 1955

2000. *a)* Un cilindru de lemn de stejar ($d = 0{,}95$) de înălțime 40 cm plutește pe apă. Care este înălțimea părții scufundate?

b) Se toarnă peste apă un strat de benzină ($d = 0{,}8$) suficient de înalt. Care va fi înălțimea părții scufundate în apă în acest caz?

c) Să se trateze punctul *b)* în cazul general și să se discute formula.

2001. Trei cilindri verticali A, B, C cu secţiunile de 4 cm², 2 cm² şi 6 cm² comunică în partea inferioară. Ei conţin apă pînă la un anumit nivel. Se toarnă în cilindrul A un strat de benzină ($d = 0{,}8$) înalt de 60 cm, iar în cilindrul B un strat de untdelemn ($d = 0{,}9$) înalt de 20 cm. Cum se modifică nivelul apei în cei trei cilindri?

2002. Un areometru cu tija cilindrică avînd diviziunile de lungime egală, se scufundă în apă pînă la diviziunea 0 şi în acid sulfuric de 69% ($d = 1{,}6$) pînă la diviziunea 60.

a) Pînă la ce diviziune se va scufunda într-un lichid cu densitatea 1,3?

b) Care este densitatea unui lichid în car areometrul se scufundă pînă la diviziunea 30?

2003. Într-un tub cilindric AB prevăzut la capete cu două robinete a şi b, alunecă fără frecare un piston P greu de 2 kg. Lungimea totală a tubului este de 205 cm, iar grosimea pistonului este de 5 cm, secţiunea tubului fiind de 10 cm². Se aşează tubul AB, avînd robinetele a şi b deschise, în poziţie orizontală, se deplasează pistonul P pînă în mijlocul tubului, apoi se închid robinetele.

a) Se înto rce tubul cu capătul B în jos menţinînd robinetele închise. Care va fi poziţia pistonului P?

b) Se deschide apoi, robinetul b. Care va fi acum poziţia pistonului P. Presiunea atmosferică în timpul experienţei: 760 mm Hg.

2004. Un tub îndoit este format din două ramuri verticale de aceiaşi lungime şi aceiaşi secţiune, una închisă şi una deschisă. În tub se află mercur care se ridică la acelaşi nivel în ambele ramuri, lungimea coloanei de aer din tubul închis fiind de 50 cm. Se toarnă mercur în ramura deschisă pînă cînd aceasta se umple. Care va fi lungimea coloanei de aer din tubul închis? Presiunea atmosferică = 760 mm Hg.

ERATĂ. — La problema 1879 în loc de $x + y + u + v$ se va scrie $x^2 + y^2 + u^2 + v^2$. La problema 1880 în loc de $-\sin 5a$ se va scrie $+\sin 5a$. La Olimpiada tinerilor matematicieni 1956 la problema clasei a VII-a nr. 4 (VII.4) se va adăuga: Punctele A_1, B_1, C_1 sînt pe cercul circumscris triunghiului ABC.

La problema 19 4 sub ultimul radical în loc de $x - 1$ se va scrie $1 - x$.

La pagina 548 nr. 12—1955 rînd 18 se scrie 22,415 dm³ în loc de 22415 dm³.

» » 549 » » » » 7 » » ML^2T^{-2} » » » ML^2T^{-3}.

» » 549 » » » » 9 » » $426{,}8\ \frac{\text{kgm}}{\text{kcal}}$ în loc de $426\ \frac{\text{kgm}}{\text{mol°K}}$.

» » 549 » » » » 9 » » $1{,}93\ \frac{\text{kcal}}{\text{Kmol°K}}$ în loc de $1{,}98\ \frac{\text{kcal}}{\text{mol°K}}$.

POŞTA REDACŢIEI

Tov. *Cincu I. Adrian*, elev, cl. X, şc. m. b. nr. 1, Oraşul Stalin. — Problemele trimise (2 şi 5) sînt aplicaţii, fiecare în parte, la cîte o formulă din fizică, sînt deci prea simple şi nu contribuie la formarea judecăţii ci numai la aplicarea mecanică a unei formule. Căutaţi să faceţi diferite combinaţii folosind o serie de cunoştinţe dintr-un anumit domeniu sau din domenii înrudite pentru a putea elabora probleme interesante.

Tov. *Ghisibel Adrian*, absolvent, Bucureşti. — Revedeţi problema trimisă deoarece conţine greşeli.

Tov. *Ştefan Vasile*, elev cl. X şc. m. b. nr. 1, Botoşani. — Una din problemele trimise este greşit rezolvată; este vorba de problema de optică. Celelalte probleme trimise pot fi publicate.

Tov. *Orşivschi Claudiu*, profesor, Tecuci. — Trimiteţi odată cu problema propusă şi rezolvarea ei completă.

Tov. *Juncu Gelu*, cl. X, Roman. — Problema trimisă conţine cunoştinţe de radiotehnică speciale pe care elevii nu au de unde să le ştie. Vă sfătuim să trimiteţi probleme legate de materia predată.

• Tov. *Hufanu Gh.*, profesor, Galaţi. — Lucrarea intitulată « Din istoria fizicii » desigur prezintă interes şi vă rugăm să ne trimiteţi la terminarea ei, o copie dactilografiată pentru a o cerceta în scopul publicării ei în colecţia SSMF. În revistă nu putem publica diferitele ei capitole.

Mai multor corespondenţi. — Abonamentele se fac prin oficiile poştale locale. Pentru numere mai vechi vă puteţi adresa la « Librăria Academiei » Bucureşti Calea Victoriei 27, Serviciul « Cartea prin poştă ».

Tov. *Marchis Felix Ioan*, Reşiţa. — Broşurile din biblioteca SSMF pe care le doriţi, le puteţi comanda prin Centrul de librării, filiala locală.

— Nu se anunţă numele rezolvitorilor care au trimis mai puţin de zece soluţii bune pentru a nu supraîncărca « rubrica rezolvitorilor », astfel că redacţiei G.M.F.-B nu i se vor mai adresa plicuri cu mai puţin de 10 probleme rezolvate.

Problemele propuse nu pot fi luate în seamă dacă nu au rezolvarea lor complectă.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENŢIAŢI

În cursul lunii *iulie* 1955 s-au evidenţiat următorii rezolvitori de probleme:

Stroe Radu, absolvent Ploieşti, *Guiaşu I. Silviu* , clasa X Oradea, *Ene Aurel*, clasa X Curtea de Argeş, *Duduica Radu*, clasa IX-a Bucureşti, *Lazăr Edith*, studentă, an. II Matematici Bucureşti, *Şerb Gabriel Adrian*, student A.T.M. Bucureşti, *Piso Pompiliu*, clasa IX-a Tîrnăveni, *Drăgan Şt. Marin*, student matematici Bucureşti, *Dumitrescu I. Aurel*, clasa X-a Curtea de Argeş, *Panaitopolu Laurenţiu*, clasa VIII-a Giurgiu, *Bigan V, Stan*, clasa X-a Giurgiu, *Bostan Emil*, absolvent Vuţcani-Iaşi, *Schileru I. Dinu*, clasa X-a ş.m.b. 1 Bucureşti, *Grigoraş Vasile*, clasa VII-a, Orbeni, Adjud, *Radu V. Constantin*, absolvent Tecuci, *Roşianu C. Dragomir*, student Bucureşti, *Cristea Rodica*, clasa VII-a, Bordeştii de sus, R. Sărat, *Bogheanu Dragoş*, clasa X-a, Suceava, *Preda Adrian*, clasa X-a, Curtea de Argeş, *Lambă Stelian*, student Bucureşti, *Bătineţu M. Dumitru*, absolvent Zimnicea, *Mitrofan I. Gheorghe*, absolvent Caransebeş, *Brebente Corneliu*, clasa X-a Tîrgovişte, *Motoc I. Ion*, Clasa X-a ş.m. 20 Bucureşti, *Lupuţiu Ioan*, absolvent Ploieşti, *Brînduş Lucian*, absolvent Oraşul Stalin, *Torsan Ilie*, absolvent Alba Iulia, *Tofan V. Vasile*, absolvent Bacău, *Nistreanu Valeriu*, clasa IX-a ş.m.b. 4 Bucureşti, *Mateescu V. Ion*, absolvent Rîmnicul Vîlcea, *Negoiţescu Stelian*, absolvent Timişoara, *Rus A. Ioan*, absolvent Oradea, *Rotaru N. Constantin*, absolvent Suceava, *Hogaş C. Constantin*, absolvent Iaşi, *Gervescu M. Ioan*, absolvent al clasei a VII-a Roznov, Piatra Neamţ.

* * *

Pînă la 1 *august* 1955 *s-au mai primit cel puţin cîte zece soluţii bune la problemele propuse n numerele* 3, 4, 5 şi 6 *ale Gazetei Matematice şi Fizice, seria B, dela rezolvitorii din localităţile care încep cu literele A—Z, după cum urmează*:

AIUD. Clasa IX-a. Bratu Ion (1592, 1613, 635 637, 638, 639, 640, 641, 643, 646, 647, 648).

ALBA IULIA. Clasa VIII-a. Mandel Robert (1560, 561, 579, 580, 584, 585, 587, 588, 591, 592, 597, 599, 604, 606), Nichimiş Eugenia (1569, 635, 640, 646, E: 624, 625, 627, 630, 635, 636, 638, 640, 641, 643, 644, 647, 648, 649, 652); clasa IX-a. Voicu Virgil (1566, 567, 569, 580, 616, 635, E: 638, 640, 641, 643), absolvent, *Torsan Ilie* (1572, 580, 641, 644, 650, 651, 653, 654, 655, 666, 669 ,670, 672, 677, 684—690, 693, 695, 597, 598, 706, 707, 715, 720, 724, 728, 730).

ADJUD. Şcoala de 7 ani, Orbeni clasa VII-a Grigoraş Vasile (E: 591—601, 603 605—608, 610—612, 614, 616, 618, 621—623, 624, 626, 627, 631, 633, 636, 638, 641, 643—646, 649—652).

BACAU. Clasa VIII-a. Tofan V. Dumitru (1560—566, 568, 570, 577, 579, 580, 585, 591, 602, 606, 607, E: 610—623, 636—628, 630, 631, 633, 634, 636, 637); clasa X-a. Zilbermann Mircea (1561, 562, 565, 567, 568, 569, 574, 575, 578, 580, 635, 638, 640, 642, 646, 647, 648, 650, 652, E: 625—627, 630, 631, 634, 638, 640, 641, 643, 644, 647, 648, 650), absolvent, *Tofan V. Vasile* (1560—1572, 574, 575, 577—580, 582, 585, 589, 590, 603, 635, 640—644, 646 647, 650—653).

BISTRIŢA (P. Neamţ). Clasa VI-a. Gaşparic Cătălin (E: 593, 594, 601, 608, 609, 614, 620, 623, 626, 627).

BOTOŞANI. Clasa V-a. Lucan Elena (E: 601, 608, 614, 620, 624, 625, 627, 630, 638, 640, 641, 647, 650); clasa VIII-a. Andricioaiei Gheorghe (1560, 562, 563, 565, 566, 568, 569, 574, 577, E: 595, 624—629, 631, 634, 636), Arion Adrian (1578, 610, 616, 634, 635, 640, 646, 654, 655, 656, E: 652, 655, 660, 661, 664, 665, 666, 667, 674); clasa X-a. Stefan Vasile (1513, 516, 524, 526, 527, 528, 532, 589, 590, 685, 689, 695, 697, 714, 715, 717, E: 592, 597, 606, 665, P).

BRAD. Clasa VII-a. Maşek Corneliu (E: 611, 612, 614, 615, 619, 621, 624, 625, 627, 630, 631, 635, 637, 638, 639—642, 644, 646, 651, P).

BUCUREŞTI. *Studenţi*: Asnaş Dan An I Fac. matematici (1561, 562, 565—570, 574, 578—580, 582, 623, 634—636, 638—641, 643, 644, 646—653), *Drăgan St. Marin* Fac. matematici (1583, 584, 585, 588—592, 594, 597—607, 610, 612,—620, 622, 623, 626, 627, 634, 636, 638, 639, 641—647, 649, 650, 653), Ghişibel Adrian (1560—564, 566, 570, 752, 575—579, 582, 588—592, 600, 621, 623, 635, 638, 640, 642, 643, 647, 652, 681, 685, 689, 695, 700, 701, P), *Lambă Stelian* (1562, 565—569, 574—578, 582, 610, 625, 627, 628, 634—637, 640, 643—654, 672, 673, 700, 701, 706, 724, P), *Lazăr Edith* An II. Fac. matematici (1513, 516,—518, 522, 524, 526, 528, 532, 533, 536, 560—569, 574, 575, 577, 579, 580, 582, 585, 589, 591, 594, 635, 636, 638, 640, 641, 643, 644, 647, 650, 651, 652, 653, 658, 668, 670, 674, 677, 681, 682, 683, 684, 685, 687, 688, 689, 681, 693, 695, 696, 697, 698, 699, 701, 706, 707, 717, 718, P), *Roşianu C. Dragomir* (1524, 526, 528, 531, 532, 536, 537, 542, 554, 560, 566, 567, 572, 574, 578, 585, 589, 600, 602, 604, 606, 618, 625, 634, 636, 638, 646, 668, 674, 677, 685, 587, 688, 689, 706, 707, P), *Şerb Gabriel Adrian*, Academia tehnică militară (1602—607, 610, 614—627, 629, 631, 632, 634,—653, 681, 697, P, Generalizarea problemelor 1454, 1615), Sevastie I. Gheorghe (1564—570, 574, 578, 582, 622, 623, 628, 635, 640, 643, 644, 646, 648, 649, 674, 682, 688, 694, 697, 721), Ţurlea I. Corneliu (1560, 561, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 575, 579, 580, 618, 622, 623, 628, 632, 635, 640, 642—647, 649—653, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 1, «N. Bălcescu». Clasa IX-a. Cristea Paul (1513, 515, 516, 517, 528, 536, 541, 545, E: 592, 593, 594, 595, 596, 597, 589, 601, 603 604, 606), Emanoil Alexandru (1562, 566, 568, 569, 571, 575, 577, 578, 579, 580, 614, 621, 628, 640, 642, 645, 646, 648, 650, E: 627, 631, 634, 636, 644, 646, 651, 652), Moraru Florentin (1565, 566, 567, 568,574, 577, 635, 640, 642, 645, E: 650), Rabinovici Silviu (1472, 475, 478, 480, 483, 513, 515, 516, 521, 525, 526, 527, 528, 529, 532, 539, 545, E: 591, 592, 593, 594, 595, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 607, 608, 609, P), Urmă Radu (1536, 561, 563, 566, 567, 568, 569, 578, 579, 585, 588, 589, 592, 604, 606, P, E: 592, 608, 615, 618, 637, 640, 643, 647); clasa X-a. Cincu I. Adrian (1561, 562, 564—570, 578, 580, 582, 592, 601, 602, P), *Schileru I. Dinu* (1513, 515, 531, 562, 563, 564, 565, 568, 574, 577, 578, 579, 580, 616, 628, 634, 635, 655, 657, 668, 672, 673, 674, 677, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 688, 689, 691, 694, 697, 698, 701, 706, E: 605, 634, 644, 646, 649, 652, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 2. Clasa X-a. Teodorescu Nicolae (1535, 541, 643, 549, 551, 561, 562, 563, 565, 568, 569, 570, 577, 578, 582, 585, 594, 595, 601, 602, 603, 604, 605, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 4 «*Aurel Vlaicu*», *Griviţa Roşie.* Clasa IX-a. *Nistreanu Valeriu* (1562, 565—569, 574, 578, 580, 582, 627, 635, 640, 642, 545, 673, 674, 681, 686, 688, 697, 726, 727, 728, 730, 733, 734, 740, 742, E: 634, 637, 638, 640, 641, 643, 644, 647, 648, 650).

Şcoala medie de băieţi nr. 6. Clasa VII-a. Nicolau A. Cristian (E: 614, 625, 634, 636, 638, 640, 643, 644, 645, 646, 647, 650).

Şcoala medie de băieţi nr. 7 «I. L. Caragiale». Clasa VII-a. Grofşoreanu Gelu (1635, E: 638, 639, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652, 658, 663, 614, 665, 668); clasa IX-a. Constantinescu Dan (1565, 566, 568, 569, 570, 607, 616, 650, 655, 656, 678, 681, 714, 717,P).

Şcoala medie de fete nr. 8. Clasa V-a. Mazilu Luminiţa (E: 620, 624, 625, 627, 628, 630, 638, 640, 643, 647, 648, 650); clasa VIII-a. Marinaş Marina 1578, 635, 640, E: 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652).

Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa X-a. Dobre Ion (1572, 581, 635, 636, 640, 641, 646, E: 624, 625, 626, 627, 629, 636).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa IX-a. Delcescu Rodica (1523, 540, 562, 565, 566, 567, 568, 569, 574, 580), Teodorescu Viorica (1561, 564, 566, 569, 580, 585, 635, 642, 646, 650, E: 640, 643, 647, 652).

Şcoala medie de fete nr. 16. Clasa V-a. Frîncu Mihaela 624, 627, 638, 640, 641, 643, 647, 665).

Şcoala medie de băieţi nr. 17. Clasa VIII-a. Oprică I. Mihai (E: 610, 612, 613 — 617, 620, 621, 623, 625—634, 638—640, 643, 645, 647, 648, 650, 651), Paşa Florin (E: 611, 612, 614, 620, 624, 634, 636, 638, 640, 643, 644, 646), Coconea Mihai (1566 569, 571, 578, 635, E: 592, 611, 612, 614, 620); clasa IX-a. *Duduica Radu* (1535, 1614—616, 619, 627, 628, 634—638, 640, 642—645, 647, 649, 650, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 662, 666, 668, 670, 672—675, 681, 683, 684, 686- 688, 689, 690, 693, 697, 698, 699, 700, 701, 705, 706, 707, 721, 724), Păunescu I. Lucian (1568, 578, 580, 621, 628, 638, 644, 646, 649, 651), Popa Adrian (1616, 628, 634, 635, 640—644, 646, 648, 650—653, 655, 657, 666, 672, 681, 688, 697, 701, 706, P); clasa X-a. Ghisibel Adrian (1515, 516, 520, 521, 526, 532, 541, 542, 565, 567, 569, 580, 644).

Şcoala medie de băieţi nr. 18. clasa X-a. Popovici I. Radu (1516, 564, 621, 634, 645, 646, 648, 651, 666, 669, 674, 676, 677, 686, 687, 688, 689, 696, 699, 706, 707, 715, 724, E: 591, 605, 610 , 629, 631, 633, 639, 646, P).

Şcoala medie de fete nr. 19. Absolvent Ivănceanu Ileana (1575, 577, 582, 635, 640, 642, 681, 683, 685, 688, 689, 695, 697).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. Clasa VII-a. Bogdan Alecu (E: 592, 593, 594, 601, 607, 603, 697, 610, 612, 614, 620, 621), Armaşu A. Petre (1565, 566, 568, 569, 570, 578, 592, 621, 635, 640, E: 615), Iordănescu R. Sorin (1565, 588, 591, 678, 697, E: 610, 616, 652, 653, 655, 659, 663, 664, 665, 668), Zorapapel Tiberiu (1518, 536, 558, 578, 585, 588, 591, 592, 635, 642, P); clasa X-a. *Motoc I. Ion* (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 585, 588, 589, 590, 591, 592, 594, 600, 602, 603).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa VIII-a. Gheorghiţă Mariana (1640, 642, E: 638, 639, 640, 643, 647, 650,) Ivănceanu Tatiana (1569, 580, 595, 602, 607, 621, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 651, 652).

Şcoala medie de băieţi nr. 23, Clasa VIII-a. Cociu B. Mircea (1513, 1525, 534, 635, 646, 681, E: 592, 622, 624, 634, 637, 638, 640, 643, 747, P).

Şcoala de 7 ani nr. 119. Clasa V-a. Mira E. Nicolae (E: 604, 608, 614, 620, 638, 640, 641, 643, 647, 650).

Şcoala de 7 ani nr. 185, *Chitila.* Clasa VII-a. Chisaru V. Ion (1524, E: 580, 582, 587, 592, 596, 597, 598, 600, 602, 607, 611).

BUZAU. Clasa VIII-a. Suciu A. Tita (1570, 585, 588, 591, 602, 640, E: 591, 602, 603 610, 611, 612, 615, 620, 636, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650); clasa IX-a. Dincă A. Antoaneta (1540, E: 597, 602, 608, 610, 615, 619, 621, 640, 647).

CALARAŞI. Clasa VIII-a. Strătescu Ion (1640, 646, 681, E: 638, 640, 643, 644, 646, 648, 649, 652, 663, 664).

CIMPINA (Ploieşti). Clasa X-a. Colonati Cristian (1516, 518, 520, 521, 522, 526, 527, 528, 530, 532, 540, 541, 545, 546). Absolvenţi: Colţea Valeriu (1571, 1572, 580, 589, 590, 591, 592, 599, 604, 618, 621, 622, 623, 638, 640, 642, 649, 650, E: 615), Ionescu Florin (1521, 526, 528, 532, 533, 561, 564, 566, 567, 569, 574, 589, 590, 618, 622 623, 635, 636, 640, 641, 643, 644, 647, 653).

CIMPULUNG — Muscel. Clasa X-a. Ivaşcu Gh. Ion (1565, 567, 568, 578, 580, 582, 635, 679, 701, 706, P), absolvent Opriş A. Ioan (1566, 569, 570, 579, 580, 582, 592, 594, 611, 622, 635, 640, 641—643, 646, 649, 650, 652, 653).

CARACAL. Şcoala de 7 ani Redea. Clasa VII-a. Mihăilescu I. Viorel (E: 592, 594, 601, 602, 607, 608, 638, 640, 643, 647, P); Şcoala medie de băieţi nr. 1, clasa IX-a. Niculescu D. Stelian (1566, 568, 569, 592, E: 598, 601, 612, 634, 636, 638, 639, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652, P).

CARANSEBEŞ. Absolvent . *Mitrofan I. Gheorghe* (1610, 615, 616, 618, 619, 621, 622, 623, 625, 627, 628, 629, 631, 632, 634—653, P).

CLUJ. Facultatea muncitorească. Brînduşescu Ştefan (1560, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 577), Păun Constantin (1640, 641, 642, 644, 646, 650—653, 672, 681, 685, 688, 689, 690, 693, 696, 697, 706), Pop Grigore (1580, 622, 623, 635, 636, E: 627, 643, 644, 646, 650, P), Pop Ludovic (1516, 517, 520, 529, 533, 534, 562, 567, 568, 589).

CONSTANŢA. Clasa IX-a. Manolescu Ilie (1516, 520, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 531, 532, 540, E: 606), absolvent Popescu Mircea (1561, 564, 565, 566, 568, 569, 570, 574, 578, 582, 642, 651).

CORABIA. Clasa X-a. Delu Stefan (1561, 564, 565—570, 572, 574, 575, 578, 580, 582, 614, 635, 636, 641, 643, 644, 646, 647, 652, E: 634, 638, 640, 643, 647), Şarpe I. Dumitru (1563, 570, 588, 589, 592, 598, 607, 635, 638, 643, 647, 650, E: 617, 619, 621, 638, 639, 640, 641, 643, 647), absolvent Dăbuleanu C. Iulian (1565, 567, 568, 579, 602, 647, E: 614, 625, 638, 640, 643, 647).

CRAIOVA. *Şcoala medie de băieţi nr.* 1 « *N. Bălcescu*». Clasa X-a. Hulubei Valeriu (1628, 635, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 647, 648, 649, 650, 652, 653, P), Voinea I. Alexandru (1592, 594, 614, 616, 621, 628, 626, 645, 647, 648, 649, 651, 652, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 2 « *Buzeşti*». Clasa IX-a. Voinea C. Dorin (1585, 586, 587, 588, 590, 591, 592, 594, 599, 602, 603, 604, E: 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622); clasa X-a. Clim Lorin (1513, 517, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533, 534, 536, 550,), absolvent Ştefan Ştefan (1561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 572, 574, 582, 635, 636, 637, 640, 643, 647, 652, E: 634).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa X-a. *Dumitrescu I. Aurel* (1560—564, 567, 571—576, 578, 581, 582, 608, 611, 616, 618, 620—622, 624, 625, 628, 629, 632, 633, 635—637, 639,—642, 644—646, 648—650, 652, 653, 655, 658, 674, 685—688, 696, 697, P), *Ene Aurel* (1560, 561, 562—582, 608, 609, 611, 614, 615, 616, 618, 621—623, 625, 628, 629, 631—644, 646—653, P), *Preda Adrian* (1512, 514, 534, 536, 538, 540, 542, 544, 546—549, 562, 563, 565—568, 574, 575, 579, 582, 583, 585, 588—591, 594, 596, 601—603, 605, 606, P).

DEJ. Absolvent Ocna-Dej. Falub Leontina (1618, 622, 623, 635, 636, 638, 640, 641, 644, 646, 647, 649, 650).

DOROHOI. Absolvent Nicolae Mircea (1561, 562, 565, 566, 568, 569, 582, 587, 618, 622, 640, 642, 644, 649, 653, E: 640, 647, 649, P).

FOCŞANI. Clasa VII-a Răstoaca. Negoiţă Tudorache (E: 612, 621, 623, 624, 625, 626, 627, 630, 638, 640, 643, 647, 650); clasa VIII-a. Buşe M. Constantin (1575, 591, 632, 635, 640, 642, 546, 648, 649, 650, 651, 652, 653, E: 614, 615, 616, 620, 621, 632, 636, 640, 643, 647, 648, 650, 655, 663, P), Cojocaru Mihai (1562, 565, 568, 570, 577, 580, 621, 632, 635, 638, 640, 646, 648, E: 616, 617, 625, 626, 628, 629, 634, 636, 638, 640, 642, 643, 644, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, P); clasa IX-a. Atanasiu C. (1516, 520, 525, 527, 532, 540, 567, 602, 635, 640, 643, 644, E: 603, 615, 619, 620, 625, 638, 640, 643, 646, 647, 650), Ţigănuş Mircea (1561, 562, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 577, 578, 579, 622, 625, 635, 636, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 652, E: 624, 625, 626, 628, 634, 636, 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 648, 649, 650, 652); clasa X-a. Rotaru Ion (1580, 587, 601, 603, 635, 640, E: 621, 624, 625, 626, 627, 630, 638, 640, 643, 647, 650), Ţîru Emil (1597, 641, 651, 653, 670, 674, 677, 681, 685, 688, 689, 690, 693, 695, 697, 701, 706, 707, 714, 715, 717, 720, 724, E: 615, 618, 655, 667, 668, P).

GALAŢI. Clasa VII. Pintilie Constanţa (E: 552, 615, 625, 638, 640, 643, 644, 647, 649, 650). Clasa IX-a. Gherasim Lucian (1566, 567, 569, 580, 585, 635, 640, 643, 646,

648, E: 615, 618, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650); clasa X-a. Buşilă Gheorghe (1568, 571, 576, 577, 578, 579, 581, E: 647, 649, 650), absolvent Ciurdea Eugen (1618, 622, 623, 634, 635, 636, 640, 641, 642, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 651, 652, 653), Costin Vasile (1561, 564, 566, 567, 569, 574, 582, 590, 589, 618, 622, 623, 640, 643, 645, 647, 653, E: 615).

GIURGIU. Şcoala de 7 ani Gogoşari. Clasa VI-a. Nedea Leonida (E: 592, 601, 604, 608, 619, 620, 624, 625, 628, 638, 640, 643, 647); clasa VIII-a. *Panaitopolu Laurenţiu* (1513, 517, 518, 526, 531, 532, 546, 558, 571, 574, 577, 579, 580, 586, 589, 590, 604, 607, 621, 622, 623, 634, 635, 638, 640, 641, 642, 643, 646, 647, E: 591, 604, 611, 625, 626, 627, 630, 635, 636, 638, 639, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650); clasa IX-a. Stănescu Şt. Nelu (1520, 524, 529, 545, 546, 563, 565, 577, E: 593, 600, 602, 644, 649, 652), *Bigan V. Stan* (1529, 535, 538, 544, 550, 556, 584, 599, 600, 601, 605, 610, 616, 618, 620, 621, 622, 623, 625, 626, 627, 628, 629 ,634, 635, 636, 637, 638, 669, 640, 641, 642, 643, 641, 645, 646, 647, 648, 649, 651, 652, 653), Botoran I. Petre (1542, 548, 553, 554, 558, 562, 565. 577, 585, 590, 592 594, E: 601, 602, 603, 606, 607, 614, 632, 633, 634, 646, 648, 651, 653), GHEORGHENI. Clasa IX-a. Mîndru Traian (1565, 566, 568, 569, 570, 578, 580, 582, 632, 635, 636, 640, 641, 643, 646, 647, 649, 650, 652, E: 625, 634, 636, 637, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 650, 652).

HÎRLAU (Iaşi). Clasa VIII-a. Ţibuleac Florin (1520, 521, 523, 524, 526, 527, 529, 532, 533, 536, 553, 554).

IAŞI. Absolvent,*Hogaş C. Constantin* (1618, 621, 623, 628, 635, 636, 640—653, 655, 657, 672, 673, 674, 681 683—685, 689, 695, 696, 697, 699, 706, 707, 721, P). Şcoala pedagogică, anul IV. Grăjdeanu Petre (1496, E: 614, 624, 625, 626, 630, 638, 640, 643, 646).

MOINEŞTI (Bacău). Clasa IX-a. Perlman Maier (1591, 592, 602, 603, E: 610, 612, 614, 615, 616, 618, 619, 621).

ORADEA, Clasa VIII-a. Buciuman Cornel (1516, 520, 521, 522, 525, 526, 528, 529, 532, 536, 540, 545); clasa X-a. *Guiaşu I. Silviu* (1523, 552, 560, 561—569, 572, 574—580, 582, 585, 588, 594, 598—601, 603, 604, 606, 607, 635, 640—653, P). Absolvenţi: Porţeanu Mircea (1562, 564—566, 568—570, 572, 575—577, 579, 588, 618, 621, 622, 628, 635, 640, 641, 644, 645, 647, 649—653, 697, 707), *Rus A. Ioan* (1582, 587, 602, 612, 615, 616, 618, 619, 621, 622, 623, 632, 636—639, 643—656, P, N).

ORAŞTIE. Absolvent Baba Romulus (1572, 574, 579, 580, 582, 643, 646, 650, 653).

ORAŞUL STALIN. Clasa VI-a. Climescu Mihai (E: 607, 612, 614, 625, 638, 640, 643, 644, 646, 650, 647); clasa VIII-a. Dragomir Adrian (1560, 561, 562, 563, 565, 564, 568, 569, 571, 577, 585, 588, 591, 592, 601, 603, 604, 606, E: 610, 615, 616, 617, 618, 626, 628, 631, 636, 637); clasa X-a. *Brînduş Lucian* (1513, 515, 523, 532, 555, 560, 561, 562, 563, 565, 566, 568, 569, 571, 573, 582, 603, 606, 607, 613, 621, 635, 636, 638, 640, 641, 644, 645, 646, 651, E: 610, 612, 614, 619, 620, 621, 625, 634, 637, 638, 640, 641, 643, 647, 650), Păun Panait (1668, 670, 677, 681, 685, 687, 688, 689, 693, 694, 695, 697, 698).

PIATRA NEAMŢ. Şcoala din Roznov. Absolvent *Gervescu M. Ioan* (1621, E: 624—632, 634—647, 649—657, 668, P), absolvent din Bicaz-Chei, Pop R. Gabriel (1561—563, 565—569, 574, 589, 590, 622, 623, 636, 640, 641, E: 610—612, 615, 618, 620—622, 634, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 653).

PIETROŞANI (Zimnicea). Absolvent *Bătineţu M. Dumitru* (1517, 518, 522, 526, 532, 542, 554, 558, 561, 562, 563, 654, 566, 567, 569, 570, 572, 574, 578, 579, 580, 584, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 594, 600, 604, 606, 607, E: 624, 625, 628, 638, 640, 641, 643, 647, 649, 650, P, N).

PITEŞTI. Absolvent Bogaciu Valeriu (1536, 537, 538, 540, 541, 542, 543, 545, 547, 548, 555, 558), absolvent Gulie I. Nicolae (1585, 591, 618, 621, 622, 623, 628, 631, 635, 636, 639, 640, 641, 643—650, 652, 653), absolvent Pungoci Mihai (1618, 622, 623, 635, 640, 642, 644, 647, 649, 652, 653).

PLOIEŞTI. *Şcoala medie «I. L. Caragiale»*, clasa VII-a Tudor Florin Corneliu (E: 594, 607, 611, 620, 625, 629, 638, 640, 643, 647, 650); clasa VIII-a. Căsăndroiu Tudor (1565, 566, 568, 569, 571, 578, 588, 640, 642, E: 613, 615, 620, 625, 634, 636, 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652), Dincă S. Nicolae (1560, 561, 563, 565, 567, 574, 582, 594, 603, 632, 635, 640, 645, 648, 650, 651, 652, 653, P; E: 614, 616, 636, 638, 639, 640, 643, 644, 645, 646, 647, 649, 650, 652); Gheorghe A. Ioan (1560, 563, 566, 568, 569, 585, 592, E: 614, 615, 618, 625, 636); clasa IX-a. Mătuşa Mioara (1526, 528, 532, 565, 567, 568, 574, E: 592, 611, 614), Mezincescu Ana (1493, 1520, 1525, 528, 532, 567, 568, 570, 640, 643, E: 637, 640, 643, 647); clasa X-a. Manciu Rodica (1558, 565, 566, 567, 569, 570, 574, 577, 578, 580, 640, 641, 642), absolvent: *Lupuţiu Ioan* (1560, 561, 563—570, 572, 574—582, 620, 625, 628, 635—638, 640, 641, 643—653), absolvent: Nuţu Cornel (1657, 668, 669, 674, 677, 685, 687, 688, 689, 693, 695, 697, 706, 714), absolvent: *Stroe Radu* (1523, 531, 534, 538, 541, 553, 581, 584, 590, 592, 608, 611, 616, 618, 633, 634, 637, 642, 633, 634, 637,

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

642, 647, 648, 654, 655, 656, 657, 658, 670, 672, 674, 681, 685, 688, 689, 690, 695, 697, 698, 701, 705, 706, 711, 715, P, N), absolvent : Teodorescu Ştefan (P, 1560—565, 567—582, 584, 585, 587, 592—597—605), absolvent: Turiga M. Constantin (1561, 563, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 578, 580, 582, 618, 635, 636, 640, 642, 643, 644, 646, 648, 649, 651, 652, 653).

SIGHET (Baia Mare). Clasa VI-a. Tomoioagă Doru (1572, E: 592, 593, 597, 600—604, 607, 608, 614, 615, 620, 623, 625, 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 650, 652, P).

SLOBOZIA. Clasa X-a. Păun A. Ioan (1560, 561, 563, 564, 566, 569, 571, 579, 580, 634, 635, 640, 641, 643, 646).

RÎMNICUL SARAT. Ciobănaş Filaret (1516, 525, 527, 529, 558, E: 592, 596, 597, (99, 600, 601, 602, 603, 605, 606, 607, 608), Clasa VII-a. Bordeştii de sus. *Cristea Rodica* (1565, 588, 591, 635, E: 595, 610, 612, 615, 616, 618, 621, 622, 625, 627, 630, 634, 636, 637, 638, 639, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652).

RÎMNICUL VÎLCII. Jitescu Gh. (1561, 564, 566, 567, 568, 569, 574, 575, 618, 622, 623, 644, 649, 651, 652, absolvent: *Mateescu V. Ion* (1585, 587, 588, 589, 594, 600, 602, 604, 622, 623, 628, 635, 636, 637, 638, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653).

REŞIŢA. Munteanu Aurel (E: 567, 580, 606, 611, 633, 636, 640, 644, 646, 649), Marchiş Felix (1513, 515, 521, 548, 565, 566, 567, 585, 588, 591, 599, 640, E: 611, 613, 614, 615, 618, 6124, 625, 626, 628, 629, 631, 634, 636, 637, 638, 640, 644, 647, 649).

ROMAN. Clasa IX-a. Tamba Gheorghe (1472, 475, 481, 486, 525, 526, 567; E: 592, 597, 600, 602, 607, 615). Zalomir Eugenia (1513, 516, 521, 525, 565, 568, 570, 580; E: 593, 594, 603, 608,) absolvent Ursoiu V. (1516, 521, 524, 525, 526, 527, 528, 530, 531, 532, 533, 534).

SATU MARE. Anul II şcoala tehnică. Haiduc Ioan (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 568; E: 640).

SIBIU. Clasa IX-a. Enulescu Melania (1571, 579, 580, 535, 540, 648, E: 624, 631, 636, 637, 638, 647, 649, 652); clasa X-a. Schlessinger Toma (1561, 564, 565, 566, 574, 580, 582, 604, 640, 653).

SINAIA. Student f.f. Ionescu N. Mircea (1560, 561, 562, 563, 564, 565, 567, 568, 570, 577, 578, 579).

SLATINA. Clasa IX-a. Bărbulescu Marcel (1518, 520, 521, 522, 525, 526, 528, 529, 532, 565, 568, 599, 602, E: 592, 597, 599, 615, 618, P).

SUCEAVA. Clasa X-a. Bogheanu Dragoş (1560—570, 572, 574, 575, 578, 580, 581, 582, 618, 621, 622, 623, 632, 635, 640, 641, 643, 644, 647, 649, 650, 651, 652, 653, P), absolvent *Rotaru N. Constantin* (1573, 613, 616, 618, 622, 623, 628, 632, 633, 635, 636, 638, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652; E: 611, 625, 635, 638, 640, 641, 642, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652, P).

TÎRGU -JIU. Clasa VIII-a. Aniţescu N. Nicolae (1515, 522, 524, 526, 528, 529, 532, 536, 545,; E: 592, 594, 595, 597, 599, 600, 601, 602, 603, 607, 608, 609); clasa X-a. Amzulescu Liana (1654, 672, 674, 688, 692, 696, 697, 698, 706, 724).

TÎRGU MUREŞ. Clasa VIII-a. Tudor S. Tiberiu (1560, 563, 568, 580, 621, 635, 640, 642, E: 613, 616, 617, 625, 626, 627, 630, 638, 639, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650, 652), Marian Gh. Mircea (1513, 531, 542, 543, 558, 560, 561, 563, 5654, 566, 568, 569, 577, 578, 579, 580, 585, E: 624, 625, 627); clasa IX-a. Pasca Magdalena (1566, 569, 578, 579, 640, E: 624, 640, 643, 644, 646, 647, 649); clasa X-a. Manole Nicolae (1513, 522, 524, 526, 528, 529, 532, 534, E: 597, 601, 606, 608), Matei A. Ioan (1516, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 532, 536, E: 592, 597, 600, 605, 608).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa IX-a. Focşăneanu I. Ioan (1584, 585, 588, 589, 590, 591, 592 594, 597, 601, 602, 603, 604, 607).

TÎRNĂVENI. Clasa IX-a. *Piso Pompiliu* (1522, 524, 526, 528, 529, 532, 535, 536, 558, 561, 562, 564, 566, 567, 568, 569, 570, 574, 577, 578, 585, 588, 591, 592, 594, 601, 602, 603, 621, 627, 628, 629, 634, 635, 640, 641, 644, 645, 646, 648, 650).

TÎRGOVIŞTE. Şcoala medie de băieţi nr. 3, clasa X-a. *Brebenie P. Corneliu* (1513, 515, 516, 517, 518, 520, 522, 524, 526, 528, 529, 532, 533, 534, 536, 542, 546, 552, 554, 558, 568, 569, 570, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 582, 589, 591), Cârbunaru M. Constantin (1449, 458, 474, 475, 520, 522, 525, 527, 527, 534, 566, 567, 569, 574, 578, 587, 603, 640, 643, 646, E: 548, 601, 615, 638); *şcoala medie tehnică de petrol*, absolvent Enăchescu T. Stoenel (1408—413, 415, 416, 423, 427, 429, 434, 436, 440, 442, 443, 449, 458, 464, 469, 472, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 483, 485, 486, 489, 493, 494, 495, 508, P); anul IV foraj. Iorgoiu Nina (E: 563, 568, 569, 571, 574, 575, 580, 587, 588).

TECUCI. Herşcovici Avram (1560, 562, 563, 565, 567, 568, 574, 575, 576, 581, 582, 592, E: 626), Munteanu A. Constantin (1513, 515, 516, 517, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 531, 532, 534,), Niţă Fănică (1566, 567, 569, 574, 593, 640, E: 615, 616, 626, 640), Purcaru I. George (1512, 513, 515, 520, 521, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531,

532, 533, 534, 550, 555), absolvent *Radu V. Constantin* (1544, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 572, 574, 575, 577, 578, 579, 580, 582, 615, 618, 622, 623, 625 628, 634, 635, 637, 639, 640, 642, 643, 644, 645, 647, 648, 649, 650, 651, 653).

TIMIŞOARA. Şcoala medie de băieţi nr. 1, absolvent *Negoiţescu Stelian* (1560, 561, 563, 564—567, 569, 572, 574, 575, 580, 582, 589, 590 , 603, 618, 621, 622, 623, 632, 635, 636, 640, 642, 643, 644, 646, 647, 649, 651, 652, 653); şcoala de 7 ani, clasa VI-a. Coşereanu Sanda (E: 614, 620, 624, 625, 638, 640, 641, 643, 647, 650, 653, 655); clasa VII-a Coşereanu P. Radu (E: 610, 612, 615, 616, 617, 638, 640, 643, 647, 646, 650); şcoala medie de fete nr. 3, clasa VII-a. Nerodea Rodica (E: 614, 618, 620, 638, 640, 644, 646, 647, 650, 656, 665, 668); şcoala medie de fete nr. 7, clasa VIII-a. Junger Agata (1602, 604, E: 637, 638, 639, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 649, 650); şcoala pedagogică mixtă, anul II, Chelu Ştefan (1635, 640, E: 594, 638, 639, 640, 643, 647, 649, 650); anul III. Jedu Ioan (1635, 640, 658, E: 627, 628, 637, 638, 640, 643, 644, 647, 649), Ştefan Iosefa (1566, 569, E: 562, 611, 638, 640, 641, 643, 644, 646, 647, 650).

TITU. Ghinea P. Ion (1568, 622, E: 626, 638, 640, 641, 643, 646, 647, 650).

TOPLIŢA. Absolvent Coşa Aurel (1560, 563, 564, 565, 566, 567, 569, 572, 535, 536, 640, 641, 644, 651, E: 610, 611, 616, 618, 624, 525, 626, 627, 628, 630, 637).

TURDA Şcoala medie nr. 2, clasa X-a. Radu Gabriela (1635, 640, 641, 647, 640. E: 638, 640, 643, 647).

TULCEA. Absolvent. Slavov Leonid (1562, 565, 566, 568, 569, 574, 575, 576, 578, 580, 581, 582, 589, 590, 592, 594, 601, 603, 606).

TURNU MAGURELE. Clasa VII-a. Sălcianu Tudor (1621, 640, E: 638, 640, 643, 644, 646, 647, 649, 650, P); clasa VIII-a. Bucată Ioana (1555, 588, 592, 621, E: 593, 603, 614, 625, 638, 637, 650), Cojocaru Napoleon (1565, 568, 570, 578, 585, 588, 591, 602, 621, 635, 640, E: 638, 640, 647), absolvent Dragomirescu Elena (1565, 567, 568, 570, 574, E: 634, 636, 640, 647).

TURNU SEVERIN. Şcoala medie de băieţi nr. 2, clasa VII-a. Motoargă Dumitru (E: 638, 640, 643, 644, 645, 646, 647, 649, 650, 651, 652).

VUŢCANI (Huşi, Iaşi). Absolvent. *Bostan Emil* (1513—519, 521—534, 536, 539, 542—544. 555, 560—572, 574—576, 578—582, 585, 602, 603, 606, 625, 634, 635, 636, 638, 639—653).

ZALAU. Clasa VIII-a. Moroti Cornel (1592, 640, E: 605, 606, 611, 614, 616, 620, 636, 638, 643, 644, 646, 647, 649, 650); clasa X-a. Farcaş V. Beniamin (1562, 565, 577, 621, 646, 647, E: 630, 646, 649, 650, 652).

ZIMNICEA (Alexandria). Absolvent Pietreanu C. Petre (1560—570, 572, 574, 575, 577, 578, 582, 635, E: 626, 634).

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— La exerciţiile şi problemele propuse pentru şcoala de 7 ani se primesc rezolvări dela elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, dela elevii anului I ai şcolilor tehnice de maiştri, sau din anul I şi II ai şcolilor profesionale sau pedagogice de învăţători. Nu se iau în seamă soluţiile problemelor propuse pentru şcoala de 7 ani dacă sînt trimise de elevi ai claselor a IX-a, a X-a, ai şcolilor medii tehnice sau de studenţi şi nici soluţiile trimise după trecerea a trei luni dela publicarea problemelor respective sau dela publicarea eratei, dacă a fost cazul.

În cazul unor probleme propuse care sînt mai greu de rezolvat sau dela care nu s-au primit soluţii bune, termenul de primirea soluţiilor se poate prelungi. *Se mai primesc soluţii la problemele*: 1616, 1617, 1618, 1626, 1630, 1660, 1662, 1676, 1700, 1702, 1708, 1716, 1723, 1756, 1757, 1762, 1764, 1769, 1783, 1789, 1797, 1804, 1805, 1807, 1808, 1825, 1853, 1854, 1856, 1858, 1872, 1873 şi următoarele, iar dela elementar la E: 659, 677, 690, 699, 702, 705, 706, 714, 716, 720, 721 şi următoarele.

Rezolvitorii de probleme sînt rugaţi să nu trimită plicuri cu mai puţin de zece soluţii; iar trimiterea rezolvărilor şi propunerilor să se facă numai odată în cursul aceleiaşi luni, aşezînd problemele rezolvate *în ordinea lor numerică*, aşa cum vor fi anunţate la rubrica rezolvitorilor. Pe o parte a plicului să se scrie: localitatea, şcoala sau institutul şi numele rezolvitorului; iar pe cealaltă parte, adresa: redacţia Gazeta matematică şi fizică seria B, Strada Academiei, 14 — Bucureşti I.

Din problemele primite nu se anunţă cele incomplet rezolvate, cele care conţin greşeli, cele neglijent redactate, cele care au greşeli de calcul, desene neîngrijit făcute, sau sînt copiate după altele.

De asemenea nu se publică problemele propuse de către colaboratori dacă ele sînt cunoscute sau nu sînt însoţite de soluţia lor clar redactată.

* * *

Într-un număr viitor vom publica premierea evidenţiaţilor rezolvitori de probleme din G.M.F.B. şi lista cărţilor ce se vor distribui ca premii şi ca menţiuni.

c. 1695. — Intreprinderea Poligrafică nr. 4

Preţul 1 Leu exemplarul

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

BUCUREŞTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - ÇMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

Anul VII — Februarie 1956

2

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII. Nr. 2 — februarie 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *Sisteme de numeraţie de N. Ciorănescu* 57
2. *Polarizarea luminii şi aplicaţiile ei de N. Stănescu.* 64
3. *Premiile «Gazetei Matematice şi Fizice» seria B, pe 1955* 78
4. *Note matematice (3—6)* 79
5. *Chestiuni de examen (1992—2011)* 85
6. *Probleme rezolvate (1403, 1404, 1420, 1424, 1428, 1434, 1436, 1439, 1443, 1453, 1454, 1509, 1513, 1520, 1522, 1551, 1552, 1553, 1579, 1607. E: 553, E: 569).* 88
7. *Probleme propuse (2012—2034)* 99
8. *Probleme date la Cercul de fizică pe Capitală (2035—2039)* 102
9. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 761—E: 775)* 103
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme. Evidenţiaţii* 105

ANUL VII 2 FEBRUARIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolangiu A.**, asistentă univ., **Ionescu-Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.4653 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VII * Nr. 2 februarie 1956

SISTEME DE NUMERAŢIE

N. CIORĂNESCU

Prof. univ., Institutul Politehnic Bucureşti

1. CÎND scriem un număr oarecare, de exemplu, 78436 se subînţelege că sub această scriere concentrată se ascunde un întreg complex de operaţii aritmetice şi anume:

$$78436 = 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6$$

în care numărul 10 joacă un rol deosebit, fiind baza sistemului de scriere curentă a numerelor.

În mod analog scriem orice număr întreg:

$$N = C_n C_{n-1} C_{n-2} \ldots C_2 C_1 C_0, \tag{1}$$

scriere echivalentă cu complexul de operaţii

$$N = C_n \cdot 10^n + C_{n-1} \cdot 10^{n-1} + C_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + C_2 \cdot 10^2 + C_1 \cdot 10 + C_0, \tag{1'}$$

unde C_0, C_1, $C_2 \ldots C_n$ sînt cifrele lui, care după cum se ştie sînt cuprinse între 0 şi 9, $0 \leqslant C_n \leqslant 9$. Dar putem întrebuinţa această scriere prescurtată a numerelor, adică sub forma (1), luînd ca bază un număr întreg $b > 1$ absolut oarecare, cifrele cu care se vor scrie acum numerele în acest sistem vor fi:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, b - 1.$$

Dacă $b \leqslant 10$, este evident că ajung cifrele existente; dacă însă $b > 10$, vor trebui introduse simboluri noi pentru cifrele corespunzătoare numerelor $10, 11, \ldots, b - 1$. Astfel de exemplu, dacă $b = 5$ toate numerele se vor scrie cu cifrele: 0, 1, 2, 3 şi 4, iar în această bază numărul 110342 reprezintă de fapt, numărul:

$$5^5 + 5^4 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 2 = 3847$$

din sistemul zecimal.

Dacă $b = 12$, mai trebuie introduse două noi simboluri pentru numerele 10 şi 11, astfel că în sistemul duodecimal cifrele sînt:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha \text{ şi } \beta,$$

unde $\alpha = 10$ şi $\beta = 11$.

Deci, dacă C_k sînt cifre din sistemul de bază b, atunci o expresie de forma:

$$N = C_n b^n + C_{n-1} b^{n-1} + C_{n-2} b^{n-2} + \ldots + C_2 b^2 + C_1 b + C_0 \qquad (2)$$

este forma dezvoltată a unui număr care concentrat poate fi scris tot sub forma (1), dacă nu este vreo confuzie posibilă, dacă nu sub forma

$$N = (C_n C_{n-1} C_{n-2} \ldots C_2 C_1 C_0)_b , \qquad (2')$$

unde, după cum am spus:

$$0 \leqslant C_k \leqslant b - 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Putem deci, scrie numerele într-o bază oarecare b întocmai ca în baza 10 şi cu acelaşi inventar de cifre, dacă $b < 10$.

Rezultă din reprezentarea (2) cîteva consecinţe simple pe care însă e bine să le avem în vedere:

a) în orice bază b, numărul 10 reprezintă chiar baza b a sistemului, iar nicidecum numărul zece, care de exemplu în sistemul binar ($b = 2$) se scrie 1010 (în acest sistem cifrele sînt 0 şi 1), iar în sistemul ternar ($b = 3$) se va scrie 101, pe cînd în sistemul cu $b = 4$ tot zece, are expresia 22.

b) În orice bază b, numerele de forma $10 \ldots 00$ reprezintă puteri b^n ale bazei, după cum se vede uşor din (2) luînd $C_n = 1$ şi $C_k = 0$ pentru $k < n$.

c) Dacă la sfîrşitul numărului N scris în baza b, se adaugă un număr de p zerouri, acel număr se înmulţeşte cu b^p şi reciproc. În adevăr, dacă N avea expresia (2), după această operaţie el devine:

$$N' = C_n b^{n+p} + C_{n-1} b^{n+p-1} + \ldots C_2 b^{p+2} + C_1 b^{p+1} + C_0 b^p + 0 \cdot b^{p-1} +$$

$$+ 0 \cdot b^{p-2} + \ldots + 0 \cdot b + 0$$

şi se vede că

$$N' = b^p \cdot N.$$

2. Să demonstrăm acum, că orice număr întreg N poate fi scris în orice bază $b > 1$ şi aceasta într-un singur mod. Din demonstraţie rezultă şi procedeul ce permite găsirea cifrelor succesive ale expresiei (2′) sub care vrem să punem pe N.

Fie N dat, de exemplu, în sistemul zecimal, şi b baza în care vrem să-l scriem. Să împărţim pe N la b şi fie Q_1 cîtul şi C_0 restul. Avem:

$$N = b \cdot Q_1 + C_0 \qquad \text{cu} \qquad 0 \leqslant C_0 \leqslant b - 1. \qquad (3)$$

Procedăm cu Q_1 la fel ca şi cu N şi fie deci:

$$Q_1 = b \cdot Q_2 + C_1 \qquad \text{cu} \qquad 0 \leqslant C_1 \leqslant b - 1. \qquad (4)$$

Dacă venim cu expresia (4) a lui Q_1 în (3) obţinem:

$$N = b^2 Q_2 + C_1 b + C_0 . \qquad (3')$$

Procedînd cu Q_2 la fel şi ducînd expresia:

$$Q_2 = b Q_3 + C_2 \qquad 0 \leqslant C_2 \leqslant b - 1$$

în (3′) vom avea:

$$N = b^3 Q_3 + C_2 b^2 + C_1 b + C_0 \qquad (3'')$$

și așa mai departe, după un număr să zicem, n de operații vom ajunge la un cît $Q_n < b$, cînd împărțirea nu se mai poate continua. Punînd $Q_n = C_n$ ajungem astfel la descompunerea (2) a lui N. Din modul cum a fost efectuată această descompunere rezultă unicitatea ei, deoarece fiecare împărțire dă un singur rest și un singur cît, resturile fiind tocmai cifrele cu care se scrie N în baza b.

Fie de exemplu, de scris $N = 4897$ din sistemul zecimal în baza 6. Putem dispune operațiile după cum urmează:

6	6	6	6	
4897	816	136	22	$3 = C_4$
$C_0 = 1$	$C_1 = 0$	$C_2 = 4$	$C_3 = 4$	

Vom scrie împărțitorul 6 deasupra deîmpărțitului pentru ca operația să nu ocupe prea mult spațiu, iar cîturile Q_1, Q_2, etc... în căsuța imediat la dreapta, ele devenind deîmpărțit în operația următoare, resturile care sînt cifrele căutate, scriindu-se pe rîndul doi. Găsim astfel:

$$4897 = (34401)_6 .$$

3. Ca aplicație a posibilității reprezentării oricărui număr sub forma (2') putem rezolva problema lui Bachet de Méziriac (1624) care se enunță astfel: un negustor spărgînd o piatră ce cîntărea 40 pfunzi în patru părți a constatat că fiecare din cele patru bucăți cîntărea un număr exact de pfunzi și cu aceste 4 pietre el poate cîntări orice greutate exprimabilă în numere întregi de pfunzi, între 1 și 40. Se întreabă cît cîntărea fiecare din cele 4 bucăți.

Rezultă că dacă scriem numerele întregi de la 1 la 40 într-o bază b, în această reprezentare nu vom putea avea mai mult de patru cifre, deci pentru orice $1 \leqslant N \leqslant 40$ va trebui să avem:

$$N = C_3 b^3 + C_2 b^2 + C_1 b + C_0 .$$

In al doilea rînd, cum pietrele sînt inegale avem că orice $C_k = 0$ sau 1. Aceasta ar însemna că $b = 2$. Dar se vede că această soluție nu corespunde deoarece $2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 15$. Mai există posibilitatea însă la cîntărire să punem greutăți și în talerul în care se găsește obiectul de cîntărit; aceasta revine la a admite pentru C_2, C_1 sau C_0 și valoarea -1, sau cu alte cuvinte, dacă $b = 3$ am putea admite și valoarea 2 pentru C_k, deoarece avem:

$$2 \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m ,$$

valoarea negativă pentru C_k interpretînd-o ca o contragreutate pusă în talerul obiectului. Prin urmare, $b = 3$ și cele patru pietre cîntăreau respectiv: 1, 3, 9 și 27 pfunzi.

Dacă de exemplu, vrem să cîntărim 16 pfunzi observăm că:

$$16 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 3^2 + (3 - 1) \cdot 3 + 1 = 2 \cdot 3^2 - 3 + 1 =$$
$$= (3 - 1) 3^2 - 3 + 1 = (3^3 + 1) - (3^2 + 3)$$

și deci vom pune $3^3 + 1$ în talerul greutăților, iar în cel al obiectului vom mai pune $3^2 + 3$ contragreutăți.

4. Cele patru operații ale aritmeticii între două sau mai multe numere scrise în aceiași bază b se fac cu modificările ce rezultă din faptul că baza nu mai este zece, la fel ca în sistemul zecimal. Să le trecem repede în revistă.

a) *Adunarea şi scăderea.* Fie de adunat între ele două numere scrise în baza 8. Cifrele în acest sistem sînt cum ştim, $\leqslant 7$. Sumele de cifre ce dau un rezultat $\leqslant 7$ dau o cifră a sistemului, dar sumele de cifre $\geqslant 8$ dau numere din clasele următoare care trebuie reprezentate convenabil. Astfel avem:

$$7 + 7 = 14 = 1 \cdot 8 + 6 = (16)_8;$$

$$7 + 6 = (15)_8 \text{ etc. . .}$$

Această observaţie ne va permite să efectuăm uşor operaţia:

$$(730656)_8 + (456077)_8.$$

Vom scrie cele două numere unul sub altul

$$\begin{array}{r} 730656 + \\ 465077 \\ \hline 1415755 \end{array}$$

şi adunăm pe coloane începînd cu coloana din dreapta: $7 + 6 = (15)_8$, scriem 5 şi ţinem 1; apoi pe coloana a doua: $1 + 7 + 5 = (15)_8$, scriem 5 şi ţinem 1; $1 + 6 = 7$, scriem 7; $5 + 0 = 5$; $6 + 3 = 9 = (11)_8$, scriem 1 şi ţinem 1; $1 + 4 + 7 = (14)_8$ pe care-l scriem complet. Rezultatul va fi $(1415755)_8$.

Dacă am avea de efectuat scăderea:

$$(64013)_7 - (25645)_7$$

dispunem operaţia în mod obişnuit şi operăm astfel:

$$\begin{array}{r} 64013 - \\ 25645 \\ \hline 35035 \end{array}$$

5 din 3 nu se poate, ne împrumutăm la stînga o unitate de ordinul întîi, adică cu 7 şi continuăm: 5 din 10 fac 5, pe care-l scriem jos; pe coloana a doua: 4 din 0 nu se poate, ne împrumutăm iar, 4 din 7 fac 3; pe coloana a treia: 6 din 6 fac 0; pe coloana a patra: 5 din $3 + 7$ fac 5; iar pe ultima coloană, 2 din 5 fac 3. Proba se poate face prin adunare, ca mai sus.

b) *Înmulţirea.* Pentru a putea efectua înmulţirea dintre două numere oarecari într-o bază b, ar trebui alcătuit în prealabil o tabelă a lui Pitagora, adică o tabelă în care să figureze produsele dintre cifrele sistemului. Această tabelă a lui Pitagora pentru sistemul cu baza 9 e următoarea:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	11	13	15	17
3	3	6	10	13	16	20	23	26
4	4	8	13	17	22	26	31	35
5	5	11	16	22	27	33	38	44
6	6	13	20	26	33	40	46	53
7	7	15	23	31	38	46	54	62
8	8	17	26	35	44	53	62	71

Cu ajutorul ei se poate efectua înmulțirea dintre două numere oarecare în baza 9.

Fie de exemplu, de efectuat $(76)_9 \cdot (48)_9$.

Vom dispune operația ca și în cazul sistemului zecimal și vom scrie:

$$\begin{array}{r} 76\cdot \\ 48 \\ \hline 673 \\ 336 \\ \hline 4143 \end{array}$$

$8 \cdot 6 = (53)_9$ scriem 3 și ținem 5; apoi: $8 \cdot 7 + 5 = (62)_9 + 5 = (67)_9$ pe care-l scriem complet. Pe rîndul următor: $4 \cdot 6 = (26)_9$ scriem 6 și ținem 2; $4 \cdot 7 = (31)_9$ la care se adaugă 2, deci scriem $(33)_9$. Rezultatul este $(4143)_9$.

c) *Împărțirea.* Fie de împărțit numărul $32\beta\alpha\,97$ din baza 12, cu 9. Operația se dispune în mod obișnuit:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 3 & 2 & \beta & \alpha & 9 & 7 & & 9 \\ = & 2 & \beta & & & & & \hline 43\beta\alpha\,4 \\ & = & 8 & \alpha & & & & \\ & & = & 7 & 9 & & & \\ & & & = & 3 & 7 & & \\ & & & & = & 7 & & \end{array}$$

Împărțim pe 32 la 9 ținînd seama că: $(32)_{12} = 38$, deci cîtul este 4, iar restul 2. Scriem 4, prima cifră a cîtului, iar lîngă restul 2 coborîm pe β. Cum $(2\beta)_{12} = 35$ rezultă că 9 intră în 2β de 3 ori și dă restul 8. Scriem pe 3 ca a doua cifră a cîtului iar alături de 8 coborîm cifra următoare, etc. Cîtul va fi $43\beta\alpha 4$ și restul 7.

5. *Reguli de divizibilitate.* Putem extinde regula de divizibilitate cu 9 sau 11 din sistemul zecimal, la o bază oarecare. Corespunzător regulii de divizibilitate cu 9 avem regula următoare:

Un număr N scris în baza b, este divizibil cu $b - 1$ dacă suma cifrelor lui adunate ca simple unități ne dă un număr divizibil cu $b - 1$.

Fie N de forma:

$$N = C_n b^n + C_{n-1} b^{n-1} + C_{n-2} b^{n-2} + \ldots + C_2 b^2 + C_1 b + C_0 \qquad (2)$$

și

$$S_N = C_n + C_{n-1} + \ldots + C_2 + C_1 + C_0$$

suma cifrelor lui. Avem evident:

$$N - S_N = C_n (b^n - 1) + C_{n-1} (b^{n-1} - 1) + C_{n-2} (b^{n-2} - 1) +$$

$$+ \ldots + C_2 (b^2 - 1) + C_1 (b - 1).$$

Dar $b^p - 1$ este divizibil cu $b - 1$, oricare ar fi ntregul $p \geqslant 1$. Deci partea a doua se împarte cu $b - 1$, prin urmare putem scrie:

$$N - S_N = (b - 1) M,$$

M fiind un întreg. Din această relație conchidem că N și S_N divizați cu $b-1$ dau același rest, deci dacă S_N este divizibil cu $b-1$ și N va fi divizibil și reciproc. Regula se extinde la toți divizorii lui $b-1$.

Pentru a găsi regula de divizibilitate cu $b+1$ sau prin divizorii lui, să introducem expresia:

$$D_N = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 \ldots + (-1)^n C_n,$$

adică diferența dintre suma cifrelor de ordin impar (începînd de la stînga), luate ca simple unități, și cele de ordin par ale lui N. Avem că:

$$N - D_N = C_1(b+1) + C_2(b^2-1) + C_3(b^3+1) + C_4(b^4-1) + \ldots$$

Partea a doua se divide cu $b+1$, deci avem:

$$N - D_N = (b+1)P,$$

P fiind întreg, ceea ce ne arată că N și D_N divizați cu $b+1$ dau același rest. Dacă D_N este divizibil cu $b+1$, atunci și N este divizibil cu $b+1$. Aceasta este o generalizare a regulii de diviziune prin 11. Astfel de exemplu, în orice bază $b > 2$, numărul 121 este divizibil cu $b+1$, el fiind de altfel, egal, cum se constată ușor, cu $(b+1)^2$.

6. *Fracții într-o bază oarecare.* În cele de mai sus am considerat numai numerele întregi într-o bază oarecare b. Dar după cum avem fracții zecimale, putem avea tot așa numere fracționare într-o bază oarecare $b > 1$. Pentru a simplifica lucrurile vom considera cazul numerelor fracționare sub-unitare. Vom înțelege printr-o expresie de forma:

$$A = (0, k_1 k_2 k_3 \ldots k_n)_b \tag{5}$$

numărul următor:

$$A = \frac{k_1}{b} + \frac{k_2}{b^2} + \frac{k_3}{b^3} + \ldots + \frac{k_n}{b^n}, \tag{5'}$$

unde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sînt cifrele din baza b adică numere $\leqslant b-1$. Determinarea lor se poate face observînd că din:

$$bA = k_1 + \frac{k_2}{b} + \frac{k_3}{b^2} + \ldots + \frac{k_n}{b^{n-1}}$$

rezultă că prima cifră după virgulă este partea întreagă a lui bA; dacă punem apoi:

$$A_1 = \frac{k_2}{b} + \frac{k_3}{b^2} + \ldots + \frac{k_n}{b^{n-1}},$$

deducem în mod analog că avem:

$$k_2 = \text{partea întreagă a lui } (bA_1) \text{ etc.}$$

Dacă la un moment dat $b \cdot A_p$ este un întreg, atunci operația s-a terminat; dacă niciodată nu ajungem la un astfel de rezultat, numărul A se scrie în sîstemul fracționar de bază b, cu o infinitate de cifre.

Exemple: a) Fie de transformat $A = \frac{11}{16}$ în fracție în baza 6; avem:

$$6 \cdot \frac{11}{16} = \frac{66}{16} = 4 + \frac{1}{8} \text{ deci } k_1 = 4 \text{ și } A_1 = \frac{1}{8};$$

$$6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \qquad \text{deci } k_2 = 0 \text{ și } A_2 = \frac{3}{4};$$

$$6 \cdot \frac{3}{4} = 4 + \frac{1}{2} \qquad \text{deci } k_3 = 4 \text{ și } A_3 = \frac{1}{2};$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \qquad \text{și } k_4 = 3.$$

Prin urmare:

$$\frac{11}{16} = (0{,}4043)_6 = \frac{4}{6} + \frac{4}{6^3} + \frac{3}{6^4}.$$

b) Dacă am fi avut de transformat $A = \frac{5}{7}$ în fracție în baza 8, am fi obținut:

$$8 \cdot \frac{5}{7} = \frac{40}{7} = 5 + \frac{5}{7} \text{ deci } k_1 = 5;\ A_1 = \frac{5}{7} = A;$$

$$8 \cdot \frac{5}{7} = \frac{40}{7} = 5 + \frac{5}{7} \text{ deci } k_2 = 5;\ A_2 = A_1 = A \text{ etc.}$$

Prin urmare:

$$\frac{5}{7} = (0{,}555\ldots5\ldots)_8 = \frac{5}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{5}{8^3} + \cdots + \frac{5}{8^n} + \cdots,$$

cum se poate ușor verifica.

Am trecut în revistă o seamă de probleme de aritmetică elementară, socotind aceasta nu numai ca un bun mijloc de consolidare a cunoștințelor de bază, dar și ca o potrivită introducere în Algebră.

POLARIZAREA LUMINII ŞI APLICAŢIILE EI

Conf. univ. N. STĂNESCU

LUMINA este o undă de natură electromagnetică. Ea constă dintr-un cîmp electromagnetic, care se propagă în spaţiu de-a lungul unei direcţii astfel încît oscilaţiile celor două cîmpuri electric E şi magnetic H, se fac perpendicular pe direcţia de propagare. Cu alte cuvinte unda electromagnetică, deci unda de lumină, este transversală (fig. 1). S-a dovedit experimental că acţiunile luminii sînt produse de către cîmpul electric E, de aceea, în cele ce urmează, vom vorbi numai despre acesta.

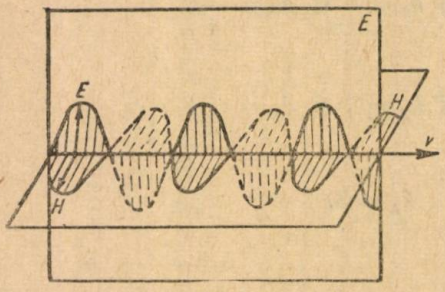


Fig. 1

Să presupunem că privim o undă de lumină în lungul direcţiei de propagare adică în direcţia razei. Considerăm raza perpendiculară pe planul hîrtiei reprezentată convenţional prin cerculeţul O (fig. 2). Se observă că acţiunea luminoasă a undei nu este repartizată simetric, ci se localizează într-un singur plan în jurul razei. Prin urmare lumina prezintă o disimetrie a proprietăţilor ei optice în jurul razei. Ne întrebăm dece nu observăm o variaţie a acţiunii luminoase, cînd o rază de lumină se roteşte în jurul ei însăşi, aşa cum este de aşteptat? (fig. 2 *a*, *b*, *c*, *d*).

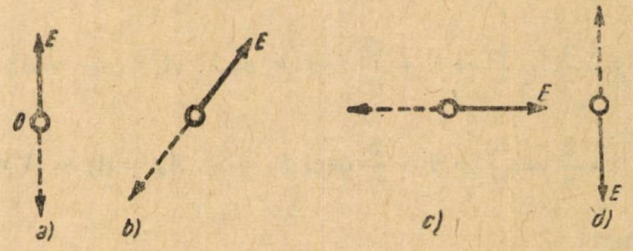


Fig. 2

Unda de lumină ia naştere într-un atom, în care se produce tranziţia unui electron de pe un nivel energetic superior (aşa numita orbită) pe altul inferior (vezi R.M.F. nr. 8/1951 şi G.M.F. seria B, nr. 4/1955.) Procesul de emisie are însă o durată extrem de scurtă. Din experienţele de interferenţă s-a dedus că acest proces durează aproximativ $10^{-9} - 10^{-8}$ s. Dacă se ţine seama de faptul că perioada undei de lumină este de ordinul 10^{-14} s, urmează că în cursul unei tranziţii a electronului se emite un şir de circa $\frac{10^{-8}}{10^{-14}} = 10^{6}$ oscilaţii, care îşi păstrează neştirbită orientarea vectorului electric E.

Dacă s-ar putea observa această undă singură s-ar constata efectul asimetriei, menţionat mai sus. După un scurt interval de timp atomul emite un al doilea şir de unde, care nu mai oscilează însă în acelaşi plan cu precedentul. Dar ochiul primeşte deodată nu numai şirurile succesive de unde cu oscilaţiile în plane diferite, dar şi undele emise de alte miliarde de atomi. De aceea ansam-

blul numit de noi undă de lumină nu poate avea oscilaţiile vectorului E în acelaşi plan, ci distribuite dezordonat (în toate direcţiile) în jurul razei (fig. 3). Această distribuţie este statistic simetrică şi acoperă asimetria fiecărui şir de unde în parte. Lumina naturală, adică aşa cum este emisă de un izvor luminos, nu prezintă fenomenul de asimetrie a proprietăţilor luminoase în jurul razei, deoarece vectorul electric are toate orientările posibile. Dacă prin anumite procedee optice am reuşi să selecţionăm din lumina naturală numai undele care au aceeaşi orientare a vectorului cîmp electric E, oprind pe celelalte, asemenea lumină ar prezenta o asimetrie a intensităţii luminoase în jurul razei. Lumina în care oscilaţiile de mărime ale vectorului cîmp electric, vectorul luminos, se fac într-un singur plan se numeşte *lumină polarizată liniar*. Un dispozitiv care polarizează lumina se numeşte *polarizor*. Vom descrie mai departe cum se obţine practic lumina polarizată şi ce proprietăţi optice are ea. Putem spune că *lumina naturală* este de asemenea o lumină polarizată liniar, la care însă direcţia de oscilaţie a vectorului E variază rapid şi haotic în jurul direcţiei de propagare.

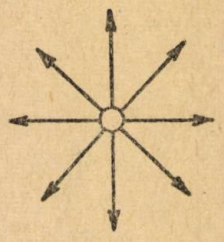


Fig. 3

Fenomenul de polarizare a luminii prezintă o deosebită importanţă pentru teoriile asupra naturii luminii. La începutul veacului trecut fenomenele de difracţie şi de interferenţă a luminii au dovedit că lumina este o undă. Polarizarea luminii a fost singurul criteriu al transversalităţii undelor de lumină, întrucît undele longitudinale nu pot prezenta acest fenomen. Astăzi fenomenul este utilizat pe scară întinsă în tehnica cercetării materialelor de construcţii a maşinilor, cum vom vedea mai departe.

Cum se polarizează lumina?

Încă din 1690 C. Huygens a descoperit că cele două raze bifurcate din raza care trece printr-un cristal din spat de Islanda nu mai au proprietăţi optice identice. El nu a reuşit să explice fenomenul. Mult mai tîrziu Malus a descoperit (1808) că şi lumina reflectată capătă proprietăţi pe care nu le avea înainte de reflexie. Privind printr-un cristal de turmalină lumina reflectată de un geam, Malus a observat că intensitatea luminii variază în mod periodic, cînd cristalul este rotit în jurul razei. Privind în aceleaşi condiţii direct la izvorul de lumină, fără ca razele să mai fie reflectate, intensitatea luminii nu mai varia la rotirea cristalului în jurul razei. Malus a numit *polarizare* fenomenul suferit de lumină prin reflexie.

Prin urmare, cel mai simplu mijloc de polarizare a luminii este *reflexia*. Polarizorul prin reflexie este o placă de sticlă neagră sau avînd spatele înnegrit. O placă de sticlă reflectă lumina pe ambele feţe, ceea ce încurcă experienţa. Sticla neagră nu este transparentă, deci reflectă numai cu faţa anterioară. Sticla vopsită în negru reflectă de asemenea numai cu faţa anterioară, deoarece lumina ajunsă pe faţa posterioară este absorbită de stratul înnegrit.

Să considerăm o oglindă polarizor P (fig. 4) pe care lăsăm să cadă cu incidenţa i un fascicul paralel de lumină de la o sursă S. Această lumină este naturală, ceea ce reprezentăm prin semnul ⤫. Prin reflexia pe faţa polarizorului P lumina se polarizează liniar, adică în fasciculul reflectat se vor găsi numai unde în care oscilaţiile vectorului luminos E se vor produce într-un singur plan şi anume, perpendicular pe planul de incidenţă al polarizorului. Punctele de pe raza reflectată

reprezintă schematic acest lucru. Cum constatăm că raza reflectată de P este polarizată liniar? În acest scop utilizăm o a doua oglindă, identică cu prima. Deoarece aceasta din urmă serveşte pentru analiza razei reflectate, ea se numeşte *analizor*. Rotind analizorul A (fig. 4 *a*) în jurul razei reflectate (astfel încît unghiul dintre rază şi faţa analizorului să rămînă constant), observăm asimetria acţiunii luminoase a razei, despre care am vorbit mai înainte.

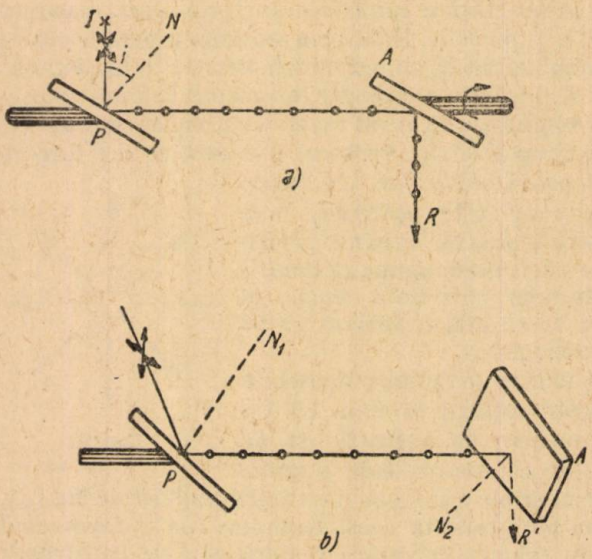


Fig. 4

Iată cum se manifestă această asimetrie. Raza R reflectată de A produce o pată de lumină pe peretele întîlnit. Cînd rotim analizorul cu 360°, această pată de lumină descrie un cerc pe pereţi, tavan şi podea. Surprinzător este faptul că iluminarea produsă de rază pe perete, adică intensitatea razei, variază, deşi sursa S rămîne neschimbată. Cînd planele de incidenţă ale polarizorului şi analizorului sînt paralele, intensitatea razei este maximă; ea scade pînă la minim, cînd cele două plane de incidenţă devin perpendiculare (fig. 4 *b*). Cu alte cuvinte la o rotaţie de 360° pata de lumină trece prin două maxime şi prin două minime. Minimul intensităţii devine *nul*, cînd unghiul de incidenţă are o anumită valoare, numită incidenţă brewsteriană. Pentru incidenţa brewsteriană lumina este polarizată liniar şi total. Valoarea acestei incidenţe o exprimă legea Brewster:

$$\operatorname{tg} i = n, \qquad (1)$$

unde n este indicele de refracţie al substanţei din care-i făcută oglinda polarizor. În cazul sticlei $i \cong 57°$.

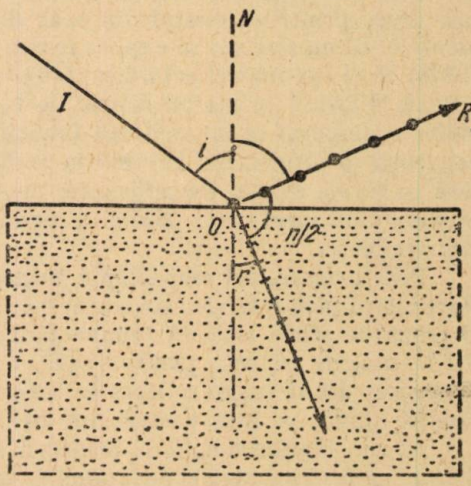


Fig. 5

Al doilea mijloc de polarizare a luminii este fenomenul de refracţie. Spre deosebire de reflexie, în acest caz experienţa arată că lumina nu este total polarizată, ci numai parţial. Polarizarea este maximă de asemenea pentru incidenţa brewsteriană (1). O putem deduce uşor, ţinînd seamă de legea refracţiei luminii $\sin i = n \sin r$, conform căreia unghiul dintre raza reflectată R_1 (total polarizată) şi raza

refractată R_2 (parțial polarizată) este de 90° (fig. 5). Într-adevăr, putem scrie $\operatorname{tg} i = \frac{\sin i}{\cos i} = n = \frac{\sin i}{\sin r}$, de unde $\sin r = \cos i$, adică $i + r = \frac{\pi}{2}$.

Însă $\widehat{R_1OR_2} = \pi - (i + r) = \frac{\pi}{2}$. O a doua deosebire față de polarizarea prin reflexie constă în faptul că unda polarizată prin refracție are oscilațiile vectorului cîmp electric E chiar în planul de incidență. Repetînd de mai multe ori succesiv refracția aceluiași fascicul de lumină, putem obține polarizarea liniară totală a acelui fascicul. Se realizează un polarizor prin refracție dintr-un top de 10—12 plăci de sticlă, așezate una peste alta așa încît incidența să îndeplinească condiția (1). Un asemenea top va putea da lumină polarizată liniar fie prin reflexie, fie prin refracție (fig. 6), ambele fascicule fiind total polarizate și reprezentînd fiecare $\frac{1}{2}$ din intensitatea luminii incidente.

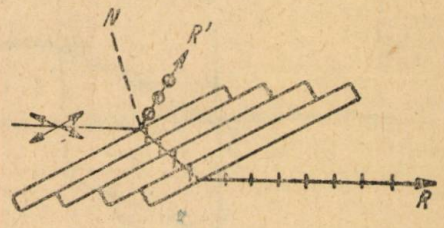


Fig. 6

Al treilea mijloc de polarizare a luminii este fenomenul de birefringență. Se știe că trecînd printr-un cristal care nu face parte din sistemul cubic, o rază de lumină se bifurcă și din cristal ies două raze de lumină. Se observă deosebit de clar acest fenomen la un cristal din spat de Islanda (fig. 7). Orice rază incidentă I se desface în două raze emergente R_1 și R_2, care ies din cristal paralele cu raza incidentă. Acest fenomen de refracție dublă se produce chiar dacă raza incidentă intră perpendicular pe o față a cristalului (fig. 8 *a*). Se vede că una din raze trece fără a devia, conform legilor de refracție, pe cînd cealaltă rază deviază în interiorul cristalului, refracția urmînd alte legi. De aceea prima rază O se numește rază *ordinară*, iar cea de a doua E, rază *extraordinară*. Faptul că în cristal cele două raze provenite din una și aceiași rază incidentă sînt deviate cu unghiuri diferite dovedește că cristalul posedă indici de refracție diferiți pentru fiecare din ele. Prin urmare cele două raze nu se propagă cu aceeași viteză. Raza ordinară are indicele de refracție $n_o = 1{,}658$ (pentru lumina galbenă de sodiu), ceea ce înseamnă o viteză $v_o = \frac{c}{n_o} = 180\,940$ km/s. Experiența arată însă că indicele de refracție al razei extraordinare nu este constant, ca al razei ordinare, ci variază cu direcția în care se propagă raza prin cristal. Valoarea lui cea mai mare în spatul de Islanda este $n_e = 1{,}486$, ceea ce corespunde unei viteze $v_e = \frac{c}{n_e} = 201\,884$ km/s. Aceasta constituie un exemplu frumos de anizotropia cristalelor:

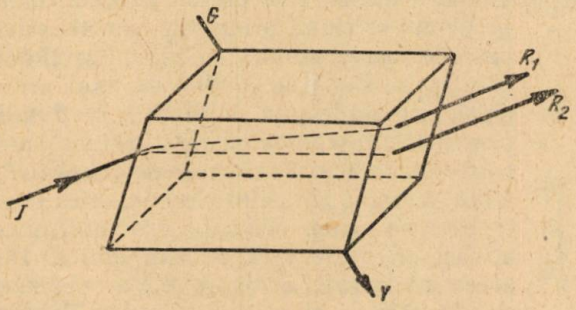


Fig. 7

proprietăţile lor fizice variază cu direcţia prin cristal. Există însă în cristalul de spat o direcţie de-a lungul căreia raza de lumină nu se bifurcă. De-a lungul acestei direcţii GY (fig. 8 *b*) raza ordinară şi cea extraordinară au aceiaşi viteză; ea se numeşte *axă optică* şi este paralelă cu direcţia diagonalei GY (fig. 7) care uneşte vîrfurile unghiurilor obtuze ale cristalului din spat de Islanda. Unele cristale au două asemenea direcţii; ele se numesc cristale biaxe. Se numeşte *secţiune principală* sau *plan principal* al cristalului orice plan paralel cu axa optică (fig. 9).

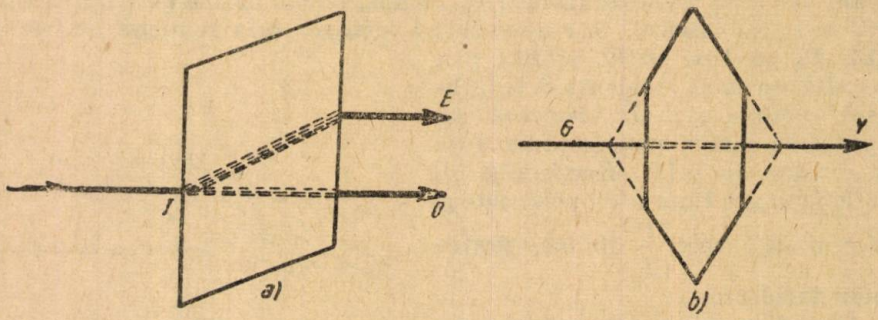


Fig. 8

Cercetînd cu ajutorul unui analizor cele două raze care ies din cristal s-a constatat că ambele sînt total polarizate liniar, dar în plane reciproc perpendiculare. Oscilaţiile vectorului electric E al razei ordinare se produc *perpendicular* pe planul secţiunii principale, iar ale celei extraordinare, *paralel* cu planul secţiunii principale. Dacă ne gîndim că axul principal este totdeauna cuprins în secţiunea principală, înseamnă că raza ordinară are totdeauna oscilaţiile normale pe axa optică, adică vectorul cîmpului electric, oricare ar fi direcţia razei ordinare, are totdeauna aceiaşi orientare faţă de axa optică. De aceea viteza razei ordinare (v_o) nu depinde de direcţia ei şi este constantă. Pentru raza extraordinară oscilaţiile ei se produc în planul secţiunii principale, de aceea vectorul cîmpului ei electric poate forma orice unghi între 0° şi 90° cu axa optică. Aşa dar viteza razei extraordinare variază cu direcţia razei în cristal şi deosebirile dintre proprietăţile razei ordinare şi ale celei extraordinare decurg dintr-o variaţie de orientare, iar nu dintr-o deosebire în natura lor fizică.

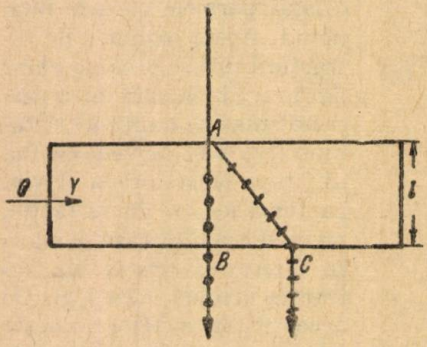


Fig. 9

După ce am analizat sumar aceste proprietăţi ale luminii refractate prin cristale putem înţelege uşor dece fenomenul de birefringenţă este un excelent procedeu pentru obţinerea luminii polarizate. Dificultatea constă doar în faptul că din cristal iese un amestec de lumină polarizată liniar, dar în două plane diferite şi reciproc perpendiculare. Pentru a separa cele două raze se utilizează prisma de polarizare *nicol*, numită astfel după numele constructorului, W. Nicol (1828).

Iată care este alcătuirea unui nicol. Un cristal din spat de Islanda se taie în două după un plan AA' (fig. 10) și se lipește la loc cu balsam de Canada; acesta este transparent și are indicele $n = 1{,}550$, cuprins între n_o și n_e. Se șlefuiesc apoi fețele, astfel încît muchiile să fie în raportul $\frac{AC'}{AC} = 3{,}65$, iar axa optică să facă un unghi de 48° cu fața de intrare. În asemenea condiții raza ordinară se reflectă total pe stratul de balsam de Canada, pe cînd raza extraordinară iese din nicol complet polarizată liniar și poate fi utilizată în diferite experiențe, separată de raza ordinară.

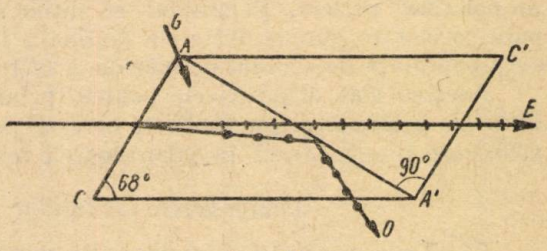


Fig. 10

Dacă lumina ieșită dintr-un nicol P intră într-un al doilea nicol A, ea nu mai iese din acesta dacă cei doi nicoli sînt așezați astfel încît secțiunile lor principale să fie perpendiculare una pe alta — nicoli încrucișați — (fig. 11 *a*). Spunem că în acest caz nicolii sînt așezați la extincție. Dacă cei doi nicoli au secțiunile principale paralele (fig. 11 *b*) lumina trece integral (exclusiv lumina absorbită de substanța nicolilor). În cazul cînd planele principale ale celor

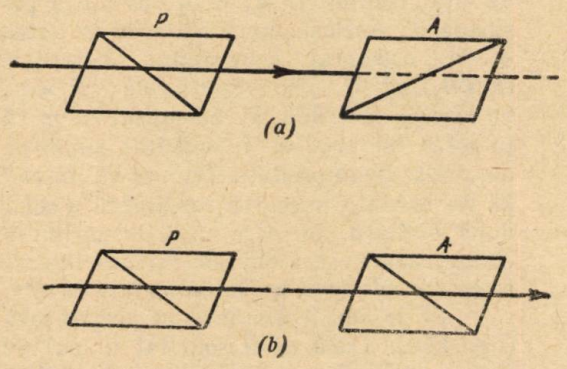


Fig. 11

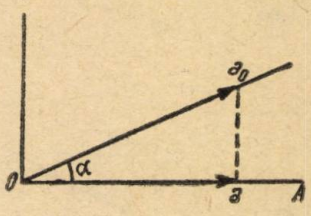


Fig. 12

doi nicoli fac între ele un unghi α (fig. 12), prin analizorul A vor trece numai componentele a ale amplitudinilor a_0 ale luminii venită de la polarizorul P. Dar $a = a_0 \cos \alpha$. Deoarece intensitatea luminii este proporțională cu patratul amplitudinii, urmează că intensitatea luminii I care iese din analizor este egală cu $I = I_0 \cdot \cos^2 \alpha$, adică proporțională cu intensitatea luminii I_0 transmisă de polarizor și cu patratul cosinusului unghiului dintre secțiunile principale ale polarizorului și analizorului. Aceasta se numește legea lui Malus. Se vede că $I = 0$ (minim), dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și $I = I_0$ (maxim) dacă $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$.

Prismele de polarizare au dezavantajul că oferă un cîmp optic redus, adică permit experimentarea numai cu fascicule înguste de lumină polarizată.

Un mijloc modern de polarizare a luminii oferă *filtrele de polarizare*, în special placa *polaroid*. Asemenea filtre se bazează pe fenomenul numit *dicroism*. Iată în ce constă acest fenomen.

Unele cristale, de exemplu turmalina, au proprietatea de a absorbi diferit cele două raze. Turmalina absoarbe raza ordinară mai mult decît pe cea extraordinară. Un cristal de turmalină gros de 1 mm absoarbe complet raza ordinară pentru lumina vizibilă, iar raza emergentă este formată integral din raza extraordinară, liniar polarizată. Există însă cristale artificiale foarte dicroice, de exemplu herapatitul (sulfoidat de chinină), descoperit de Heropath (1852). Un strat de herapatit gros de 0,1 mm absoarbe complet una din raze, fiind deci un polarizor perfect. Polaroidul se obţine din cristale microscopice de herapatit, orientate paralel între ele şi fixate între două plăci de sticlă. Ele pot avea suprafaţa de ordinul de mărime a metrului pătrat.

Acestea sînt dispozitivele pentru polarizarea luminii. Aparatul alcătuit dintr-un polarizor şi un analizor, care se poate roti în jurul său se numeşte *polariscop* şi este folosit în laboratoarele tehnice sau de cercetare ştiinţifică.

Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Ca să putem urmări şi înţelege alte aspecte ale fenomenului de polarizare a luminii, este necesar să analizăm mai întîi, cum se compun două oscilaţii perpendiculare, care au aceiaşi perioadă. Un punct material (fig. 13 *a*) oscilează vertical parcurgînd distanţele $O_1A_1O_1A_2O_1A_1\ldots$ de amplitudine $O_1A_1 = a_2$, avînd o perioadă T. Acelaşi punct material ar putea oscila orizontal parcurgînd distanţele $O_2B_1O_2B_2O_2B_1\ldots$ de amplitudine $O_2B_1 = a_1$, cu aceeaşi perioadă T. Să presupunem că punctul material ar fi solicitat simultan de aceste două oscilaţii. Cum se va mişca? El va executa mişcarea rezultantă a celor două oscilaţii, pe care să o urmărim în cîteva cazuri, care depind de faza în care se găsesc cele două oscilaţii una faţă de alta.

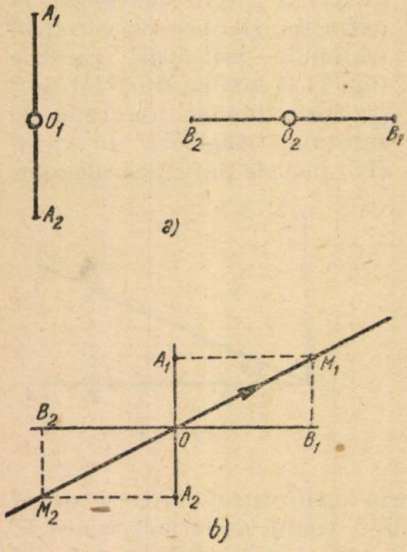


Fig. 13

Să le cnsiderăm întîi în aceiaşi fază (fig. 13 *b*). Dacă ar fi solicitat numai de prima oscilaţie, punctul material ar fi la momentul iniţial în A_1; solicitat numai de a doua oscilaţie, la momentul iniţial punctul material ar fi în B_1. Supus acţiunii ambelor oscilaţii, el s-ar găsi în M_1, rezultanta celor două acţiuni simultane. După un sfert de perioadă ambele acţiuni ar fi nule şi punctul material va fi în O, apoi în M_2 $\left(\text{după } t = \frac{T}{2}\right)$, etc. Prin urmare, dacă cele două oscilaţii sînt în fază, adică diferenţa fazelor lor $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = 0$, rezultanta acţiunii lor va fi o *oscilaţie liniară* $M_1OM_2OM_1\ldots$ de aceiaşi perioadă şi cu amplitudinea $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, cuprinsă în primul şi al treilea cadran.

Să considerăm acum că acţiunile celor două oscilaţii perpendiculare nu mai sînt în fază ci sînt decalate una de alta cu un sfert de perioadă, adică diferenţa lor de fază este $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la momentul iniţial oscilaţia verticală a parcurs

distanța OA, cînd cea orizontală începe, adică este în O. Rezultanta va fi în A_1 (fig. 14 *a*). După un sfert de perioadă prima acțiune va fi ajuns în O, iar a doua în B_1, dînd rezultanta B_1, după ce a trecut prin poziția intermediară M. Cu alte cuvinte în timpul unei perioade rezultanta acțiunilor celor două oscilații perpendiculare, între care există o diferență de fază de un sfert de perioadă, va fi o elipsă $A_1 B_1 A_2 B_2 A_1$, parcursă dextrogir (în sensul mersului acelor de ceasornic). Punctul material va executa o oscilație eliptică, efect al acțiunii simultane a două oscilații liniare perpendiculare de aceiași perioadă. Dacă cele două amplitudini ar fi fost egale, $a_1 = a_2 = a$, atunci rezultanta ar fi fost un cerc de rază $r = a\sqrt{2}$ (fig. 14 *b*).

Să considerăm cazul cînd cele două oscilații liniare componente sînt în opoziție de fază, $\varphi = \pi$. În acet caz prima oscilație va fi parcurs distanța OA_1O, pornind spre A_2 pînă în momentul cînd cea de-a doua pornește din O spre B_1 (fig. 15 *a*). Oscilația rezultantă a punctului material va fi, ca și în primul caz, o oscilație liniară $ON_1N_2 \ldots$ cu $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, însă cu înclinarea din al doilea spre

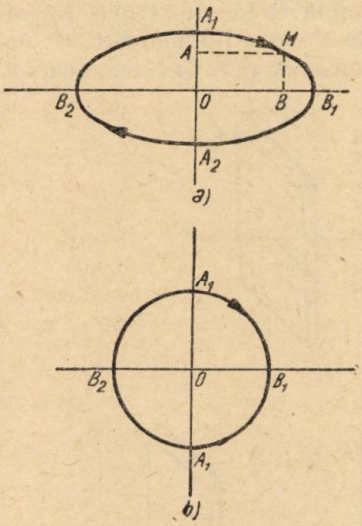


Fig. 14

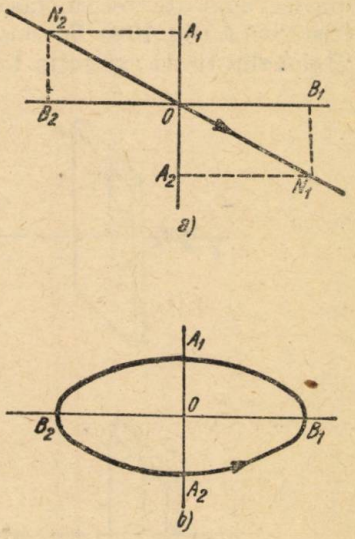


Fig. 15

al patrulea cadran. Dacă însă cele două oscilații componente au o diferență de fază $\varphi = 3\frac{\pi}{2}$, atunci prima oscilație va fi parcurs distanța OA_1OA_2, pornind spre O, pînă în momentul în care a doua oscilație pornește din O în spre B_1. Un raționament analog celui din cazul $\varphi = \frac{\pi}{2}$ arată că și în acest caz punctul material va descrie o elipsă $A_2B_1A_1B_2A_2$, dar în sensul levogir (invers mersului acelor de ceasornic). Și de data aceasta două oscilații liniare se compun într-o oscilație eliptică, care poate fi circulară, dacă cele două amplitudini ar fi egale. Este evident că, dacă între cele două oscilații liniare perpendiculare va exista o diferență de fază $\varphi = 2\pi$, se va reproduce situația din cazul $\varphi = 0$, adică rezultanta va fi o oscilație liniară cu înclinarea din cadranul I spre III.

Aşadar prin suprapunere, două oscilaţii liniare perpendiculare reciproc pot să dea naştere fie la o oscilaţie liniară, fie la una eliptică (sau circulară), după diferenţa dintre fazele pe care le au în momentul suprapunerii lor. Dacă această diferenţă de fază variază în mod continuu de la 0 la 2π, atunci rezultanta va fi o elipsă, a cărei axă mare B_1B_2 se va roti în jurul centrului O, degenerînd succesiv în dreptele M_1M_2 şi N_1N_2.

Ce este lumina polarizată eliptic?

Din cele expuse mai înainte am înţeles că lumina polarizată este lumina în care oscilaţiile vectorului cîmp electric sînt liniare şi se menţin într-un acelaşi plan care conţine raza. Există însă şi altfel de lumină polarizată. Am văzut că anizotropia cristalelor se manifestă optic prin fenomenul de birefringenţă datorit faptului că viteza luminii într-un cristal variază după direcţia de propagare faţă de axa optică. În mod practic se constată birefringenţa unei substanţe transparente în modul următor. Între doi polaroizi aşezaţi la extincţie (fig. 16 *a*), prin care deci nu poate trece un fascicul de lumină monocromatică (GY), se aşează lama cristalină L (fig. 16 *b*). Se constată că în Y apare lumină, deşi cei doi polarizori P şi A sînt tot la extincţie. Ce s-a întîmplat cu raza de lumină care a trecut

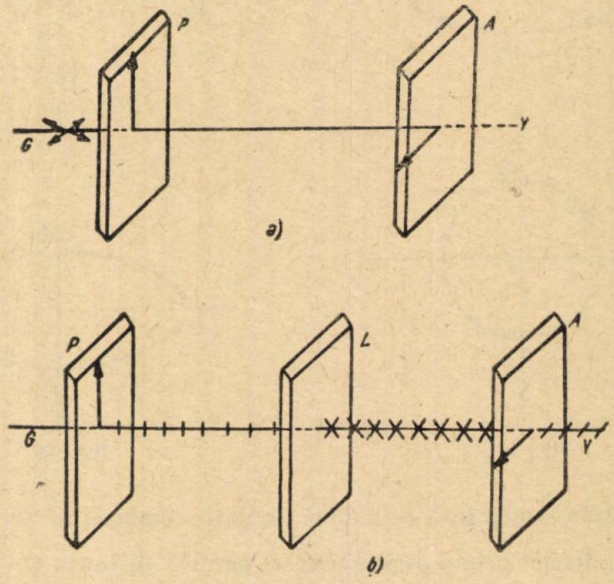


Fig. 16

prin lama cristalină? În absenţa lamei L lumina iese din polarizorul P cu planul de oscilaţie vertical, deci dînd o componentă nulă pentru secţiunea principală a analizorului A. De aceea nu iese lumină în Y. Lama cristalină L fiind birefringentă va da naştere la două raze de lumină polarizate liniar, avînd oscilaţiile în plane reciproc perpendiculare. Acestea vor da o componentă după secţiunea analizorului A (fig. 16 *b*), ieşind din el lumină polarizată în Y. Am văzut (fig. 9), că cele două raze, ordinară şi extraordinară, au viteze diferite prin lamă, de exemplu $v_e > v_o$. Ca să străbată grosimea l a lamei cele două raze vor folosi

intervale de timp diferite $\Delta t_o > \Delta t_e$, în care timp raza extraordinară va face un număr mai mic de oscilaţii decît raza ordinară. În consecinţă, la ieşirea din lamă, în C şi B (fig. 17), cele două raze vor avea o diferenţă de fază φ. În cazul figurii 17, diferenţa de fază este $\varphi = \pi$, corespunzătoare unei jumătăţi de perioadă. În general, unei perioade T îi corespunde o diferenţă de fază 2π, deci unui interval de timp Δt îi va corespunde o diferenţă de fază $\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t$. Atunci diferenţei de timp $\Delta t = \Delta t_o - \Delta t_e$, a cărei valoare este între timpul necesar razei ordinare şi celei extraordinare ca să străbată grosimea l a lamei, îi va corespunde o diferenţă de fază:

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}(\Delta t_o - \Delta t_e) = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{l}{v_o} - \frac{l}{v_e}\right) = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{l}{c}(n_o - n_e),$$

deoarece $n_o = \frac{c}{v_o}$ şi $n_e = \frac{c}{v_e}$. Înlocuind $T = \frac{c}{\lambda}$, unde λ este lungimea de undă a luminii în vid, se obţine:

$$\varphi = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_o - n_e). \qquad (2)$$

Deoarece grosimea lamei l este mică, distanţa BC este aşa de mică, încît distanţele $AB \cong AC$, fără a se face erori sensibile. Dar atunci razele emergente din lamă în C şi B, polarizate liniar şi reciproc perpendiculare, se suprapun şi dau o rezultantă ca şi două oscilaţii liniare, perpendiculare şi de aceiaşi perioadă. Lumina care iese din lama cristalină nu va fi nici lumină naturală, nici polarizată liniar, ci o lumină în care vectorul luminos va executa mişcarea rezultată din suprapunerea a două oscilaţii liniare şi perpendiculare: o oscilaţie eliptică. Spunem că lumina care iese din lama cristalină va fi *polarizată eliptic*. De fapt felul luminii polarizate care iese din lamă depinde de mărimea diferenţei de fază introdusă de grosimea lamei cristaline. Dacă grosimea lamei l introduce o diferenţă de fază $\varphi = \frac{\pi}{2}$, lumina iese polarizată eliptic. Grosimea care produce această diferenţă de fază este

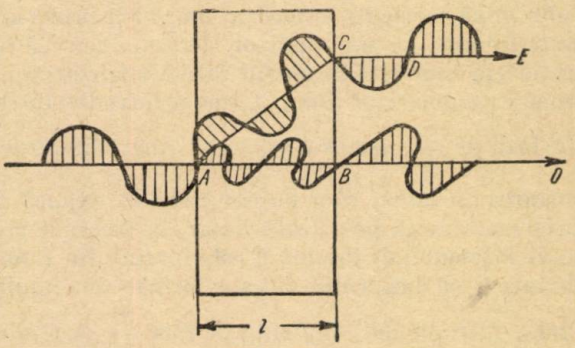


Fig. 17

$$l = \frac{1}{n_o - n_e} \cdot \frac{\lambda}{4},$$

iar lama se numeşte *lamă sfert de undă*. O asemenea lamă are grosimea astfel potrivită încît introduce o diferenţă de fază de $\frac{\pi}{2}$. Se fac şi lame a căror gro-

sime introduce o diferenţă de fază egală cu π. În acest caz grosimea lamei este:

$$l = \frac{1}{n_o - n_e} \cdot \frac{\lambda}{2},$$

iar lama se numeşte *lamă semiundă*. O asemenea lamă semiundă introduce o diferenţă de fază $\varphi = \pi$, iar lumina care iese din ea este polarizată liniar.

Prin urmare, lumina se numeşte polarizată eliptic dacă planul de oscilaţie a vectorului cîmp electric se roteşte uniform în jurul razei, deci după o lege bine determinată. Şi în cazul luminii naturale planul de oscilaţie îşi schimbă poziţia, dar în mod cu totul dezordonat. Practic lumina polarizată eliptic se obţine aşezînd o lamă sfert de undă în calea unui fascicul de lumină polarizată liniar. Din lamă ies raze polarizate liniar, reciproc perpendiculare, avînd între ele o diferenţă de fază $\frac{\pi}{2}$, care se suprapun şi dau un fascicul de lumină polarizată eliptic.

Se iveşte însă o întrebare. Cum se poate deosebi practic lumina naturală de cea polarizată liniar sau eliptic? Cu ochiul liber nu constatăm nici o deosebire între ele. Să presupunem că într-o cameră întunecată pătrund trei fascicule de lumină *A*, *B*, *C*, de lumină polarizată liniar, de lumină naturală şi de lumină polarizată eliptic, fără a şti care anume este de un fel sau altul. Aşezăm pe rînd, în calea fiecărui fascicul, un analizor pe care-l rotim în jurul fasciculului de lumină. Dacă în cursul unei rotaţii de 90° fasciculul *A* se stinge odată complet, iar fasciculele *B* şi *C* îşi păstrează intensitatea luminoasă, deducem cu certitudine că fasciculul *A* este polarizat liniar. Pentru a decide natura celorlalte două fascicule le trecem mai întîi printr-o lamă sfert de undă şi apoi primim lumina pe un analizor. Presupunem că în cazul fasciculului *C* se obţine o extincţie completă în cursul rotirii analizorului. Înseamnă că lumina ieşită din lamă este polarizat liniar. Lama a introdus între razele ieşite din ea o diferenţă de fază de $\frac{\pi}{2}$, care s-a adăugat unei diferenţe de fază $\frac{\pi}{2}$ ce o aveau razele la intrarea în lamă, căci numai astfel se explică diferenţa de fază π, care poate produce lumina polarizată liniar, la trecerea printr-o lamă cristalină. Prin urmare fasciculul de lumină *C* este format din lumină polarizată eliptic. Totodată deducem că fasciculul *B* este format din lumină naturală, căci lama sfert de undă, introducînd diferenţa de fază $\frac{\pi}{2}$, a produs lumină polarizată eliptic, care nu poate da extincţie la rotirea analizorului.

Interferenţa luminii polarizate

Toate fenomenele descrise pînă aci se produc cu lumină monocromatică, adică lumina în care undele au toate aceiaşi frecvenţă (culoare). Dacă însă lumina care trece prin lame cristaline aşezate între polarizor şi analizor este albă, atunci se obţin colorаţii foarte frumoase şi care dau indicaţii utile cu privire la strucutura lamei cristaline. Aceste colorаţii stau la baza unei metode de cercetare a materialelor şi a pieselor de maşini, de aceea este necesară o analiză a fenomenului. El se produce datorită interferenţei dintre unele raze care alcătuiesc fasciculul de lumină şi poartă numele de *polarizaţie cromatică*.

Între polarizorul P și analizorul A ai unui polariscop să așezăm o lamă cristalină L (fig. 18). Lăsăm să treacă mai întîi un fascicul îngust GY de lumină monocromatică. Se produc succesiv mai multe fenomene. În primul rînd polarizorul produce un fascicul de lumină polarizată liniar de intensitate I_1, care în cazul figurii, oscilează într-un plan vertical MN. Ajungînd pe fața anterioară L_a a lamei cristaline L (fig. 19 *a*), fasciculul se desface în două componente I_1 și I_2 polarizate liniar și care oscilează în direcții reciproc perpendiculare $RS \perp UV$. Străbătînd grosimea lamei cu viteze de propagare diferite, la ieșire din fața posterioară L_p a lamei cristaline (fig. 19 *b*), cele două componente polarizate liniar vor avea o diferență de fază,

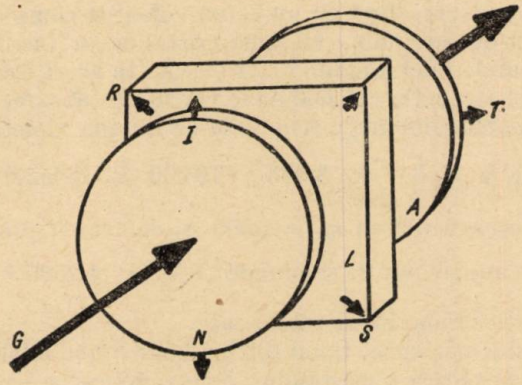


Fig. 18

care depinde de grosimea lamei. Să presupunem că diferența de fază introdusă va fi egală cu π. În acest caz cele două componente vor fi în opoziție de fază. Bunăoară componenta I_3 va avea aceiași fază ca la intrare pe cînd componenta I_2 va fi în fază opusă. Aceste două componente ajung la analizorul A (fig. 19 *c*), așezat așa ca secțiunea principală să fie paralelă cu aceea a polarizorului. Acesta va aduce cele două componente I_2 și I_3 să oscileze în același plan $T'T$, adică cele două raze I_2 și I_3 vor da două componente I'_2 și I'_3 în același plan și în faze opuse. Acum se poate produce interferența lor. Dacă $I'_2 = I'_3$ se va produce stingerea lor reciprocă, adică prin polariscop nu va trece lumină. Dacă însă, analizorul A va fi așezat cu secțiunea sa principală $T'T$ perpendicular pe aceea a polarizorului P (fig. 18 și 19 *d*) atunci componentele I_2 și I_3 vor da componentele I'_2 și I'_3 care se vor însuma. Prin polariscop trece maximum de lumină. Pentru poziții intermediare ale analizorului față de polarizor, lumina transmisă va avea o intensitate care va varia de la 0 la maximum.

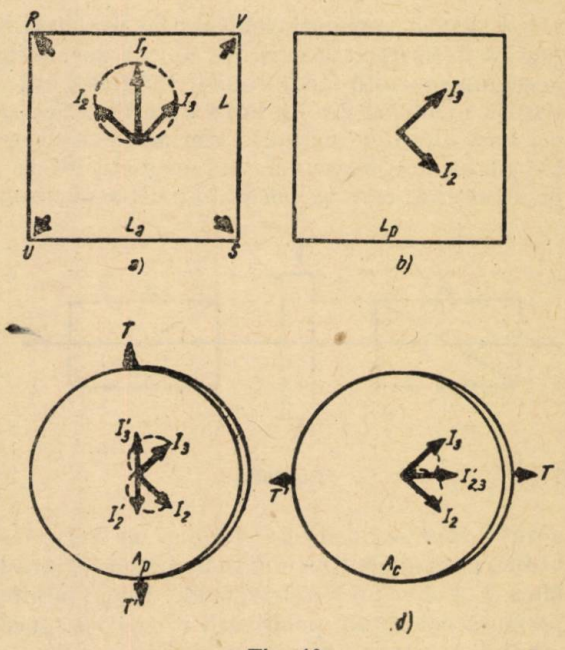


Fig. 19

Ce se întîmplă dacă fasciculul de lumină GY nu este monocromatic? În acest caz, diferența de fază introdusă de lama birefringentă nu mai corespunde pentru același număr de $\frac{\lambda}{2}$ pentru toate culorile, ci numai pentru unele. Numai acestea se vor stinge, iar celelalte vor trece, dînd pe un ecran culoarea complimentară culorilor stinse. Să zicem de exemplu, că lama cristalină ar introduce o diferență de fază care corespunde unei lungimi de 10 000 Å. În acest caz, lumina violetă ($\lambda_v = 4000$ Å) și lumina roșie ($\lambda_r = 6\,660$ Å) se vor stinge, deoarece distanța de 10 000 Å cuprinde un număr impar de semiunde de lumină violetă sau roșie: $5\frac{\lambda_v}{2} = 5.2000 = 10\,000$ Å și $3\frac{\lambda_r}{2} = 3.333 = 10\,000$ Å. Celelalte culori trec; de exemplu, pentru lumina verde cu $\lambda_{vr} = 5000$ Å, defazarea produsă de lama cristalină cuprinde un număr par de semiunde: $4\frac{\lambda_{vr}}{2} = 4.2500 =$ $= 10\,000$ Å, deci această lumină trece cu maxim de intensitate.

Prin această metodă se pot studia cristalele, tăind din ele lame avînd fețele orientate în diferite feluri față de axa optică a cristalului. Este o aplicație deosebit de importantă a polarizării luminii în studiul mineralogiei, la cercetarea rocilor în tehnica minieră și în metalurgie.

Aplicații ale luminii polarizate

Cristalele prezintă fenomenele de birefringență și deci de polarizație cromatică datorită structurii lor anizotrope. Substanțele amorfe sînt izotrope, de aceea nu prezintă fenomenul de birefringență. Mediile amorfe au o izotropie statistică, rezultînd din așezarea dezordonată a particulelor ce le alcătuiesc. Uneori însă diferitele acțiuni exterioare, ca de exemplu comprimarea, întinderea, cîmpul electric intens, cîmpul magnetic intens pot provoca schimbări temporare de structură, care să ducă la apariția unei anizotropii macroscopice, care încetează dacă se înlătură acțiunea exterioară. O astfel de lamă, supusă acțiunii exterioare, dacă este așezată între un polarizor și un analizor la extincție, va lumina cîmpul întunecat. Experiența se face astfel: între P și A la extincție (fig. 20) se așează o lamă dintr-un mediu amorf, de exemplu, din plexiglas ori sticlă. Cîmpul analizorului rămîne întunecat: lumina nu trece. Dacă însă lama L este comprimată, atunci cîmpul analizorului se luminează, adică lumina monocromatică trece, deci, lama L a devenit birefringentă. Dacă lumina este albă, cîmpul analizorului prezintă coloratiile polarizării cromatice. Încetînd comprimarea, cîmpul analizorului se întunecă: anizotropia lamei a dispărut.

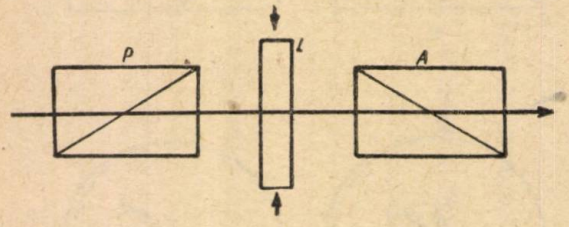


Fig. 20

Defazarea introdusă de birefringența provocată corespunde unei diferențe de drum parcurs δ, care este proporțională cu presiunea exercitată și cu lungimea de undă a luminii incidente:

$$\delta = cp\lambda, \qquad (3)$$

unde c este constanta care depinde de natura substanței. Pentru sticla ordinară, luînd p în kgf/mm² și λ în mm, $c = -0{,}05$.

Sub acțiunea forțelor exterioare se nasc în lamă anumite eforturi care nu sînt întotdeauna la fel repartizate. Repartizarea lor depinde de forma corpului supus acțiunii exterioare, de mărimea acțiunii exterioare și de felul cum aceasta lucrează asupra corpului. Ca urmare, birefringența provocată va avea o repartiție care corespunde modului în care sînt repartizate eforturile în corpul cercetat. Liniile de-a lungul cărora birefringența provocată este aceiași, vor corespunde unei aceleiași defazări, deci vor da în cîmpul analizorului o aceiași culoare de interferență: vor fi *izocromatice*. Deci la construcția diferitelor piese de mașini, dimensionarea acestora se face ținînd seama de eforturile la care sînt supuse și de repartiția lor în timpul funcționării mașinii. Aceste eforturi se pot calcula cu ajutorul unor formule complicate, date de știința numită rezistența materialelor.

Folosind însă fenomenul de birefringență provocată, problema se poate rezolva mult mai simplu și mai intuitiv.

Pentru aceasta se face dintr-un material transparent, un model redus al piesei respective. Acest model redus este așezat între analizorul și polarizorul unui polariscop și este luminat cu un fascicul de lumină albă sau monocromatică. Piesa este apoi supusă unei acțiuni exterioare, care reproduce în mărime și repartiție acțiunea la care ea este supusă în mașina căreia îi este destinată. Liniile izocromatice arată modul în care se repartizează eforturile la care este solicitată piesa și dă valoarea acestora. Această metodă de cercetare a pieselor de mașini se numește metoda *fotoelasticimetrică*. Bineînțeles aici am schițat numai principiul metodei care ne dă o idee despre importanța practică a studiului luminii polarizate. Fenomenul de birefringență provocată de cîmpul electric este utilizat în tehnica filmului sonor.

O altă aplicație a luminii polarizate este în domeniul filtrelor de lumină. Iată un exemplu. Ca să-și conducă mașina pe o șosea noaptea, șoferul luminează calea cu farurile mașinii. La întîlnirea a două mașini însă, farurile fiecărei mașini orbesc cu lumina lor pe șoferul celeilalte. Ca să se elimine acest inconvenient ce poate deveni periculos, se poate folosi lumina polarizată. În acest scop, geamul farului se confecționează din polaroid așezat așa ca planul secțiunii sale principale P_1 să facă 45° cu orizontala (fig. 21). Lumina trimisă de far va fi polarizată liniar, avînd oscilațiile paralele cu P_1. Geamul din fața șoferului sau ochelarii lui vor fi confecționați tot din polaroid, așezat așa ca planul secțiunii lor principale P_1 să facă tot 45° cu orizontala. Cînd se întîlnesc două mașini lumina polarizată liniar trimisă de una din ele, va cădea la extincție pe geamul sau ochelarii șoferului celeilalte, deci nu va ajunge la retina lui și nu va mai fi orbit. Se înțelege că această metodă poate fi folosită și în cazul luminii trimisă de furnale, etc.

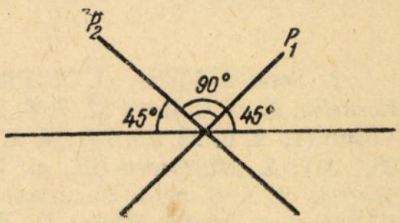


Fig. 21

O largă întrebuințare în laboratoarele de chimie are fenomenul de polarizație rotatorie, care nu a fost descris aci. Ne dăm astfel seama de valoarea practică a studiului luminii polarizate.

PREMIILE „GAZETEI MATEMATICE ŞI FIZICE“ SERIA B PE ANUL 1955

Pentru activitatea deosebită desfăşurată de unii corespondenţi evidenţiaţi în anul 1955 la «*Gazeta Matematică şi Fizică*» *seria B*, se acordă *premii* şi *menţiuni*. Cărţile date ca premii sau menţiuni sînt trecute în paranteză după numele fiecăruia, prin numărul de ordine din *lista cărţilor*.

Premii

1. Cristea I. Ion, cl. X Constanţa (1, 10, 11, 12, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26); *2. Stroe Radu*, cl. X-a Ploieşti (1, 2, 4, 11, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26); *3. Şerb Gabriel Adrian*, cl. X-a Piteşti (1, 3, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 19, 21, 22, 24); *4. Bucur D. Gheorghe*, cl. IX Pucioasa (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15, 20, 21, 24); *5. Bogdan Mircea*, cl. IX Ploieşti (1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 15, 20, 21, 22, 24); *6. Lupuţiu Ion*, cl. X-a Ploieşti (1, 6, 12 13, 14, 16, 17, 21, 22, 23, 24); *7. Rus A. Ioan*, cl. X-a Oradea (1, 2, 3, 5, 13, 14, 22, 23, 24, 25, 26); *8. Stănăşilă Octavian*, cl. X-a Ş. M. 4 Bucureşti (1, 3, 10, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26); *9. Dumitrescu Badea Ovidiu*, cl. X. Ş. M. 4 Bucureşti (1, 2, 3, 7, 10, 11, 12, 16, 25); *10. Vasilescu Aurel*, cl. X Călăraşi (1, 3, 5, 7, 14, 17, 19, 21, 22); *11. Popa Gh. Stancu*, cl. X-a Corabia (2. 5, 10, 11, 21, 22, 23, 24, 25); *12. Draica Constantin*, cl. VIII-a ş. m. 4 Bucureşti (1, 2, 10, 21, 22, 23, 24, 25); *13. Bigan V. Stan*, cl. X-a Giurgiu (2, 5, 10, 21, 22, 23, 24, 25); *14. Ioniţă Tudor*, an IV ş.m. mecanică Oraşul Stalin (1, 2, 5, 21, 22, 23, 24, 25); *15. Popescu Paul*, an II ş.m. măsurători terestre, Bucureşti (1, 2, 6, 10, 21, 22, 23, 24, 25); *16. Stepan Ionel*, an III, ş.m. hidrotehnică Constanţa (1, 5, 6, 21, 22, 23, 24, 25, 26); *17. Iordache I. Dan*, cl. X-a Constanţa (3, 5, 10, 21, 22, 23, 24, 25, 26); *18. Stănciulescu I. Mihai*, cl. IX Tîrgovişte (1, 2, 6, 21, 22, 23, 24, 26); *19. Colibaba Tiberiu*, cl. X Galaţi (5,12, 13, 14, 20, 21, 26); *20. Donescu St. Dragomir*, cl. X-a Focşani (3, 12, 13, 14, 21, 26).

Menţiuni

1. Sorescu Victor, cl. X Piteşti (2, 7, 8, 21, 22, 23, 24, 25); *2. Ţurlea I. Corneliu*, cl. X Craiova (2, 7, 8, 21, 22, 23, 24, 25); *3. Stănescu I. Viorel*, cl. IX Vaslui (1, 2, 6, 22, 23, 24); *4. Mitrofan Gh.*, absolvent Caransebeş (2, 8, 21, 22, 23, 24); *5. Murărescu Gh.*, cl. IX Roman (1, 8, 20, 22, 23, 24); *6. Bădescu Marcel*, cl. X. Ş. m. 4. Bucureşti (2, 6, 14, 22, 23, 24); *7. Hodor Constantin*, cl. VII Roznov Piatra-Neamţ (1, 6, 8, 20, 22, 23); *8. Torjescu Florin*, student Fac. mecanică Bucureşti (11, 12, 14, 22, 23, 26). *9. Ţîru I. Emil*, cl. IX Focşani (5, 11, 12, 21, 22, 23); *10. Hegedüs Attila*, cl. IX Tg. Mureş (1, 6, 8, 20, 21, 22, 23); *11. Antonescu Victor*, absolvent, Reghin (5, 11, 12, 21, 22, 23); *12. Pupăzan V. Nicolae*, absolvent Sibiu (5, 11, 12, 15, 22, 23); *13. Parepa C. Grigore*, absolvent Ploieşti (5, 16, 19, 21, 22, 24); *14. Uţă Marin*, absolvent Sibiu (5, 16, 19, 21, 22, 24); *15. Filipoiu Gh. Miu*, student Bucureşti (5, 14, 19, 21, 22, 24); *16. Cristea Aurel*, cl. IX Focşani (5, 17, 19, 21, 22, 24); *17. Ellenberg Manfred*, cl. X. Ş.m. 19 Bucureşti (5, 14, 15, 21, 22, 24); *18. Vrăjitoru Mihai*, cl. VII Aiud (1, 6, 8, 9, 20, 22, 24); *19. Cea şel I. Gheorghe*, absolvent, Vadu Poştei, Buzău (5, 17, 21, 22, 24); *20, Duduica Radu*, cl. IX Ş.m. 17 Bucureşti (3, 17, 21, 22, 24, 25); *21. Mitroaică I. Gheorghe*, cl. X Calafat (6, 19, 21, 22, 24, 26); *22. Rotaru N. Constantin*, cl. X. Suceava (6, 19, 21, 22, 24, 26); *23. Sandu Gh. Ion*, cl. X, Ş.m. 4. Bucureşti (6, 8, 14, 21, 24); *24. Sămărescu F.*

Dan, cl. X Ploiești (6, 20, 21, 22, 24); *25. Alexa Dumitru*, cl. X Iași (6, 8, 21, 24, 26); *26. Bărbuică Nicolae*, an III Șc. electrotehnică Craiova (6, 21, 24, 26); *27. Bătinețu M. Dumitru*, absolvent Zimnicea (6, 21, 24); *28. Breban Mircea*, cl. X Oradea (6, 21, 24); *29. Torsan Ilie*, cl. X Alba Iulia (20, 21, 24); *30. Lambă Stelian*, an IV școala hidrotehnică Constanța (7, 21, 24).

Lista cărților, cu numărul de ordine, acordate premianților și menționaților pentru rezolvări de probleme din GMF-B pe anul 1955

1. *I. V. Novoselov*: Curs special de algebră elementară; 2. *N. N. Mihăileanu*: Geometrie neeuclidiană; 3. *I. M. Vinogradov*: Bazele teoriei numerelor; 4. *Gh. Vrănceanu*: Geometrie analitică și proiectivă; 5. *N. Luzin*: Calcul diferențial; 6. *I. F. Suvorov*: Curs de matematici superioare; 7. *Gh. Mihoc*: Elemente de calculul probabilităților; 8 *A. I. Marcușevici*: Arii și logaritmi; 9. *I. S. Sominski*: Metoda inducției matematice; 10. *S. Friș* și *A. Timoreva*: Curs de Fizică generală, vol. I; 11. *S. Friș* și *A. Timoreva*: Curs de Fizică generală, vol II; 12. *S . Friș* și *A. Timoreva*: Curs de Fizică genèrală, vol. III; 13. *E. V. Șpolski*; Fizica Atomică I; 14. *E. V. Șpolski*: Fizica atomică II; 15. *M. Grebencea*: Aritmetica; 16. *Al. Stoenescu*: Culegere de probleme de statică, vol I; 17. *A. Arjanicov*: Aerodinamica; 18. *E. Blohințev*: Bazele mecanicii cuantice; 19. Aplicațiile pașnice ale energiei atomice; 20 *S. Peltz* și *C. Iițigan*: Calcule economice, vol. I; 21. « Aurel Vlaicu »; 22. « David Emanuel »; 23. « Traian Lalescu »; 24. « Gheorghe Țițeica »; 25. *A. I. Necrasov*: Mecanica teoretică, vol. I; 26. *A. I. Necrasov*: Mecanica teoretică, vol. II.

Premianții și menționații pe anul 1955 sînt rugați să comunice adresa lor exactă sau să se prezinte la sediul S.S.M.F. pentru a primi cărțile acordate.

NOTE MATEMATICE

3. Generalizarea problemei 1148

Fie un triunghi oarecare ABC și înălțimea AD. Cu centrul pe înălțime se descrie un cerc ce trece prin A, care taie laturile AB și AC respectiv în E și F. Să se arate că dreptele BC și EF sînt antiparalele.

Soluție. — Alegem ca pol de inversiune (a se vedea articolul « Inversiunea » de Elena Mavrodin din RMF nr. 9, 1952), iar puterea de inversiune astfel aleasă încît cercul O să se transforme în drepta BC și deci coform reciprocității invesiunii, dreapta BC se va transforma în cercul O. Acest lucru se poate deoarece AO și BC sînt perpendiculare. Se observă că E este inversul lui B și F este inversul lui C. Din definiția inversiunii: $AE \cdot AB = AF \cdot AC = K$, relația care ne arată că dreptele EF și BC sînt antiparalele.

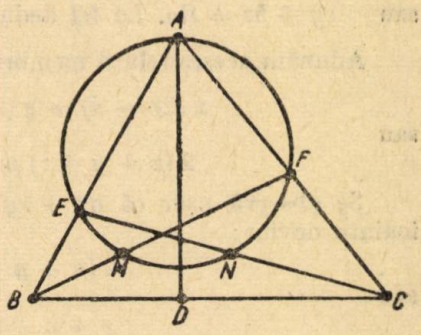


Fig. 1

În particular, cînd diametrul cercului este AD se obține problema 1148 propusă de tov. Florin Constantinescu.

De asemeni se observă că în cazul general se păstrează și proprietatea de la punctul 2 din enunțul problemei (pag. 23, RMF nr. 1/1954). Pentru aceasta se poate întrebuința metoda a III-a dată în GMF (B) nr. 8/1954, pag. 295.

Oprea M. Berechet, student Matematici, București

4. Asupra unei teoreme a lui Carnot

Într-un triunghi ascuțitunghi suma distanțelor centrului cercului circumscris triunghiului la laturile triunghiului este egală cu suma razelor cercurilor înscris și circumscris triunghiului.

În triunghiul ascuțitunghi ABC fie O centrul cercului circumscris și A_1, B_1, C_1 proiecțiile lui O pe laturile BC, CA, AB. Dacă notăm cu r și R razele cercurilor înscris și circumscris triunghiului, atunci teorema lui Carnot se scrie

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = r + R.$$

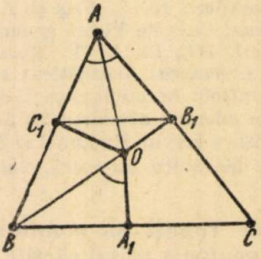


Fig. 1

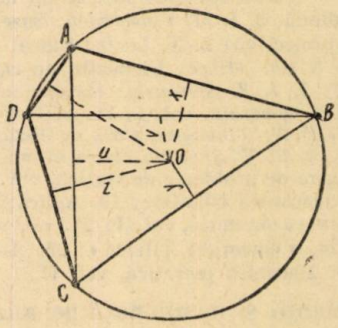


Fig. 2

Demonstrația ce o vom da acestei teoreme s-ar putea să fie nouă. Pentru aceasta să notăm $OA_1 = x$, $OB_1 = y$, $OC_1 = z$.

Patrulaterul inscriptibil OB_1AC_1 ne dă:

$$OB_1 \cdot AC_1 + OC_1 \cdot AB_1 = OA \cdot B_1C_1$$

sau

$$y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2} = R \cdot \frac{a}{2}$$

sau $cy + bz = Ra$. La fel deducem $az + cx = Rb$ și $bx + ay = Rc$.

Adunăm aceste relații membru cu membru și obținem:

$$x(2p - a) + y(2p - b) + z(2p - c) = 2Rp$$

sau

$$2(x + y + z)p - (ax + by + cz) = 2Rp.$$

Se observă ușor că $ax + by + cz = 2S_{ABC} = 2rp$ așa că relația de mai înainte devine:

$$2(x + y + z)p - 2rp = 2Rp$$

sau

$$x + y + z = R + r, \quad \text{c.c.t.d.}$$

Observații. — 1) Dacă triunghiul e obtuzunghi, de exemplu, dacă $A > 90$ atunci teorema lui Carnot devine;

$$-x + y + z = R + r.$$

Acest lucru se arată ușor folosind aceiași metodă de lucru ca mai înainte.

2. Cum $\sphericalangle BOA_1 = A, \ldots$, rezultă că $x = R\cos A, \ldots$, adică teorema lui Carnot se transformă în:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Aplicație. — Fie un patrulater inscriptibil $ABCD$ și r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, BCD, CDA, DAB. Să arătăm că există relația: $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

Notăm cu x, y, z, t, u, v distanțele centrului cercului circumscris patrulaterului $ABCD$, la AB, BC, CD, DA, AC, DB, R fiind raza cercului circumscris putem scrie (fig. 2):

$$x + y + u = R + r; \quad y + z + v = R + r; \quad z + t - u = R + r;$$

$$x + t - v = R + r.$$

Din prima relație scădem pe a doua iar din a treia pe a patra și obținem:

$$x + u - z - v = r_1 - r_2 \quad \text{și} \quad z - u - x + v = r_3 - r_4.$$

Adunăm aceste două relații membru cu mebru: $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 0$ sau $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

Gh. I. Bercea, student Timișoara

5. O problemă elementară de mecanică

Adeseori în fizică și mecanică, atît în probleme teoretice cît și în aplicații tehnice practice, se cere să se determine un vector cunoscînd proiecțiile sale perpendiculare pe trei axe oblice concurente date.

Dăm mai jos cîteva exemple:

1) Cunoscînd momentul unei forțe în raport cu trei axe oblice concurente se cere să se determine momentul forței în raport cu punctul de concurență al axelor (fig. 1).

2) Cunoscînd vitezele unui cursor

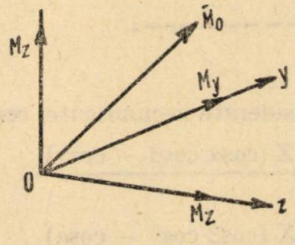


Fig. 1

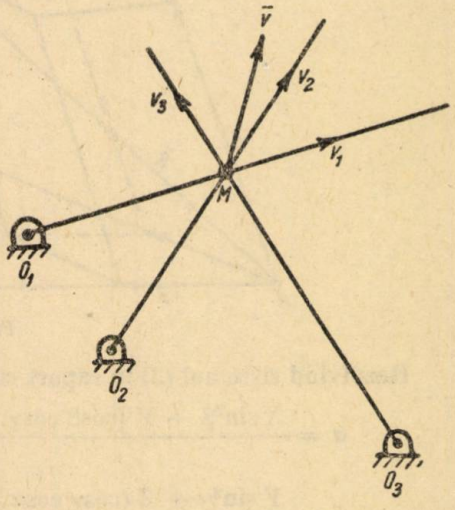


Fig. 2

M în mișcările sale pe trei bare rectilinii O_1M, O_2M și O_3M articulate în capetele fixe O_1, O_2 și O_3 se cere viteza rezultantă a lui M (fig. 2).

3) Trei bare AM, BM şi CM articulate în capătul comun M au vitezele cunoscute în extremităţile A, B şi C. Se cere viteza articulaţiei M (fig. 3).

Cele ce urmează rezolvă acest gen de probleme.

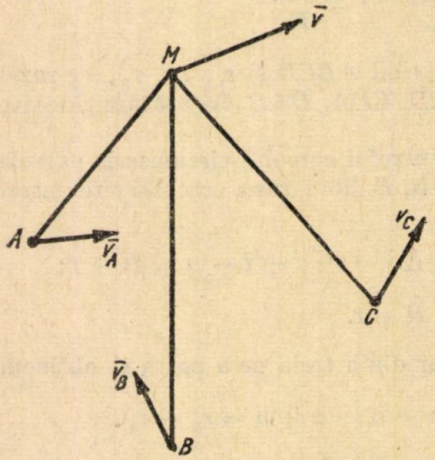


Fig. 3

Fie $\bar{R}$ un vector de componente oblice $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ după trei axe oblice date Ox, Oy, Oz făcînd între ele unghiurile $\sphericalangle xOy = \alpha$; $\sphericalangle yOz = \beta$ şi $\sphericalangle zOx = \gamma$; proiecţiile normale ale vectorului $\bar{R}$ pe aceste trei axe le vom nota cu X, Y şi Z.

Dîndu-se $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z$ ne propunem să determinăm pe $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ şi $\bar{R}$.

Avem vectorial:

$$\bar{R} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \tag{1}$$

şi scalar:

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2bc\cos\beta + 2ca\cos\gamma \tag{2}$$

Proiectînd relaţia (1) pe axele Ox, Oy, Oz, obţinem:

$$X = a + b\cos\alpha + c\cos\gamma, \quad Y = a\cos\alpha + b + c\cos\gamma, \quad Z = a\cos\gamma + b\cos\beta + c. \tag{3}$$

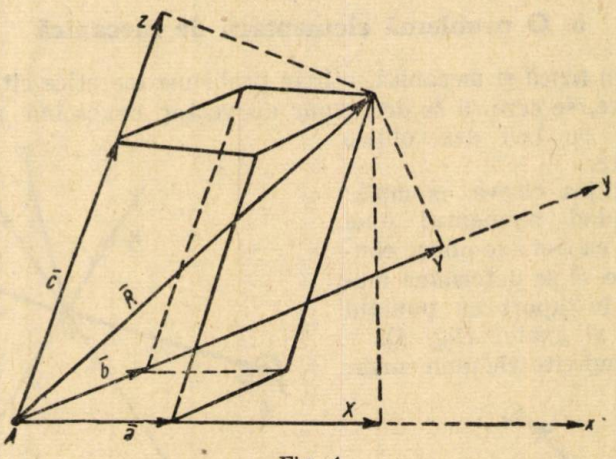


Fig. 4

Rezolvînd sistemul (3) în raport cu a, b, c considerate necunoscute, rezultă:

$$a = \frac{X\sin^2\beta + Y(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + Z(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)}{N},$$

$$b = \frac{Y\sin^2\gamma + Z(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta) + X(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha)}{N}, \tag{4}$$

$$c = \frac{Z\sin^2\alpha + X(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) + Y(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta)}{N},$$

în care numitorul N este dat de expresia:

$$N = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \tag{5}$$

Introducînd valorile lui a, b, c în (2), obținem după ce efectuăm calculele algebrice corespunzătoare și simplificăm expresia:

$$R^2 = \frac{X^2\sin^2\beta + Y^2\sin^2\gamma + Z^2\sin^2\alpha}{N} + \\ + 2\frac{XY(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + YZ(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta) + ZX(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)}{N}, \tag{5}$$

Notînd cu α', β', γ' unghiurile făcute de $\overline{R}$ cu axele Ox, Oy, Oz avem:

$$\cos\alpha' = \frac{X}{R}; \quad \cos\beta' = \frac{Y}{R}; \quad \cos\gamma' = \frac{Z}{R}.$$

Introducînd în (6) pe X, Y, Z în funcție de R, α', β' și γ' se obține următoarea relație de legătură dintre unghiurile α, β, γ, α' β' și γ':

$$1 = \frac{\cos^2\alpha'\sin^2\beta + \cos^2\beta'\sin^2\gamma + \cos^2\gamma'\sin^2\alpha}{N} + \tag{7}$$

$$+ 2\frac{(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha)\cos\alpha'\cos\beta' + (\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta)\cos\beta'\cos\gamma' + (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)\cos\gamma'\cos\alpha'}{N}.$$

Cazuri particulare

A. Axa Oz perpendiculară pe planul xOy, iar $\sphericalangle(zOy) = \alpha$; în acest caz $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$. Se obține:

$$a = \frac{X - Y\cos\alpha}{\sin^2\alpha}; \quad b = \frac{Y - X\cos\alpha}{\sin^2\alpha}; \quad c = Z;$$

$$R^2 = \frac{X^2 + Y^2 - 2XY\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + Z^2; \tag{8}$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\gamma' = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' - 2\cos\alpha\,\mathrm{co}\alpha'\cos\beta'.$$

B. Vectorul $\overline{R}$ se găsește în planul xOy, iar $\sphericalangle(xOy) = \alpha$; este un caz particular al celui precedent pentru $Z = 0$.

$$R^2 = \frac{X^2 + Y^2 - 2XY\cos\alpha}{\sin^2\alpha}; \tag{9}$$

$$\alpha' + \beta' = \alpha.$$

Relația (9) se poate obține ușor prin aplicarea în planul xOy a unor proprietăți elementare geometrice și trigonometrice.

C. Axele Ox, Oy, Oz formează un sistem triortogonal; în acest caz

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2},$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$1 = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma',$$

relații clasice cunoscute.

Ca aplicație practică a celor expuse mai sus ne propunem să rezolvăm următoarea problemă propusă în Culegerea de probleme de mecanică rațională de Buchholtz, Voronkov, Manakov, sub nr. 458:

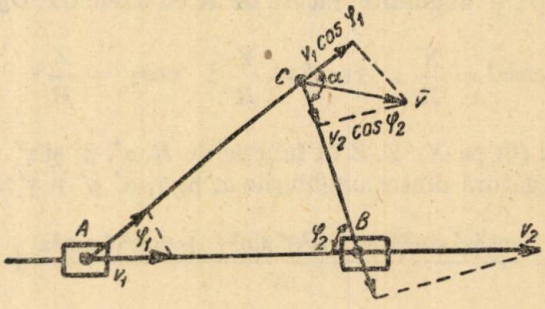


Fig. 5

« Două bare AC și BC sînt legate între ele printr-o articulație în punctul C și de două culise în punctele A și B care se mișcă în linie dreaptă cu vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$. Să se afle viteza punctului C ».

În tratat se dă o soluție grafică.

Viteza $\bar{v}$ din C are proiecțiile perpendiculare $v_1\cos\varphi_1$ și $v_2\cos\varphi_2$ după direcțiile AC și BC ce fac între ele unghiul $\alpha = \varphi_1 + \varphi_2$.

Aplicînd formula (9) obținem:

$$v^2 = \frac{v_1^2\cos^2\varphi_1 + v_2^2\cos^2\varphi_2 - 2v_1v_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Alexandru Stoenescu

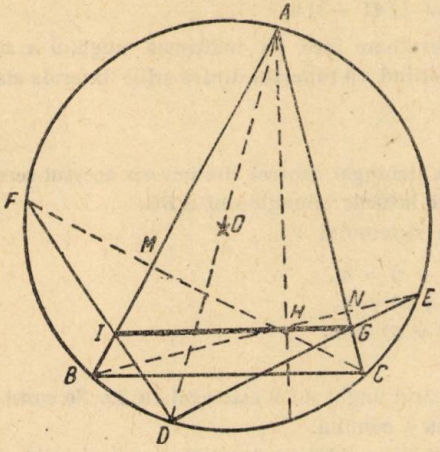
6. Generalizarea problemei 1424

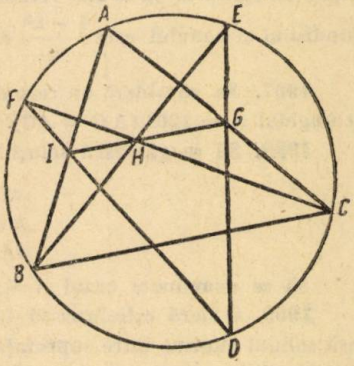
Fie M un punct mobil pe cercul circumscris unui triunghi ABC și L un punct oarecare fix din plan. Dreptele AL, BL, CL taie cercul respectiv în A_1, B_1, C_1. Să se arate că punctele A_2, B_2, C_2, în care dreptele MA_1, MB_1, MC_1, taie respectiv laturile BC, AC, AB, se găsesc pe o dreaptă ce trece prin punctul L.

* * *

Soluție: Teorema lui Pascal: « În orice exagon $ABCDEF$ înscris într-un cerc, punctele de întîlnire ale laturilor opuse AB și DE, BC și EF, CD și FA sînt colineare » este adevărată și atunci cînd cele 6 puncte ale cercului sînt unite

în altă ordine decît cea în care sînt aşezate pe cerc; cu alte cuvinte, proprietatea este valabilă şi în cazul unui exagon concav înscris.





Astfel, în cazul exagonului concav MA_1ACBB_1, colineare sînt punctele $A_2(MA_1, CB)$, $L(A_1A, BB_1)$, $B_2(AC, B_1M)$; iar în cel al exagonului concav MB_1BACC_1, punctele $B_2(MB_1, AC)$, $L(BB_1, CC_1)$, $C_2(BA, C_1M)$.

Rezultă că punctele A_2, B_2, C_2 şi L se găsesc pe aceeaşi dreaptă.

D. C. Panu

CHESTIUNI DE EXAMEN

Probleme date la admiterea în Institutul de Petrol şi Gaze. Bucureşti, august 1955

1992. Să se calculeze expresia:

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right]$$

demonstrînd în prealabil, că expresia din paranteză este suma unei progresii geometrice descrescătoare.

1993. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}.$$

1994. Se dă un cerc cu centrul în O şi cu raza R şi un punct M la distanţa d de centrul cercului pe diametrul AMB. În jurul punctului M se rotesc cele două laturi $P'MP$ şi $T'MT$ ale unui unghi drept. Notăm cu S suprafaţa triunghiului PMT, cu S' suprafaţa triunghiului $P'MT'$.

1. Să se calculeze în funcţie de R şi d produsul SS'.

2. Cercul circumscris triunghiului PMT poate fi tangent la AB? În caz afirmativ să se arate că $T'P'$ este paralel cu AB.

1995. Să se rezolve sistemul:

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\sqrt{a},$$
$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=(\sqrt{41}-3)\,a.$$

1996. Într-un con de rază r, a cărui generatoare face cu înălțimea unghiul α se înscrie un cilindru. Să se afle volumul cilindrului știind că raportul dintre ariile laterale ale cilindrului și conului este $\frac{1-k^2}{2}\cos\alpha$.

1997. Se consideră un cerc de rază R și un triunghi isoscel circumscris acestui cerc cu unghiul $A = 120°$ ($AB = AC$). Să se calculeze laturile triunghiului ABC.

1998. Să se găsească soluțiile pozitive ale sistemului :

$$x(y-z)+y(y+z)=m,$$
$$y(z-x)+z(z+x)=n,$$
$$z(x-y)+x(x+y)=m.$$

Să se examineze cazul $m = 2$ și $n = 7$.

1999. O sferă este înscrisă într-un con al cărui unghi ASB este egal cu 2α. Se consideră solidul cuprins între suprafața sferei și aceea a conului.

1. Să se calculeze în funcție de raza sferei și de unghiul α: a) volumul acestui solid și b) suprafața totală a acestui solid.

2. Să se termine unghiul α astfel ca raportul dintre pătratul suprafeței totale a solidului și volumul acestuia să fie egal cu $3\pi R$ metri și să se discute rezultatul.

2000. Să dă un unghi drept XOY. Un triunghi isoscel variabil MON ($MO = MN$) este situat în acest unghi cu vîrful O fix și baza ON dirijată după OX. În plus, raza cercului înscris în triunghi are o valoare constantă r. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului ONM trece printr-un punct fix situat pe OY și că dreapta MN rămîne tangentă unui cerc fix.

2001. Să se rezolve sistemul:

$$x^3y^2=a^{13},$$
$$(\log x)^2+(\log y)^2=\frac{130}{9}(\log a)^2.$$

2002. Se dă un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$). Să se rezolve triunghiul cunoscînd mediana $BB_1 = m$ și unghiul $BB_1C = \alpha$.

2003. Un trunchi de con cu bazele paralele este circumscris unei sfere de rază R. Raza bazei inferioare este împătritul razei bazei superioare. Să se găsească în funcție de R volumul corpului.

Probleme date la admiterea în Institutul de mecanică din Orașul Stalin, august 1955

2004. Să se efectueze:

$$\frac{1{,}05\cdot 104:100}{1{,}35-0{,}012:0{,}08}-\left[\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{8}+0{,}725\right):\left(1+\frac{1}{6}\right)\right]:$$
$$:\left[4{,}5-\left(3+\frac{4}{7}\right)\sqrt{44+\frac{133}{169}}\right].$$

2005. Să se efectueze:

$$E=\frac{x+2x+3x+\ldots+(n-1)\,x+nx}{n^2-2n-3}-$$
$$-\left(\sqrt{xy}-\frac{xy}{x+\sqrt{xy}}\right):\frac{(xy)^{\frac{1}{2}}-y}{x-y}\cdot\frac{2\,(n-3)}{3x}.$$

2006. Să se rezvolve sistemul:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14,$$

$$xy + yz + zx = 11,$$

$$x + y = 3.$$

2007. Se dă triunghiul ABC cu: $A = 90°$; $B = 60°$; $BC = 2k$. Din A se ridică perpendiculara AD pe planul ABC, unde $AD = \frac{k}{2}$.

1. Să se calculeze volumul piramidei $ABCD$ care are ca bază triunghiul şi ca înălţime AD.

2. Se notează cu M_1 mijlocul segmentului de dreaptă AB, cu M_2 mijlocul segmentului AM_1, cu M_3 mijlocul segmentului AM_2 ş.a.m.d. Se notează cu N_1 mijlocul segmentului de dreaptă AC, cu N_2 mijlocul segmentului AN_1, cu N_3 mijlocul segmentului AN_2 ş.a.m.d.

Să se calculeze volumele piramidelor care au toate ca înălţime pe AD şi ca bază triunghiurile AM_1N_1; AM_2N_2; AM_3N_3 ş.a.m.d. Să se afle suma volumelor acestor piramide.

2008. Se dă triunghiul ABC, se dau $a = 150$ cm, $\operatorname{ctg} B = \frac{1}{3}$ şi $\operatorname{tg} C = 1$. Să se afle perimetrul triunghiului.

Probleme date la admiterea în Institutul de Construcţii Bucureşti, Secţia fără frecvenţă, septembrie 1955.

2009. Fie ecuaţia $x^2 - (1 + p)x + p^2 = 0$ în care p este un parametru, iar x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ei.

a) Fără a se rezolva ecuaţia, să se formeze ecuaţia de gradul II în y care admite ca rădăcini $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$ şi $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$.

b) Pentru ce valori ale lui p ecuaţia în y are rădăcini reale.

c) Pentru ce valori ale lui p ecuaţia în y are o rădăcină egală cu $\frac{1}{4}$; care sînt în acest caz rădăcinile ecuaţiei în x.

2010. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x}$$

nu depinde de x.

2011. Se dă dreptunghiul $ABCD$ avînd dimensiunile $AB = x$, $AD = y$; $x > y$. Se ia pe prelungirea laturii AB punctul E aşa fel ca $BE = y$, iar pe prelungirea laturii BC se ia punctul F astfel ca $BF = x$.

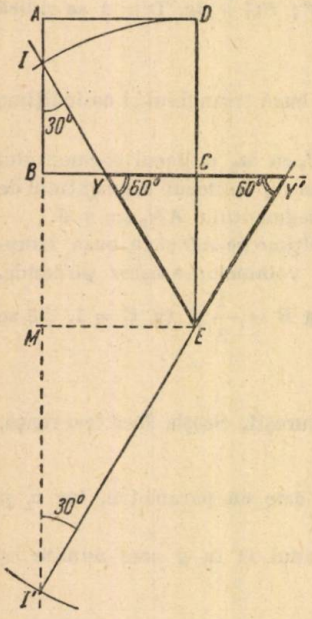
a) Să se demonstreze că punctul C este intersecţia înălţimilor triunghiului AEF.

b) Să se arate că raza cercului circumscris triughiului AEF este egală cu $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1403

In patratul ABCD prelungim latura DC cu CE = DC. Cercul de centru E şi rază ED taie pe AB în I şi I'; EI şi EI' taie pe BC în J şi J' Să. se arate că triunghiul EJJ' este echilateral.



N. N. Mihăileanu

Soluţie. — Conform enunţului avem: $DE = IE = 2ME$, unde M este piciorul perpendicularei dusă din E pe II'.

Conform unei teoreme cunoscute, un triunghi dreptunghic cu ipotenuza egală cu dublul catetei mici, are unghiul opus catetei mari de 60°. Rezultă că:

$$\sphericalangle IEM = \sphericalangle I'EM = 60°.$$

Deoarece $BJ' \parallel ME$ avem:

$$\sphericalangle BJ'I' = \sphericalangle MEI' = 60°$$

şi

$$\sphericalangle IEM = \sphericalangle IJB = \sphericalangle J'JE = 60°.$$

Prin urmare, două din unghiurile triunghiului $JJ'E$ sînt egale cu cîte 60°, deci triunghiul este echilateral.

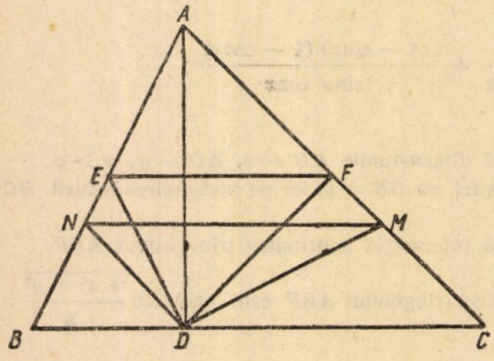
Problema 1404

Intr-un triunghi oarecare ABC ducem înălţimea AD şi fie E şi F mijloacele laturilor AB şi AC. Perpendicularele duse din D pe DE şi DF taie laturile AC, AB respectiv în M şi N. Să se arate că patraulaterul AMDN este inscriptibil şi ortodiagonal.

L. Mănescu, R. Vîlcea

Soluţie. — Unghiurile EDF şi MDN avînd laturile perpendiculare sînt suplimentare:

$$\sphericalangle EDF + \sphericalangle MDN = 180°,$$



însă: $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EAF = \sphericalangle MAN$, căci vîrfurile A şi D sînt simetrice faţă de EF. Deci:

$$\sphericalangle MAN + \sphericalangle MDN = 180°,$$

iar patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil.

Avem:

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle EAD = \sphericalangle NAD = \sphericalangle NMD \text{ (vezi figura)}$$

şi cum $ED \perp DM$, rezultă că şi

$$AD \perp MN.$$

Problema 1420

Fie M, M' două puncte izogonale în raport cu triunghiul ABC, iar X, X', Y, Y', Z, Z' proiecţiile acestor puncte, respectiv pe laturile BC, CA, AB. Să se arate că:

1. *Dreapta MX şi paralelele duse prin Z' şi Y' respectiv la BM, CM sînt concurente în X_1.*

2. *Dacă notăm cu* X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 *punctele analoage atunci cele 12 puncte* X, Y, Z, X', Y', Z'. X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 *sînt pe același cerc cu centrul în mijlocul lui* MM'.

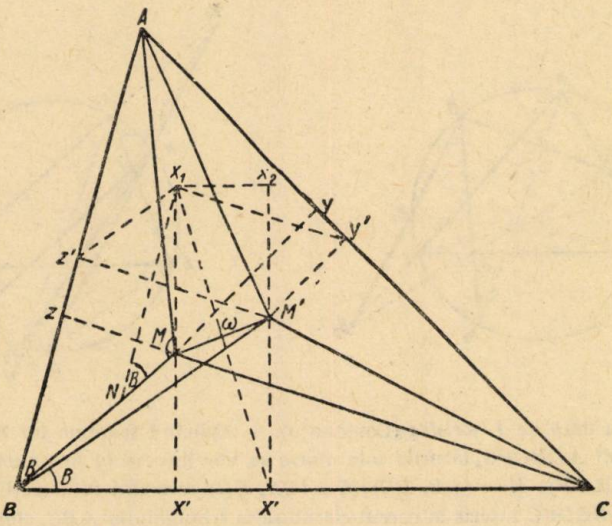
3. *Patrulaterul* XX_1X_2X' *și celelalte patrulatere analoage sînt dreptunghiuri.*

Florin Constantinescu

Soluție dată de *I. Cristea* (Constanța). — Paralela prin Z' la BM taie pe MX în X_1, iar paralela prin X_1 la AB taie pe BM în N. Fie $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM' = \beta$.

1°. În triunghiul MX_1N, aplicînd teorema sinusului, avem:

$$\frac{MX_1}{\sin(MNX_1)} = \frac{X_1N}{\sin(X_1MN)} \text{ sau } \frac{MX_1}{\sin\beta} = \frac{Z'B}{\cos(B-\beta)}, \tag{1}$$



căci în paralelogramul $Z'X_1NB$ laturile opuse X_1N, $Z'B$ sînt egale; iar $\sin(X_1MN) = \sin(XMB) = \cos(XBM) = \cos(B-\beta)$. Cum în triunghiul dreptunghic $BZ'M'$ avem $\sin(Z'M'B) = \cos(Z'BM') = \cos(B-\beta)$ iar $\dfrac{Z'B}{\cos(B-\beta)} = \dfrac{Z'B}{\sin(Z'M'B)} = BM$, relația (1) devine:

$$\frac{MX_1}{\sin\beta} = BM';\ MX_1 = BM'\sin\beta = M'X',$$

căci în triunghiul dreptunghic $BX'M'$ avem:

$$BM'\sin\beta = BM'\sin(M'BX) = M'X'.$$

Analog, notînd cu X_1' intersecția paralelei prin Y' la CM cu MX se găsește:

$$MX_1' = M'X'.$$

Deci: $MX_1 = MX_1'$, așa că X_1 și X_1' se confundă în X_1.

2°. $MX = \parallel M'X'$. Deci $MX_1M'X'$ este un paralelogram, iar diagonalele sale se taie în părți egale în ω. Deci $X_1\omega = \omega X'$ = raza cercului ce trece, după cum se știe, prin punctele X, Y, Z, X' X, Z' conciclice. X_1 se află pe acest cerc (analog și celelalte puncte Y_1, Z_1, X_2, Y_2 se află pe cercul X, Z, X', Y' Z', X_1).

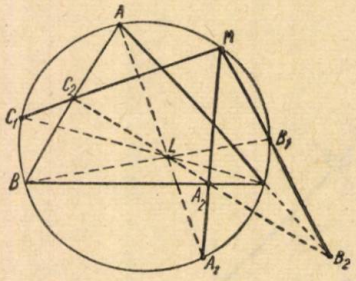
3°. Conform punctului 1°, avem $X_1M = M'X'$; $MX = X_2M'$ și rezultă $X_1M + MX = M'X' + X_2M'$ sau X_1X' și cum $X_1X \parallel X_2X' \perp BC$ patrulaterul XX_1X_2X' este dreptunghi. Analog și pentru celelalte dreptunghiuri.

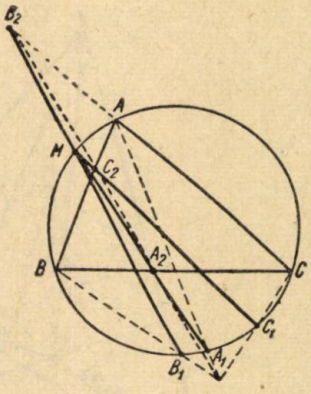
Problema 1424

Fie H ortocentrul unui triunghi oarecare ABC; E și F punctele în care înălțimile vîrfurilor B și C întîlnesc cercul circumscris, iar D punctul diametral opus lui A. Dreptele DE, DF întîlnesc respectiv laturile AC, AB în G și I. Să se arate că punctele G, H, I sînt colineare.

Gabriel Șerb, elev, Pitești

Soluție dată de *Gh. Graure* (Slatina). — Se observă ușor că: $\sphericalangle DFC = \sphericalangle FHI$; $\sphericalangle DEB = \sphericalangle EHG$ deoarece $HM = MF$; $HN = NE$. Dar $\sphericalangle DFC + \sphericalangle DEB = \sphericalangle A$, apoi $\sphericalangle FHF + \sphericalangle FHI + \sphericalangle EHG = 180°$, în consecință I, H, G sînt colineare.





Soluția II-a dată de *I. Cristea* (Constanța). — Aplicînd teorema lui Pascal exagonului concav inscriptibil $ABEDFC$, laturile sale opuse se vor intersecta în puncte colineare. Deci punctele $I = (AB, DF)$; $H = (BE, EC)$; $G = (CA, ED)$ care sînt intersecțiile laturilor opuse ale exagonului $ABEDFC$ înscris în cercul circumscris triunghiului ABC, sînt colineare.

Observare. — Problema se extinde pentru orice altă poziție a lui H și D în afară de cea din problemă, astfel:

Fie D un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC, iar H un punct arbitrar în planul triunghiului ABC. Dreptele BH și CH întîlnesc din nou cercul circumscris în E și F; iar dreptele DE, DF întîlnesc dreptele AC, AB în G și I. Punctele G, H, I sînt colineare.

Problema 1428

Se consideră paralelogramul $ABCD$, astfel că $\sphericalangle A = \varphi < 90°$, $AB = CD = 2a$, $BC = DA = 2b$, $a > b$.

Dacă pe laturile AB, BC, CD, DA se poartă în același sens segmentele egale AE, BE, CG, DH respectiv de lungime l, se obține un paralelogram $EFGH$.

Să se determine l astfel încît $EFGH$ să fie dreptunghiu sau romb. Se obține un singur dreptunghi și două romburi.

Să se calculeze aria dreptunghiului și ariile romburilor.

(Se va considera ca sens pozitiv pe perimetrul paralelogramului $ABCD$, sensul dela A la B).

Andrei Dobrescu

Soluția autorului. — Notînd cu M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA respectiv, avem:

$$EM = a - l;\ HQ = b - l;\ HA = 2b - l;\ EB = 2a - l.$$

Notînd apoi cu O centrul paralelogramului $ABCD$ din triunghiurile OME, OQH, AEH, EBF avem:

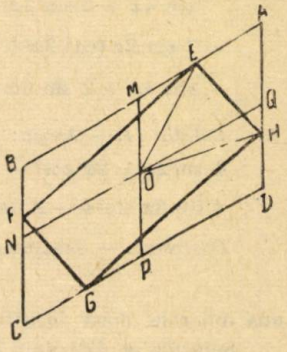
$$OE^2 = OM^2 + EM^2 + 2OM.\ EM\cos\varphi = b^2 + (a-l)^2 + 2b\,(a-l)\cos\varphi, \quad (1)$$

$$OH^2 = OQ^2 + HQ^2 - 2OQ.\ HQ\cos\varphi = a^2 + (b-l)^2 - 2a\,(b-l)\cos\varphi; \quad (2)$$

$$EH^2 = AE^2 + HA^2 - 2AE.\ HA\cos\varphi = l^2 + (2b-l)^2 - 2l\,(2b-l)\cos\varphi; \quad (3)$$

$$EF^2 = EB^2 + BF^2 + 2EB.\ BF\cos\varphi = (2a-l)^2 + l^2\,(2a-l)\cos\varphi. \quad (4)$$

Pentru ca paralelogramul $EFGH$ să fie dreptunghi trebuie ca semidiagonalele să fie egale, $OE = OH$, adică, ţinînd seamă de (1) şi (2):



$$b^2 + (a-l)^2 + 2b\,(a-l)\cos\varphi = a^2 + (a-l)^2 - 2a(b-l)\cos\varphi.$$

Deducem:

$$l = \frac{2ab\cos\varphi}{(a-b) + (a+b)\cos\varphi}.$$

Se constată uşor că $l < b$.

Pentru ca $EFGH$ să fie romb trebuie să avem:

$$EF = EH,$$

adică, ţinînd seamă de (3) şi (4):

$$l^2 + (2a-l)^2 + 2l\,(2a-l)\cos\varphi = l^2 + (2b-l)^2 - 2l\,(2b-l)\cos\varphi.$$

Această relaţie este o ecuaţie de gradul al doilea în l, ale cărei rădăcini sînt:

$$l' = a + b \text{ şi } l'' = -\frac{a-b}{\cos\varphi}.$$

Există deci, un dreptunghi şi două romburi R' şi R''.

Pentru a calcula aria dreptunghiului se calculează ariile trimghiurilor AEH, BEF, CFG şi DGH care se scad din aria paralelogramului $ABCD$.

Pentru a calcula ariile romburilor R' şi R'' se calculează întîi semidiagonalele OE şi OH, introducînd în (1) şi (2) valorile l' şi l'' obţinute pentru l.

Se obţine rezultatul interesant că aria rombului R' este egală cu aria paralelogramului dat $ABCD$.

Problema 1434

Un fluviu se varsă în mare prin două braţe. Pe fiecare braţ la vărsarea în mare este cîte un port. Lungimea braţelor este respectiv de 96 şi 75 km. O navă parcurge distanţa de la un port la celălalt navigînd pe fluviu, atît la dus cît şi la întors, în 9 ore. Viteza navei este de 20 km/oră. Care este viteza curentului pe cele două braţe?

C. V. Costăchescu

Soluţie. — Fie v_1 = viteza curentului pe braţul de 96 km,
v_2 = viteza curentului pe braţul de 75 km,

Din $S = vt$ scoatem $t = \frac{S}{v}$. De aici formăm sistemul de ecuaţii:

$$\frac{96}{20 - v_1} + \frac{75}{20 + v_2} = 9,$$

$$\frac{96}{20 + v_1} + \frac{75}{20 - v_2} = 9.$$

Rezolvînd găsim $v_1 v_2 = 20$ km/oră. De aici scoatem $v_1 = \frac{20}{v_2}$ şi înlocuim în una din ecuaţii. Rezultă $v_1 = 4$ km/oră şi $v_2 = 5$ km/oră.

Problema 1436

Să se verifice identitățile:

$$\sin 4x + 2 \sin 2x = 4 \sin 2x \cos^2 x,$$

$$-\sin 4x + 2 \sin 2x = 4 \sin 2x \sin^2 x.$$

N. Mihăileanu

Soluția I. — Avem:

$$\sin 4x + 2 \sin 2x = 2 \sin 2x \cos 2x + 2 \sin 2x =$$

$$= 2 \sin 2x (\cos 2x + 1) = 2 \sin 2x (2 \cos^2 x - 1 + 1) = 4 \sin 2x \cos^2 x$$

$$-\sin 4x + 2 \sin 2x = 2 \sin 2x (1 - \cos 2x) = 4 \sin 2x \sin^2 x.$$

Soluția II. — Avem:

$$4 \sin 2x = 2x \cos^2 - 2 \sin 2x = 2 \sin 2x (2 \cos^2 x - 1) = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x,$$

$$4 \sin 2x \sin^2 x - 2 \sin 2x = 2 \sin 2x (2 \sin^2 x - 1) = 2 \sin 2x (-\cos 2x) = -\sin 4x.$$

Observare. — Scăzînd din identitatea

$$4 \sin 2x = 4 \sin 2x (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

una din cele două identități, obținem cealaltă identitate.

Soluțiile au fost date de: **Adr. Gab. Șerb, C. Țurlea, I. Cristea, O. Berechet și R. Stroe.**

Problema 1439

Se dă șirul $\frac{a+1}{a-2}, \frac{a+2}{a-3}, \ldots, \frac{a+n}{a-n}$ $\left(U_n = \frac{a+n}{a-n-1}\right)$. *Să se arate că șirul cu termenul general* $V_n = \frac{1}{U_n - U_{n-1}} = \frac{1}{U_n - U_{n-2}}$ formează o progresie aritmetică.

Petre Minuț, Piatra Neamț

Soluție. — Dacă: $U_n = \frac{a+n}{a-n-1}$, atunci:

$$U_{n-1} = \frac{a+n-1}{a-n} \text{ și } U_{n-2} = \frac{a+n-2}{a-n+1}.$$

Deci:

$$V_n = \frac{1}{\frac{a+n}{a-n-1} - \frac{a+n-1}{a-n}} - \frac{1}{\frac{a+n-1}{a-n} - \frac{a+n-2}{a-n+1}} =$$

$$= \frac{(a-n)(a-n-1)}{2a-1} - \frac{(a-n)(a-n+1)}{2a-1} =$$

$$\frac{(a-n)(a-n-1-a+n-1)}{2a-1} = \frac{2n-2a}{2a-1}.$$

Avem:

$$V_n = \frac{2n-2a}{2a-1}; \; V_1 = \frac{2-2a}{2a-1}; \; V_2 = \frac{4-2a}{2a-1}; \; V_3 = \frac{6-2a}{2a-1}.$$

Deci șirul cu termenul general V_n formează o progresie aritmetică în care primul termen este: $V_1 = \frac{2-2a}{2a-1}$ și rația $r = \frac{2}{2a-1}$.

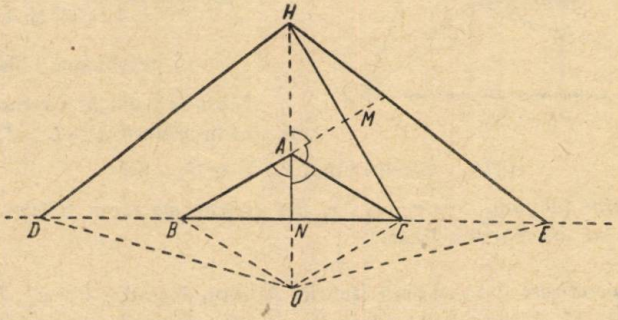
Problema 1443

Dacă unghiul din vîrful A al unui triunghi isoscel are 120°, să se arate că ortocentrul H al unui triunghi este simetricul centrului O al cercului circumscris față de vîrful A. Cercul de centru O, care trece prin H, taie latura BC în D și E. Să se calculeze aria triunghiului DHE în funcție de OA = R.

I. Drăgoescu, student, Timișoara

Soluție dată de *R. Stroe, I. Cristea, C. Țurlea, M. Filipoiu* și *I. Torsan.* — Trebuie să demonstrăm că $HA = AO$.

Deoarece $AO = BO = CO$; $\sphericalangle BAO = \sphericalangle OAC = 60°$, rezultă că triunghiurile OAB, OAC sînt echilaterale, deci $OA = AB$ (vezi figura).



Avem $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MAH$, AM comună, deci triunghiurile dreptunghice ACM și MAH sînt egale; rezultă că $HA = AC = AB$. Deci $OA = HA$, adică H este simetricul lui O față de A.

$$OA = R;\ ON = \frac{R}{2};\ OE = OH = 2OA = 2R,$$

$$EN^2 = OE^2 - ON^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{15R^2}{4};\quad EN = \frac{R\sqrt{15}}{2},$$

$$DE = R\sqrt{15},$$

$$HN = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2},$$

deci:

$$S_{DEH} = \frac{DE \times HN}{2} = \frac{R\sqrt{15} \cdot \frac{3R}{2}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{15}}{4}.$$

Problema 1453

Notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației:

$$(m^2 + 1)x^3 + mx^2 + (m^2 - 1)x + m + 2\sqrt{3} = 0$$

și $a = arc\ tg\ x_1$, $b = arc\ tg\ x_2$, $c = arc\ tg\ x_3$. *Să se arate că* $tg\ (a + b + c) = \sqrt{3}$.

Al. D. Popescu, elev Reșița

Soluție dată de: **I. I. Cristea, C. Țurlea, M. Filipoiu, I. Torsan.**

Deprez, prin transportarea pînă la expoziţie a energiei produse de turbina hidraulică din Meisbach, situată la 57 km de München, şi prin punerea în funcţiune cu ajutorul unui mic motor electric a unei pompe mici de circa $\frac{1}{2}$ CP.

Experienţele ulterioare ale lui Deprez, care a mai realizat şi transportul energiei electrice de la Paris la Creil şi înapoi, la o tensiune de aproximativ 6 000 V, experienţele lui Fontaine, iar mai tîrziu cele ale lui Tury, au demonstrat posibilitatea practică a transportului de energie la o tensiune şi distanţe mult mai mari

Pentru mărirea tensiunii energiei electrice transportate, curentul alternativ oferă posibilităţi mult mai largi. Pe de altă parte însă lectromotoarele de curent alternativ cunoscute pe atunci prezentau atîtea neajunsuri încît adesea nu puteau fi utilizate în scopuri tehnice. Cel mai mare neajuns consta în faptul că motoarele conectate la sursa de curent nu se porneau singure, ci trebuiau pornite pînă la o anumită viteză şi fiecare mo'or putea să lucreze numai la o singură viteză.

Electricienii au fost puşi în faţa problemei de a găsi o posibilitate de folosire a curentului alternativ nu numai pentru alimentarea lămpilor cu incandescenţă, dar şi pentru alimentarea motoarelor electrice.

Primul pas în această direcţie l-a făcut electricianul italian Ferraris, care a propus folosirea unui sistem de doi curenţi alternativi cu o diferenţă de fază de 90°, denumit ulterior, curent bifazat.

Ferraris a adoptat această idee numai la cîteva aparate de demonstraţie. Mai tîrziu ea a fost dezvoltată şi realizată practic de către electrotehnicianul Nicolae Tesla.

O invenţie nouă a rezolvat într-un mod cu totul deosebit şi mult mai bine decît fusese rezolvată prin folosirea curentului bifazat—problema el.ctromotorului de curent alternativ şi aceea a transportului energiei electrice prin curent alternativ. Această invenţie a fost făcută de Mihail Osipovici Dolivo-Dobrovolsk, care a preconizat folosirea curentului trifazat. Tot el a organizat primul transport de energie electrică din lume la o distanţă de 175 km, cu ajutorul curentului trifazat, transport demonstrat la expoziţia electrotehnică de la Frankfurt pe Main din 1891.

Tot Dolivo-Dobrovolski a construit primele electromotoare de curent trifazat, precum şi primul transformator trifazat.

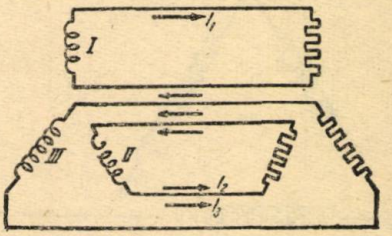
Pentru a se obţine curent trifazat, pe rotorul generatorului se execută trei înfăşurări (bobine) decalate una faţă de alta cu 120° (pentru maşina cu doi poli). În felul acesta, curentul alternativ trifazat reprezintă un grup de trei curenţi monofazaţi de aceiaşi frecvenţă, decalaţi unul faţă de altul cu 120°.

Sisteme de curent trifazat

În fig. 1 este reprezentat schematic sistemul de curent alternativ trifazat cu şase conductori. Fiecare din înfăşurările bobinelor I, II şi III ale generatorului sînt legate cu cîte o parte separată de sarcină la consumator. Înfăşurările fazelor nu sînt legate electric între ele. De aceea toate dezavantajele care se produc în circuitul uneia din faze nu împiedică funcţionarea celorlalte două faze. Conform legii lui Ohm intensitatea într-o înfăşurare depinde de tensiunea aplicată la capetele înfăşurării fazei U_f şi de rezistenţa totală a circuitului electric al acestei faze R_f, adică $I_f = \frac{U_f}{R_f}$.

Acest sistem are numai o importanţă teoretică şi nu se foloseşte în practică.

În fig. 2 este reprezentat schematic sistemul de curent trifazat cu patru conductori. Aici generatorul este legat de consumator prin intermediul a patru conductori. Comparînd această figură cu fig. 1, constatăm că aici cei trei conductori de întoarcere sînt întruniţi într-unul singur. Prin urmare, prin conductorul comun circulă curentul I_0, egal cu suma geometrică a celor trei curenţi monofazaţi-($I_1 + I_2 + I_3$). Acest conductor se numeşte fir neutru, iar punctele în care se leagă firul neutru la generator şi la consumator se numesc puncte neutre sau puncte de nul. Ceilalţi conductori se numesc conductori de linie. Diferenţa de potenţial dintre conductorii de linie şi conductorul neutru se numeşte tensiune de fază, iar diferenţa de potenţial între doi conductori de linie se numeşte tensiune de linie.



F.g. 1

În cazul sarcinii neuniforme a sistemului trifazat firul neutru permite să se evite repartiţia neuniformă a tensiunii la consumator. De aceea în reţelele

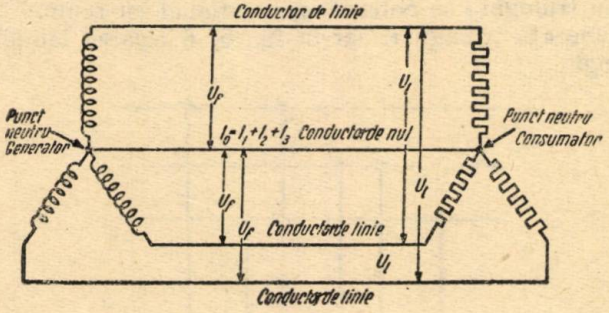
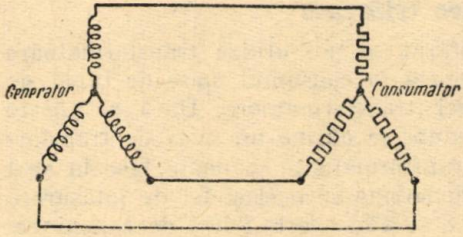


Fig. 2

de iluminat şi în general în toate reţelele de sarcină neuniformă se prevede de regulă firul neu ru. Se poate ivi însă şi cazul cînd sarcina este uniformă în cele trei faze ale consumatorului. Aşa este cazul, cînd însuşi consumatorul trifazat are rezistenţe egale în fiecare fază (m toare trifazate de curent alternativ, transforma oare trifazate etc.). Dacă facem suma intensităţilor din firul neutru, ţinînd seamă de sensul sinusoidei, vedem că această sumă este 0. Prin urmare, firul neutru nu este necesar în acest caz: generatorul este legat de consumator prin trei fire, după cum se vede în fig. 3.



F g. 3

Conexiunile „în stea" şi „în triunghi"

Legarea înfăşurărilor trifazate ale generatorului sau ale rezistenţelor consumatorului, cînd sfîrşiturile fazelor sînt legate într-un punct neutru comun, iar

începuturile libere — la conductorii de linie, se numeşte conexiune « în stea » şi se notează convenţional cu semnul *Y*. Astfel în fig. 2 şi 3 înfăşurările sînt legate în stea.

Conexiune « în triunghi » se numeşte aceea în care sfîrşitul primei faze se leagă de începutul celei de-a doua, sfîrşitul fazei a doua se leagă de înce-

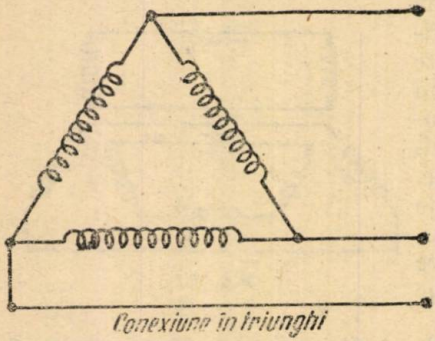


Fig. 4

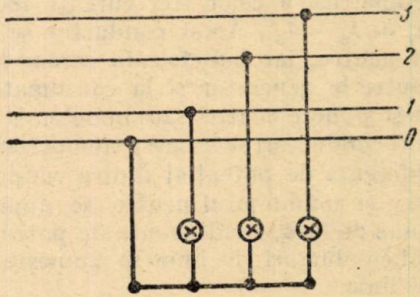


Fig. 5

putul fazei a treia şi sfîrşitul celei de a treia se leagă de începutul primei faze. Conexiunea « în triunghi » se notează convenţional cu semnul Δ. În fig. 4 se vede o conexiune « în triunghi », iar în fig. 5, 6 legarea lămpilor electrice în stea şi în triunghi.

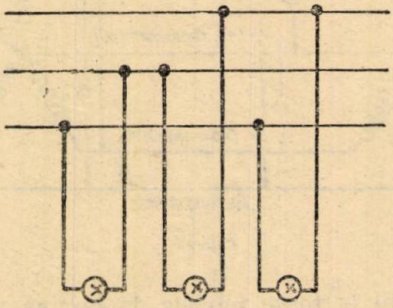


Fig. 6

Transformatoare trifazate

Pentru transformarea curentului trifazat se pot utiliza transformatoare monofazate. Neajunsul acestui montaj constă în consumul mare de tablă de transformator pentru miezurile celor trei transformatoare. Dacă se uneşte fierul celor trei miezuri într-un miez comun, se obţine un miez de transformator trifazat. Legarea înfăşurărilor în transformatoare se poate face în stea sau în triunghi. Există cazuri cînd ambele bobine au acelaşi fel de înfăşurare şi cazuri, cînd ele diferă. În figurile 7 şi 8 se văd aceste feluri de conexiune. Semnele din stînga arată ce fel de conexiune s-a întrebuinţat.

Motoare asincrone

1) *Motorul asincron cu rotor în scurtcircuit.* — Pe partea staţionară a motorului (stator) se aşează înfăşurarea trifazată, din trei înfăşurări, alimentată cu curent trifazat. Partea rotitoare (rotorul) se execută din tole de ta ă pent.u dinam. În crestăturile rotorului se aşează bare de cupru sau de aluminiu

presat. La ambele capete barele se lipesc la inele de cupru sau de aluminiu. Datorită formei sale înfăşurarea se numeşte « în colivie de veveriţă». La trecerea curentului trifazat prin stator se produce cîmpul magnetic învîrtitor, care induce curenţi în rotor.

Curenţii care iau naştere în înfăşurarea rotorului intră în acţiune cu cîmpul magnetic învîrtitor al statorului şi rotorul începe să se rotească în sensul de rotaţie al cîmpului. Pe măsură ce rotorul se pune în mişcare, viteza lui de rotaţie creşte, frecvenţa de intersectare a lui de către cîmpul magnetic învîrtitor al statorului se micşorează, iar curenţii în înfăşurarea

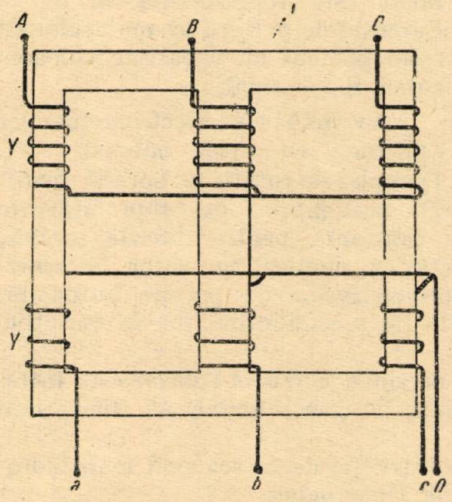


Fig. 7

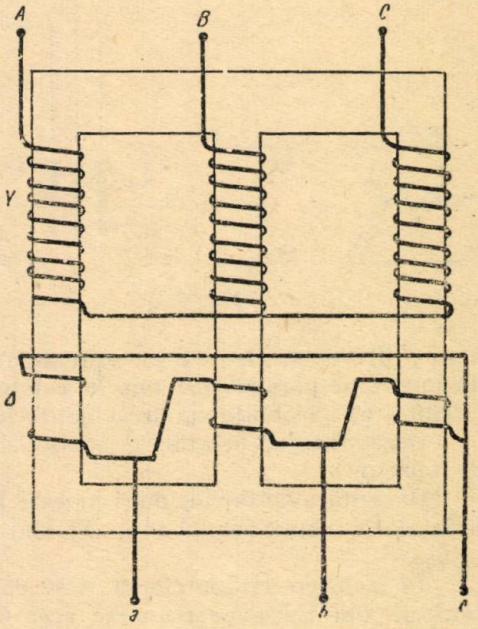


Fig. 8

rotorului se micşorează. Este absolut evident că în mişcarea sa de rotaţie rotorul nu poate ajunge cîmpul magnetic învîrtitor al statorului. Dacă presupunem că rotorul face acelaşi număr de rotaţii ca şi cîmpul magnetic învîrtitor al statorului, înseamnă că dispar curenţii din înfăşurarea rotorului. Cu dispariţia curenţilor din înfăşurarea rotorului încetează acţiunea reciprocă dintre aceşti curenţi şi cîmpul statorului, iar rotorul începe să se rotească mai încet decît cîmpul învîrtitor al statorului. În acest caz el este din nou interesectat de cîmpul învîrtitor al statorului şi asupra rotorului acţionează din nou cuplul de rotaţie. Prin urmare, în rotaţia sa rotorul trebuie totdeauna să rămînă în urmă faţă de cîmpul magnetic învîrtitor al statorului, adică rotorul nu se învîrteşte în tact cu cîmpul, ci asincron, din care cauză aceste motoare au căpătat denumirea de asincrone.

Avantajele acestor motoare sînt:

1) viteză de rotaţie aproximativ constantă pentru diferite încărcări; 2) posibilitate de supraîncărcare mare; 3) construcţie simplă; 4) pornire simplă şi posibilitate de automatizare a pornirii.

Dezavantajele lor sînt: 1) reglajul dificil al vitezei de rotaţie; 2) curent de pornire mare (de 5—7 ori mai mare decît acela pe care îl consumă în sarcina normală); 3) sensibilitate la variaţiile tensiunii.

2) *Motorul asincron cu rotor bobinat.* — Diferența dintre construcția motorului cu rotor în scurt circuit și motorul cu rotor bobinat constă numai în construcția rotorului. Electromotorul cu rotor bobinat are un rotor, în care, ca și în stator, se găsesc trei înfășurări de fază, legate între ele «în stea», mai rar «în triunghi». Capetele înfășurărilor de fază ale rotorului se leagă la trei inele de cupru, fixate pe axul rotorului și izolate atît între ele, cît și de axul rotorului. Înainte de pornire, pe inelele de contact se așază perii de cărbune, care sînt legate la reostatul de pornire. Schema electromotorului asincron cu rotor bobinat este reprezentată în fig. 9. Curentul de pornire al motorului cu rotor bobinat nu depășește valoarea curentului normal.

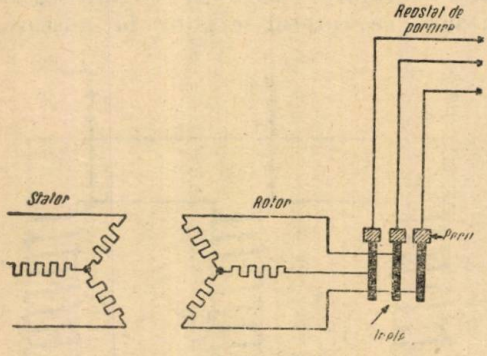


Fig. 9

Avantajele electromotoarelor asincrone cu rotor bobinat sînt: 1) cuplul de rotație la pornire mare; 2) posibilitate de supraîncărcare mare; 3) viteză de rotație aproximativ constantă pentru diferite sarcini; 4) curent de pornire mai mic în comparație cu motorul cu rotor în scurt-circuit; 5) posibilitatea întrebuințării dispozitivelor de pornire automată.

Dezavantajul acestor motoare constă în sensibilitatea lor la variațiile de tensiune.

Datorită avantajelor mari pe care le prezintă, curentul trifazat este întrebuințat în momentul de față cel mai mult, iar generatoarele au dimensiuni uriașe.

În încheiere citām cîteva date de construcție de la cea mai mare hidrocentrală din Europa, și anume acea de la Dneproghes.

Hidroalternatoarele au următoarele caracteristici: sînt verticale, au o putere de 90 000 kVA. Excitația se face printr-o excitatoare pe același arbore, cu putere de 500 kW, 350 V. Răcirea se face cu aer în circuit închis. Aerul este răcit cu răcitoare cu apă.

În cazul unui început de incendiu, admisia aerului în mașină este oprită automat și se introduce bioxid de carbon care stinge focul. Diametrul rotorului alternatorului este de 10,2 m; greutatea alternatorului este de 980 t; greutatea rotorului alternatorului și a rotorului turbinei este de 1100 t. În uzina Dneproghes sînt instalate nouă unități de acest fel.

OBSERVĂRI ASUPRA UNOR PROBLEME DE NATAȚIE

Prof. univ. RADU BĂDESCU

ACTIVITATEA în sezonul de sporturi nautice, pregătită cu multă grijă de către toate asociațiile sportive, ne face să observăm că și latura de securitate a celor ce practică aceste sporturi nu trebuie neglijată. Cele cîteva accidente din fiecare sezon arată cît de puțin cunoscute de marele public sînt unele proprietăți fizice ale corpului omenesc în legătură cu înotul. Marea majoritate a oamenilor crede că omul care nu știe să înoate «se duce ca toporul la fund»

şi că, odată căzut în apă, inevitabil trebuie să se înece dacă nu-l scapă nimeni. Această părere este cu siguranţă cauza atîtor accidente mortale, cei căzuţi intrînd într-o panică teribilă, care îi face să înghită apă şi deci să înlocuiască aerul din stomac şi plămîni, prin apă. Atunci evident, corpul devine mai greu decît volumul apei dezlocuite şi, în afară de faptul că nu suportă apa în plămîni, omul nu mai ajunge să iasă la suprafaţă, chiar prin mişcări mai mult sau mai puţin puternice executate cu mîinile şi picioarele.

Dacă cineva vrea să înveţe înotul, el trebuie întîi să observe comportarea broaştei în apă, mai ales felul cum pluteşte ea de multe ori, *poziţia corpului fiind aproape verticală* şi cu membrele complet imobile. În această poziţie cele patru labe sînt destul de depărtate de corp, iar capul iese aproape jumătate din apă, şi anume, partea cu botul şi ochii. Ajutată fiind şi de saci aerieni, ea poate sta astfel ore întregi în apă, fără a face nici o mişcare vizibilă în afara respiraţiei, care nu-i modifică aproape de loc linia de plutire.

La fel se întîmplă şi cu omul normal conformat; în poziţie verticală, cu mîinile aproape imobile şi depărtate de corp astfel ca centrul lui de greutate să fie cît mai jos posibil, fără însă a-i modifica poziţia verticală, *capul rămîne cam o jumătate afară din apă dacă omul ridică gura în sus ca să respire. Linia de plutire rămîne sub gură şi urechi dacă omul nu respiră adînc şi nu face nici o mişcare mai amplă care să-i modifice poziţia verticală.* În apa liniştită, imitînd poziţia de repaus a broaştei, omul poate sta ore întregi nemişcat; din cînd în cînd va căuta — prin mişcări uşoare ale mîinilor — să se menţină în poziţia verticală căci apa tinde să-l aducă în poziţie orizontală.

Bunii înotători cunosc această proprietate, iar cei ce joacă polo pe apă ştiu că mergînd în poziţie verticală, adică după expresia consacrată, *călcînd* apa, reuşesc să-şi menţină capul întreg afară din apă sau chiar o jumătate din tors, dacă dau mai puternic din picioare. În felul acesta ei au mîinile libere pentru a putea prinde şi azvîrli balonul.

Dacă însă dau din ce în ce mai rar din picioare, respirînd cît mai uşor, ajung să plutească în poziţie verticală, adică tocmai în poziţia pe care o are broasca în repaus. Majoritatea înotătorilor care nu vîră capul sub apă, nu cunosc însă acest lucru, căci ei nu au încercat să încetinească ritmul cu care picioarele calcă apa, ci au oprit brusc mişcările lor. În aceste condiţii corpul tinde să cadă pe verticală căci este situat deasupra poziţiei de plutire şi atunci inotătorul, de frica apei, începe să dea din mîini astfel că nu mai poate ajunge în repaus. De aici toţi trag concluzia greşită că omul nu poate pluti în apă ca broasca, în poziţie verticală. În poziţie orizontală, făcînd pluta, unii oameni se pot salva de la înec chiar dacă nu ştiu să înoate, însă trebuie oarecare experienţă şi curaj, — un calm pe care cei căzuţi în apă, în general nu-l au, — pentru ca să ajungă în această poziţie, impresia dominantă fiind că apa îi răstoarnă cu capul în jos.

Pentru a ne da seama de ce nu se cunoaşte o proprietate atît de importantă a corpului omenesc şi mai ales, pentru a vedea ce este de făcut cînd cineva, căzut în apă şi neştiind să înoate, trebuie să se salveze cu propriile lui mijloace, vom analiza mişcarea unui corp greu într-un lichid, tratînd numai cazul cînd acesta se deplasează pe verticală.

Se ştie din Fizica predată în liceu, că un corp solid cufundat într-un lichid este supus în ultimă analiză acţiunii a două forţe: greutatea P a corpului aplicată în centrul lui de greutate G şi forţa F datorită apăsării lichidului asupra corpului. Această ultimă forţă este aplicată într-un punct M, centrul de presiune, şi e dirijată tot după verticala locului ca şi greutatea P, însă

în sens contrar. Nu se ţine seamă aici de presiunea atmosferică exercitată asupra părţii corpului care iese din apă ca fiind prea mică, precum şi de alte forţe neglijabile în problema noastră.

Trei cazuri se pot prezenta şi ele sînt indicate în fig. 1. Se vede imediat că în primele două cazuri, cînd M şi G nu sînt situate pe aceiaşi verticală, apare un cuplu de forţe care tinde să rotească corpul în sensul indicat de către săgeţi, iar în caz cînd cele două forţe P şi F sînt direct opuse, rotaţia nu mai există, corpul rămînînd în echilibru sau deplasîndu-se după verticală, în sus sau în jos.

Un exemplu simplu este dat de lactometrul cu care se controlează laptele (fig. 2). Acest aparat este construit schematic dintr-un tub de sticlă

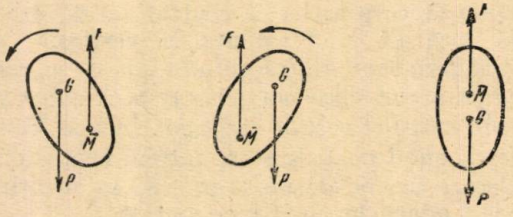


Fig. 1

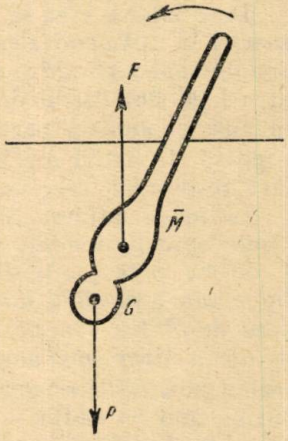


Fig. 2

ce are la un capăt o bilă de metal mult mai grea decît tubul; centrul de greutate al întregului corp este situat deci în interiorul bilei astfel ca aparatul, odată pus în lapte, să ia o poziţie verticală de echilibru stabil cu o mică porţiune de tub ieşind din lichid. Dacă se deplasează cu degetul capătul acestui tub şi apoi se lasă liber, corpul lactometrului revine către poziţia verticală executînd o mişcare de rotaţie la fel ca şi în primele două ca uri di fig. 1.

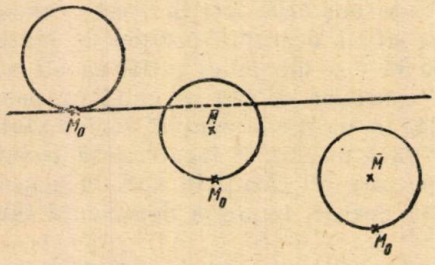


Fig. 3

La om, centrul de greutate G este situat cam la 10—15 cm sub capătul de jos al sternului. Ce se petrece însă cu centrul de presiune M? Se ştie din Fizica experimentală că, scufundînd progresiv corpul în lic id, centrul de presiune M se urcă *faţă de corp* de la punctul de tangenţă M_0 şi tinde apoi într-un anumit mod pînă la o poziţie $\overline{M}$, care corespunde scufundării complete a lui (fig. 3). Atunci, dacă punctele M şi G (fig. 1) sînt situate pe aceiaşi verticală, se vor putea prezenta trei cazuri: cazul *echilibrului stabil*, cînd G este sub M, adică tocmai cazul lactometrului, cazul *echilibrului nestabil*, G fiind deasupra lui M, cînd punem lactometrul în poziţie verticală cu bila în sus, poziţie în care el nu poate să rămînă căci se răstoarnă imediat tinzînd către poziţia stabilă, şi cazul *echilibrului indiferent*, cînd corpul rămîne în echilibru, oricare ar fi poziţia lui, M coincizînd cu G.

Broasca, stînd ore întregi imobilă, are o poziţie de echilibru stab l, de unde rezultă că punctul G este situat sub M. Prin depărtarea picioarelor de

corp, G se ridică în sus, dar se ridică și M, proprietate ce poate fi ușor verificată și la om de către un bun înotător. Acesta își dă seama prin cîteva încercări că există o poziție optimă, analoagă cu aceea de la broască, pentru care capul iese cel mai mult din apă și în care el se poate odihni.

Să mai analizăm sumar și căderea în apă pe verticală a unui corp greu presupunînd că acesta nu se rotește în jurul centrului lui de greutate G, și că, la începutul căderii, așa numitul *moment inițial*, corpul a căzut liber fără să fi fost zvîrlit în apă, adică fără viteză inițială. Să mai desemnăm prin P_e poziția de echilibru a corpului cînd forțele F și P sînt egale și direct opuse, corpul fiind în echilibru stabil dacă ar fi pus direct în această poziție, adică tocmai poziția de plutire a omului în apă *).

În aceste condiții, întregul corp are aproximativ o *mișcare oscilatorie amortizată* pe verticală, mișcare ce depinde de poziția P_0 de la care a căzut la început corpul în apă, așa zisa *poziție inițială*. Să explicăm cum se prezintă o asemnea mișcare, urmărind numai deplasarea centrului G de greutate, căci pe noi ne interesează în primul rînd, mișcarea de translație pe verticală a corpului și nu mișcarea de rotație în jurul centrului de greutate.

Corpul pleacă din poziția inițială P_0 căreia îi corespunde poziția G_0 a lui G, poziție pe care o vom presupune situată deasupra lui G_e, coboară trecînd prin G_e cu o anumită viteză care nu-l lasă să se oprească în acest punct, se oprește într-un punct G_1 situat sub G_e în care forța P este mai mică decît forța F și se întoarce spre G_e trecînd iarăși prin acest punct cu o viteză care nu-l lasă să se oprească. Corpul se urcă apoi pînă la o poziție P_2 al cărei centru de greutate G_2 este situat deasupra lui G_e, însă nu așa depărtată de G_e ca G_0, și reia căderea de sus în jos, coborînd pînă la un punct G_3 situat sub G_e, însă deasupra lui G_1, unde se oprește. Urcarea se face acum pînă la un punct G_4 situat sub G_2 cînd corpul, oprindu-se pe loc, reia mișcarea oscilatorie amortizată (fig. 4). Această mișcare este oscilatorie pentru că punctul G trece cînd deasupra, cînd dedesubtul poziției de echilibru, fără a se putea opri în această poziție, și este *amortizată* pentru că pozițiile extreme în care se oprește sînt din ce în ce mai apropiate de poziția de echilibru static.

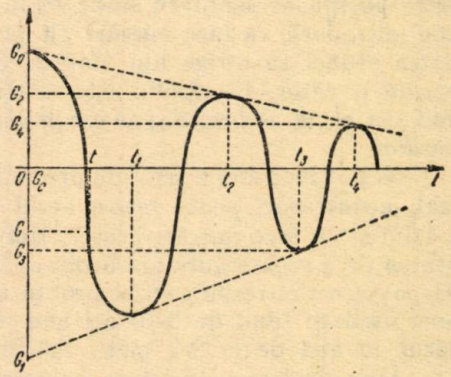


Fig. 4

Pentru cei familiarizați cu diagramele, dacă luăm în ordonată distanțele de la G_e ales ca origină, la diferitele poziții ale lui G, și în abscisă timpurile corespunzătoare trecerii lui G în aceste poziții, vom obține curba-diagramă din fig. 4 cu ajutorul căreia se urmărește foarte ușor mișcarea. Astfel, la un timp oarecare t corespunde pe curba diagramă un punct M și o poziție precisă a lui G pe traiectoria acestui punct, —verticala OG—, poziție obținută ducînd prin M o paralelă la axa Ot pînă întîlnește în G această traiectorie.

Oscilațiile se fac deci, în jurul lui G_e și diversele poziții extreme ale lui G, adică G_1, G_2, G_3, G_4, ... tind destul de repede către acest punct G_e.

*) Nu studiem decît cazul corespunzător căderii omului cu picioarele în jos și nu cu capul în jos.

O caracteristică foarte importantă a acestei mișcări este că centrul de greutate G al corpului trebuie să vină periodic deasupra lui G_e și a doua, că el se urcă cu atît mai sus deasupra lui G_e cu cît corpul a căzut de la o înălțime mai mare OG_0.

La cele expuse ar trebui să adăugăm și studiul mișcării corpului în jurul centrului lui de greutate, însă acesta este mult mai complicat și nu are o prea mare importanță în concluziile pe care le vom trage la sfîrșit. Esențialul este ca omul, prin diferite mișcări ale mîinilor și picioarelor, și în special încercînd să meargă în apă,—odată căzut în apă—să facă tot posibilul ca *să-și mențină poziția verticală*, ceea ce este foarte ușor. Acest lucru este desigur mai greu dacă apa este curgătoare sau dacă omul a căzut cu capul în jos. Nu este bine să facă plonjon dacă nu o cunoaște dinainte, căci apa poate să-l ducă ușor cu capul în jos.

Din tot acest studiu rezultă că omul se înecă numai din vina sa, căci apucat de o spaimă teribilă el înghite apă, ceea ce are ca rezultat modificarea poziției de echilibru static P_e, astfel că nu mai vine decît cu greu deasupra apei și se înecă.

În rezumat, un om care cade în apă trebuie să știe că:

1) apa îl aduce periodic cu gura deasupra nivelului ei dacă se menține în poziție verticală,

2) poate expira aerul din plămîni cînd este cu gura în apă, dar nu trebuie să inspire aer decît în momentul cînd gura a ajuns afară,

3) să facă tot posibilul *să nu înghită de loc apă pentru a nu-și îngreuna corpul*,

4) să dea *ușor* din mîini pentru a-și menține poziția verticală, *dar nu pentru a ajunge cît mai iute la suprafață*, căci atunci oscilațiile devin prea mari și respirația lui se precipită, riscînd astfel să înghită apă. **Lăsîndu-se în voia apei și stînd liniștit în poziție verticală** — ceea ce este desigur, greu de realizat fără un efort disperat de voință — **corpul lui va tinde destul de repede către poziția de echilibru static P_e în jurul căreia va avea oscilații din ce în ce mai mici, dacă va face mișcări cît mai puține și va respira cît mai ușor.** Va putea atunci să strige din cînd în cînd după ajutor pînă ce va fi auzit de vre-un tr cător. Esențialul este să știe că, *dacă respectă cu strictețe cele spuse mai sus, el nu se înecă și că are posibilitatea să fie salvat după cîtva timp și nu imediat.*

Se pot face aici o serie de obiecții, întîi în privința respirației. Un om normal, neantrenat, poate reține aerul în plămîni pînă la 40-50 secunde, dacă e calm și nu face mișcări brusce, timp prea suficient pentru ca să aibă posibilitatea de a scoate gura afară din apă în cursul uneia sau mai multor oscilații. El poate astfel respira cu siguranță ori de cîte ori iese deasupra apei, durata unei oscilații fiind de 8-10 ori mai mică (circa 5-6 secunde), pentru un om căzut în apă de la 2-3 metri înălțime.

Altă obiecție în privința hainelor care îl stînjenesc în mișcări. După cele spuse mai sus, omul nu trebuie să facă aproape nici o mișcare astfel că obiecția cade, mai ales că hainele, avînd greutatea specifică mai mică decît a apei, chiar îmbibate cu apă, îl vor ajuta la plutire.

Considerațiile care au făcut obiectul acestui articol pot fi verificate de către toți bunii înotători și ele au fost expuse aici numai pentru a ajuta pe cei care printr-un accident s-au văzut în situația de a nu avea un ajutor imediat de la țărm. *Aceasta nu înseamnă însă că un om care nu știe să înoate poate să facă singur experiența, aruncîndu-se fără nici o grijă în apă.* Ar fi o adevărată prostie,

căci o încercare de acest fel prezintă nenumărate pericole cărora chiar un înotător mijlociu nu le poate face față, cum ar fi de pildă, panica de apă combinată cu frica de necunoscut, neprevăzut, care s-ar putea prezenta, sau teama de a fi răsturnat cu capul în jos etc. Mișcările de rotație în jurul centrului de greutate G al corpului contribuie și ele la cauzarea unei panici greu de dominat; aceste mișcări, destul de lente cînd corpul este vertical, pot fi ușor stăpînite dacă omul dă încet din mîini în același sens în care corpul tinde să avanseze, sau dacă încearcă să *umble* în apă, *să calce apa*, cum se spune în mod curent. Însă, repet, prin deplasări extrem de încete ale picioarelor!

În esență, *un om căzut în apă trebuie să caute la început, să ajungă în poziție verticală*, dînd ușor din mîini și din picioare ca și cum ar merge extrem de încet, *să ridice gura în sus astfel ca fața să fie aproape orizontală și să încerce să inspire aer numai cînd gura a ieșit la suprafață pentru a nu înghiți de loc apă.* El **se va lăsa în voia apei știind că aceasta trebuie să-l aducă la suprafață de mai multe ori pentru a putea respira,** avînd numai grija de a rămîne mereu în poziție verticală.

Credem că ar fi extrem de util ca toate aceste cunoștințe, precum și concluziile trase, să fie pe larg difuzate la cursurile de Fizică din licee, pentru a se combate ideile greșite pe care le au mulți oameni în legătură cu înotul.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

(UNDE E GREȘEALA?)

A. HOLLINGER, profesor emerit al R.P.R.

1. **Oblica este mai scurtă decît perpendiculara!** Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel cu cateta egală cu 1 m. Printr-un punct M al ipotenuzei se duce cîte o perpendiculară pe catete, formîndu-se un dreptunghi.

Să se determine distanța OM, știind că aria dreptunghiului este $\frac{1}{3}$ m^2.

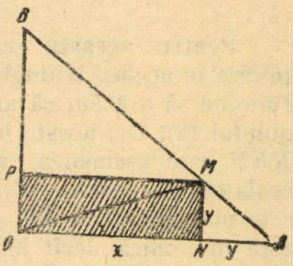


Fig. 1

Soluție. — Punem $ON = x$, $NM = y$. Triunghiul AMN este dreptunghic și isoscel căci are unghiul $A = 45°$, deci $NA = y$. Avem $ON + NA = OA = 1$, deci,

$$x + y = 1.$$

Se dă că $xy = \frac{1}{3}$.

Teorema lui Pitagora aplicată triunghiului OMN dă:

$$OM^2 = y^2 + x^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ ;\ OM = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rezultatul este evident greșit, căci OM este cel puțin egal cu perpendiculara coborîtă din O pe AB, a cărei lungime este $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$OM \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707,$$

iar rezultatul obținut este

$$OM = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 < 0{,}707.$$

Înseamnă că oblica OM este mai scurtă decît perpendiculara coborîtă din O pe AB.

Explicație. — Datele problemei sînt incompatibile între ele. Pentru a arăta aceasta, vom demonstra că dintre toate dreptunghiurile înscrise într-un triunghi dreptunghic isoscel, ca în figura alăturată, cel mai mare este patratul (care se obține unind mijlocul ipotenuzei cu mijloacele catetelor).

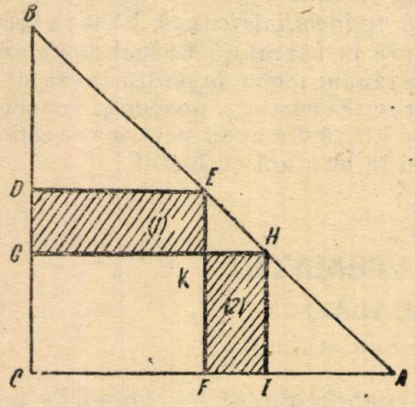


Fig. 2

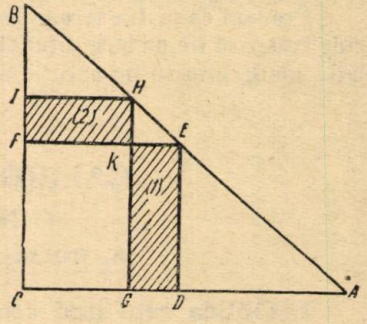


Fig. 3

Pentru aceasta, considerăm patratul $CDEF$ și un dreptunghi $CGHI$ înscris în același triunghi dreptunghic isoscel. Ele au o parte comună $CFKG$. Rămîne să arătăm că aria dreptunghiului (1) este mai mare ca aria dreptunghiului (2). Or, aceste dreptunghiuri au aceiași lățime, $KE = KH$ (triunghiul KEH este asemenea cu cel dat, deci tot dreptunghic și isoscel). Cît despre cealaltă dimensiune, DE este jumătate din cateta triunghiului dat, iar HI este mai mic decît EF, care este egal cu DE. Deci aria dreptunghiului $CGHI$ este mai mică decît aria patratului $CDEF$.

Fiecare din triunghiurile BDE și EFA este asemenea cu triunghiul dat, raportul de asemănare fiind 1 : 2. Rezultă că aria fiecăruia dintre aceste triunghiuri este un sfert din aria triunghiului inițial, ariile lor împreună fac cît jumătate din aria acestui triunghi, iar aria patratului înscris este cealaltă jumătate. Așa dar, aria unui dreptunghi înscris este cel mult egală cu jumătate din aria triunghiului dat.

În problema propusă, aria triunghiului este $\frac{1}{2}$, deci aria dreptunghiului înscris putea fi cel mult $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$, și s-a dat că aria dreptunghiului este $\frac{1}{3}$, care este $> \frac{1}{4}$. Un astfel de dreptunghi înscris nu există.

Cum se face că imposibilitatea n-a ieșit la iveală?

Sistemul de ecuaţii:

$$x + y = 1, \quad xy = \frac{1}{3}$$

ne arată că x şi y sînt rădăcinile ecuaţiei

$$3z^2 - 3z + 1 = 0,$$

care are rădăcini imaginare, deci dreptunghiul căutat nu există. Dar se obţin pentru x şi y numere imaginare conjugate, iar suma şi produsul a două numere imaginare conjugate sînt reale. Or, în artificiul întrebuinţat $[x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy]$, intervin numai suma şi produsul, de aceea se obţine pentru OM^2 o diferenţă de numere reale. În cazul nostru, această diferenţă a fost pozitivă, deci s-a obţinut pentru OM un număr real. Dacă se dădea pentru aria dreptunghiului un număr mai mare ca $\frac{1}{2}$, imposibilitatea ieşea la iveală.

2. **Partea poate fi egală cu întregul (!)** Considerăm un paralelogram cu laturile $AB=a$, $BC=b$ (fig. 4). Prelungim laturile lui cu segmentele $AE = a$, $CF = b$. Dreapta EF taie dreapta AB în G şi CB în H.

Triunghiul mare EDF este isoscel, căci $ED = a + b$, $DF = a + b$; rezultă că $\widehat{E} = \widehat{F}$. Dar $\widehat{F} = \widehat{1}$ ca unghiuri corespondente, deci $\widehat{E} = \widehat{1}$, de unde urmează că triunghiul EAG este isoscel, adică $AE = AG$. Dar, prin construcţie, $AE = AB$. Rezultă că

$$AB = AG,$$

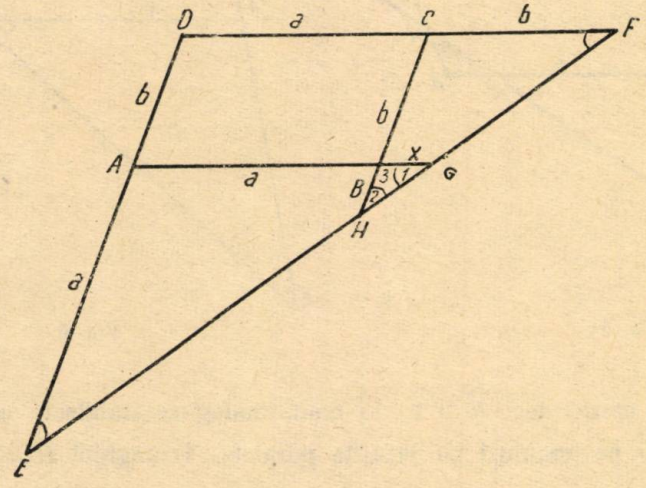


Fig. 4

adică segmentul AG este egal cu o parte din el, AB.

În mod analog se stabileşte că partea CB este egală cu întregul CH, prin şirul de egalităţi:

$$ED = DF\ (= a + b),\ \widehat{E} = \widehat{F},\ \widehat{E} = \widehat{2},\ \widehat{2} = \widehat{F},\ CF = CH,\ CB = CH.$$

În cazul cînd dreapta EF taie chiar laturile paralelogramului ca în fig. 5, raţionamentul se poate repeta cuvînt cu cuvînt şi se ajunge la concluzii (!) analo ge.

Explicaţie. — Dreapta EF nu taie nici laturile paralelogramului, nici prelungirile lor, ci trece prin B. Cu alte cuvinte, punctele E, B, F sînt în linie dreaptă.

Pentru a dovedi aceasta, nu ducem dreapta EF, ci unim B cu E şi cu F (fig. 6). Triunghiul de jos este isoscel , deci $\widehat{E} = \widehat{1}$; triunghiul din dreapta este de asemenea isoscel, deci $\widehat{F} = \widehat{2}$; în sfîrşit, $\widehat{D} = \widehat{3}$ ca unghiuri opuse ale paralelogramului. Triunghiul mare, EDF, dă

$$\widehat{E} + \widehat{D} + \widehat{F} = 180°.$$

Înlocuind aci $\widehat{E}$ prin $\widehat{1}$, $\widehat{D}$ prin $\widehat{3}$ şi $\widehat{F}$ prin $\widehat{2}$, obţinem

$$\widehat{1} + \widehat{3} + \widehat{2} = 180°,$$

ceea ce înseamnă că BF este în prelungirea lui BE.

3. **Suma unghiurilor unui triunghi poate fi mai mică decît 180° (!).** Reluăm figura 4. În triunghiul EAG, $AG > AE$, căci AG este mai mare ca baza paralelogramului, iar AE este egal cu baza. Laturii mai mari i se opune

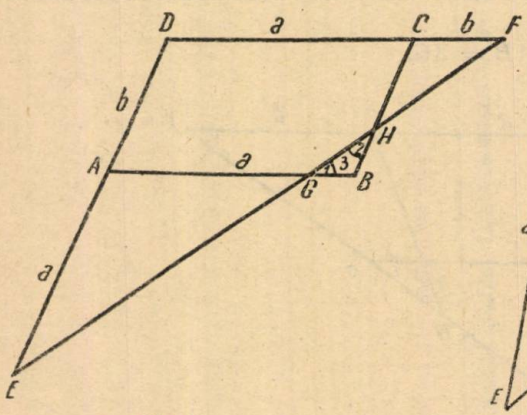


Fig. 5

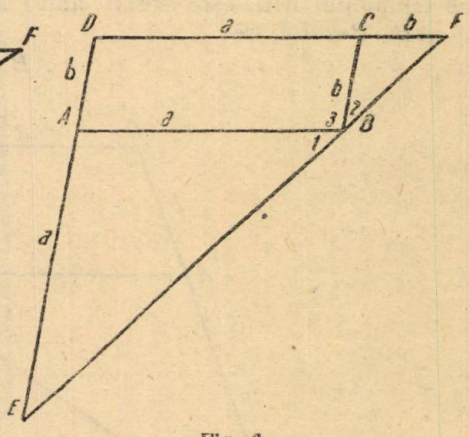


Fig. 6

unghiul mai mare, deci $\widehat{E} > \widehat{1}$. În mod analog se stabileşte că $\widehat{F} > \widehat{2}$. În sfîrşit, $\widehat{3} = \widehat{D}$ ca unghiuri cu laturile paralele. Triunghiul EDF dă:

$$\widehat{E} + \widehat{D} + \widehat{F} = 180°.$$

Dacă înlocuim aici $\widehat{E}$ prin $\widehat{1}$, care este mai mic ca el, $\widehat{F}$ prin $\widehat{2}$, care este de asemenea mai mic ca el şi $\widehat{D}$ prin $\widehat{3}$, care este egal cu el, obţinem:

$$\widehat{1} + \widehat{3} + \widehat{2} < 180°.$$

Deci, în triunghiul GBH suma unghiurilor este mai mică ca 180°. Explicația s-a dat mai sus: triunghiul BGH nu există.

4. Perimetrul unui paralelogram este egal cu zero (!)
În figura 4, avem

$$\Delta EAG \sim \Delta EDF,$$

deci,
$$\frac{AG}{DF} = \frac{EA}{ED} \quad \text{adică} \quad \frac{a+x}{a+b} = \frac{a}{a+b}.$$

Scriind că produsul mezilor este egal cu produsul extremilor, obținem pe rînd

$$a^2 + ax + ab + bx = a^2 + ab,$$
$$ax + bx = 0 \quad , \quad x(a+b) = 0.$$

Simplificînd cu x obținem $a + b = 0$, ceeace înseamnă că perimetrul paralelogramului este nul.

Explicația este ace aşi ca mai înainte: se pornește de la o figură greșită. Greșala se descoperă uşor chiar în proporția

$$\frac{a+x}{a+b} = \frac{a}{a+b}.$$

Cele două fracții avînd acelaş numitor, numărătorii lor trebuie să fie egali; deci $a + x = a$, de unde $x = 0$. Aceasta înseamnă că G coincide cu B. Pe de altă parte, simplificarea de la urmă nu este permisă. Din

$$x(a+b) = 0$$

urmează că măcar unul din factorii x şi $a + b$ este nul. Factorul $a + b$ nu este nul, deci $x = 0$.

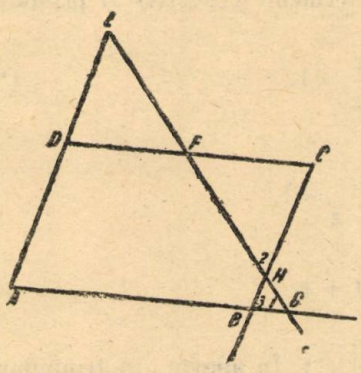


Fig. 7

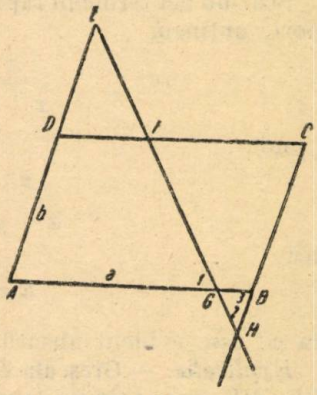


Fig. 8

Observație. — Toate raționamentele se pot face şi pe figura 7 sau 8 în care, pornind de la paralelogramul $ABCD$ cu laturile $AB = a$, $AD = b$, se face $AE = a$, $CF = b$. Ambele figuri sînt greșite. De fapt, punctele E, F, B sînt pe ace aşi dreaptă.

5. **Partea este egală cu întregul !** Fie M și N mijloacele a două laturi opuse ale unui paralelogram, iar E și F punctele în care dreptele AM, NC taie diagonala BD. Fie x, y, z segmentele determinate pe diagonală. Se vede ușor că

$$\Delta\, DEM = \Delta\, NFB \qquad \text{și} \qquad \Delta\, AED = \Delta\, CFB$$

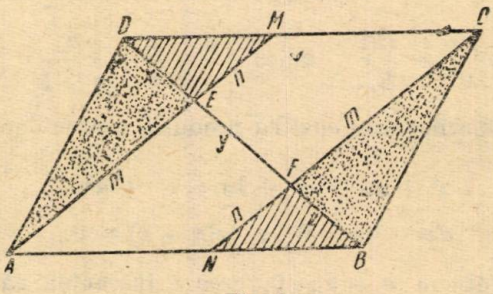


Fig. 9

(ele au cîte o latură și unghiurile alăturate ei egale), așa că putem nota segmentele AE și CF cu aceiași literă m, și segmentele EM și FN, cu n. Avem:

$$\Delta\, DEM \sim \Delta\, DFC, \qquad \text{deci} \qquad \frac{x}{x+y} = \frac{n}{m},$$

$$\Delta\, BFN \sim \Delta\, BEA, \qquad \text{deci} \qquad \frac{z}{y+z} = \frac{n}{m}.$$

Rezultă că:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{z}{y+z}.$$

Scăzînd aci termenii raportului al doilea din termenii respectivi ai primului raport, obținem

$$\frac{x}{x+y} = \frac{z}{y+z} = \frac{x-z}{x-z} = 1, \qquad (*)$$

de unde:

$$\frac{x}{x+y} = 1 \qquad \text{și} \qquad \frac{z}{y+z} = 1,$$

adică:

$$x = x + y, \qquad z = y + z,$$

ceea ce este evident absurd.

Explicație. — Greșeala este în rîndul marcat (*). În adevăr, în triunghiul ABE, NF trece prin mijlocul laturii AB și este paralelă cu AE, deci $y = z$. În același fel se dovedește, considerînd triunghiul DFC și dreapta EM, că $x = y$. Rezultă că $x = y = z$. Fiecare dintre rapoartele

$$\frac{x}{x+y}, \qquad \frac{z}{y+z}$$

are valoarea $\frac{1}{2}$; mai mult: aceste două rapoarte sînt identice, numărătorii lor sînt egali între ei, de asemenea şi numitorii. Făcînd scăderea se obţine raportul $\frac{x-z}{x-z}$ care este $\frac{0}{0}$, şi n-avem dreptul să afirmăm că are valoarea 1.

În general, fiind dată proporţia

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

putem afirma că:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

numai cîtă vreme $a \neq c$, $b \neq d$. Altfel, dăm peste forma $\frac{0}{0}$, care este lipsită de sens.

6. **Există un triunghi în care o latură este mai mare decît suma celorlalte două !** Un triunghi dreptunghic isoscel ABC este aşezat cu ipotenuza BC într-un plan P şi înclinat faţă de plan astfel încît proiecţia fiecărei catete să fie jumătate din ea.

Fie $AB = AC = a$, deci

$$BC = a\sqrt{2}.$$

Se dă că:

$$A'B = \frac{a}{2}, \qquad A'C = \frac{a}{2}.$$

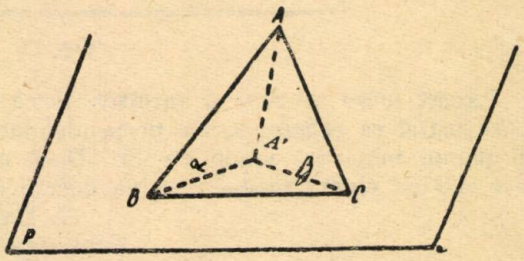


Fig. 10

Urmează că laturile triunghiului $A'BC$ sînt:

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\sqrt{2}.$$

Suma primelor două laturi este $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, iar latura a treia este $a\sqrt{2}$ $(> a)$.

Explicaţie. — Pentru ca $A'B$, proiecţia lui AB, să fie jumătate din AB, unghiul α trebuie să fie de 60°. Dintr-un motiv analog, $\beta = 60°$. Pe de altă parte, unghiul $ABC = 45°$, iar triunghiul nu poate fi aşezat în poziţia cerută căci, dacă o dreaptă taie un plan şi nu este perpendiculară pe el, unghiul pe care-l face cu proiecţia ei pe plan este mai mic decît unghiul pe care-l face cu orice altă dreaptă din plan.

În adevăr, fie AB (fig. 11) o dreaptă care taie planul P în B şi nu este perpendiculară pe el, AC — perpendiculara coborîtă din A pe planul P, BC — proiecţia lui AB pe plan, BD o dreaptă oarecare din planul P, AD — perpendiculara coborîtă din A pe dreapta BD, unghiul $ABC = \alpha$, unghiul $ABD = \beta$.

Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $CD \perp BD$, deci $BC > BD$. Dar,

$$BC = AB \cos \alpha, \qquad BD = AB \cos \beta,$$

deci,

$$AB\cos\alpha > AB\cos\beta, \qquad \cos\alpha > \cos\beta, \qquad \alpha < \beta.$$

În cazul din problemă însă, ar urma ca AB, care face cu BC un unghi de 45°, să facă cu proiecţia sa $A'B$ un unghi de 60°, mai mare ca 45°.

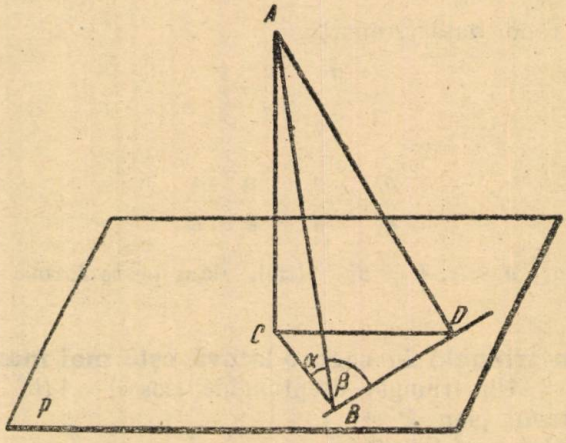


Fig. 11

Acest lucru se vede şi intuitiv. Dacă aşezăm un echer cu ipotenuza pe masă astfel ca echerul să fie perpendicular pe planul mesei, cateta AB face cu planul mesei un unghi de 45°. Dacă aplecăm echerul, unghiul pe care-l face AB cu planul scade şi nu va deveni niciodată de 60°.

7. Există un triunghi în care o latură este egală cu suma celorlalte două! Considerăm o piramidă triunghiulară în care muchiile laterale sînt de cîte 1 m, iar unghiurile de la vîrfuri ale feţelor laterale sînt de 30°, 90° şi de cîte 150°. Să calculăm laturile bazei.

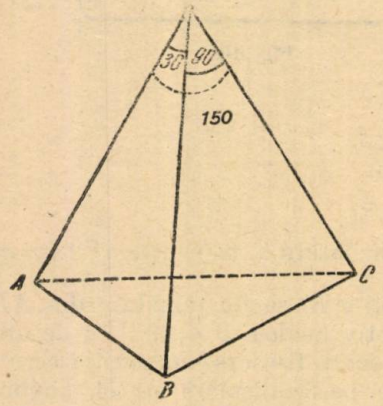


Fig. 12

Triunghiurile isoscele VAB, VBC, VCA dau:

$$AB = 2\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},$$

$$BC = 2\sin 45° = \sqrt{2},$$

$$CA = 2\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Se observă că

$$AB + BC = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},$$

adică tocmai cît CA.

Explicaţie. — O astfel de piramidă nu poate să existe. În adevăr, într-un triedru, o faţă trebuie să fie mai mică decît suma celorlalte două. În triedrul cu vîrful V însă, avem $90° + 30° = 120° < 150°$.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1716

Să se arate că oricare ar fi $n \geqslant 3$ *avem inegalitatea:*

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3\pi}{4n}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. — Deoarece $n \geqslant 3$, arcul $\frac{\pi}{n}$ e cuprins între $0°$ și $\frac{\pi}{3}$. Mărimea unui arc (în radiani), cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$, este mai mare decît sinusul și mai mică decît tangenta acestui arc, deci putem scrie:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2n}.$$

Înmulțim cu $2\cos^2\frac{\pi}{2n}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2n} \cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2n},$$

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{2n}. \tag{1}$$

Deoarece $n \geqslant 3$ avem

$$\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{6};\quad \cos\frac{\pi}{2n} \geqslant \cos\frac{\pi}{6};\quad \cos\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos^2\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Înlocuim în (1) pe $\cos^2\frac{\pi}{2n}$ prin valoarea mai mică sau cel mult egală cu $\frac{3}{4}$ și obținem:

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3\pi}{4n}.$$

Problema 1825

Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$(xy)^{\log z} + (xz)^{\log y} = a,$$
$$(yz)^{\log x} + (yx)^{\log z} = b,$$
$$(zx)^{\log y} + (zy)^{\log x} = c.$$

Cristea I. Ion, elev, Constanța

Soluție dată de **Stoian I. Gh.,** student, București. — Notăm: $(xy)^{\log z} = C$; $(yz)^{\log x} = A$; $(zx)^{\log y} = B$. În acest caz sistemul devine

$$B + C = a,$$
$$C + A = b,$$
$$A + B = c.$$

De aci rezultă:

$$A = \frac{1}{2}(b + c - a);\quad B = \frac{1}{2}(c + a - b);\quad C = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Din notațiile de mai sus rezultă:

$$\log x \log z + \log y \log z = \log C,$$
$$\log y \log x + \log y \log z = \log B,$$
$$\log x \log y + \log z \log x = \log A.$$

De aci rezultă:

$$\log x \log y = \frac{1}{2} \log \frac{AB}{C},$$
$$\log y \log z = \frac{1}{2} \log \frac{BC}{A},$$
$$\log z \log x = \frac{1}{2} \log \frac{CA}{B}.$$

Înmulțind ecuațiile acestui sistem și apoi împărțind cu fiecare ecuație în parte, obținem:

$$\log z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\log \frac{BC}{A} \cdot \log \frac{CA}{B}}{2 \log \frac{AB}{C}}},$$

$$\log y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\log \frac{AB}{C} \log \frac{BC}{A}}{2 \log \frac{CA}{B}}},$$

$$\log x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\log \frac{CA}{B} \log \frac{AB}{C}}{2 \log \frac{BC}{A}}}.$$

De aci rezultă valorile lui x, y, z, unde A, B, C au valorile stabilite mai sus.

Problema 1841

Știind că:

$$\frac{\sin (x + z)}{\sin (y - z)} = m; \quad \frac{\cos (x - z)}{\cos (y + z)} = n,$$

în care m și n sînt constante date, să se arate că:

$$\frac{\cos 2z}{\cos (x - y)} = \frac{m + n}{mn + 1}.$$

Soluție dată de **Murărescu Gh.**, elev, Roman. — Înlocuind pe m și n și făcînd calculele, ultima egalitate devine succesiv:

$$\frac{\cos 2z}{\sin (x - z)} = \frac{\sin (x + z) \cos (y + z) + \sin (y - z) \cos (x - z)}{\sin (x + z) \cos (x - z) + \sin (y - z) \cdot \cos (y + z)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[\sin (x + y + 2z) + \sin (x - y) + \sin (x + y - 2z) - \sin (x - y)]}{\frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 2z + \sin 2y - \sin 2z]} =$$

$$= \frac{\sin (x + y) \cos 2z}{\sin (x + y) \cos (x - y)} = \frac{\cos 2z}{\cos (x - y)}.$$

Problema 1901

1) *Dacă* $a + b + c = 0$ *atunci*:

$$ab + bc + ca = bc - a^2 = ca - b^2 = ab - c^2.$$

2) *Ca aplicație să se rezolve ecuațiile*:

$$8x^3 + 2(ab + bc + ca)x - abc = 0,$$

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{1}{3x}.$$

N. Mihăileanu

1) *Soluție* dată de **Gh. Stoian,** București, — Avem:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),$$

$$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = -\frac{1}{2}[(b + c)^2 + a^2 - 2bc] =$$

$$= -\frac{1}{2}[(-a)^2 + a^2 - 2bc] = bc - a^2.$$

Analog rezultă și celelalte două egalități.

2) Împărțind prima ecuație cu 8 obținem:

$$x^3 + \left(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)x - \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{2} = 0.$$

De aci rezultă:

$$x_1 = \frac{a}{2}\,; \quad x_2 = \frac{b}{2}\,; \quad x_3 = \frac{c}{2}.$$

Aducînd la același numitor a doua ecuație și ținînd seamă că $a + b + c = 0$, obținem:

$$8x^3 + 2(ab + bc + ca)x - abc = 0,$$

adică tocmai prima ecuație.

Problema 1932

Ce condiție trebuie să îndeplinească numerele a_i, b_i *ca să avem:*

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}.$$

Ștefan Musta, Oradea

Soluția 1. — Vom stabili condiția prin metoda inducției complecte.

Pentru $n = 1$ avem egalitatea evidentă:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}. \tag{1}$$

Pentru $n = 2$ avem:

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}. \tag{2}$$

Ridicînd de două ori la patrat găsim:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = 0$$

și de aici:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}. \tag{3}$$

Deci (2) există dacă a_1, a_2 sînt proporţionali cu b_1, b_2.

Pentru $n = 3$,

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2}. \qquad (3')$$

Notăm $a_1 + a_2 = x$; $b_1 + b_2 = y$ şi după cele de mai sus avem:

$$\sqrt{(x + a_3)^2 + (y + b_3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2}, \qquad (4)$$

dacă

$$\frac{x}{a_3} = \frac{y}{b_3} \quad \text{sau} \quad \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

şi ţinînd seama de (3) rezultă imediat

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \qquad (5)$$

şi $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$. Prin urmare (3') are loc cu condiţiile (5).

Din aproape în aproape să presupunem că:

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2},$$

dacă

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}. \qquad (6)$$

Atunci notînd $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = x$; $b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = y$, avem:

$$\sqrt{(x + a_n)^2 + (y + b_n)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

dacă

$$\frac{x}{a_n} = \frac{y}{b_n} \quad \text{sau} \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{b_2 + b_2 + \ldots + b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Comparînd cu (6) rezultă:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n}.$$

În concluzie: relaţia dată are loc dacă a_i sînt proporţionali cu b_i unde $i = (1, 2, 3, \ldots, n)$.

Soluţia 2. — Dacă luăm vectorii $\overline{V}_k$ corespunzători numerelor complexe $a_k + ib_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, suma acestor vectori dă:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 + \ldots + \overline{V}_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\, i.$$

Modulul sumei este $\sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}$.

Aceasta va fi egală cu suma modulelor $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, dacă vectorii V_k sînt colineari, adică,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Problema 1936

Se dă sistemul de ecuații:

$$\frac{x}{\sin z} = \frac{a}{\sin 2z} = \frac{y}{\sin 3z},$$

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x+y} = \frac{y}{(x+y)\cos z + a\cos 2z}.$$

Să se arate că este compatibil și să se rezolve.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. — Notăm cu λ valoarea comună a rapoartelor:

$$\frac{x}{\sin z} = \frac{a}{\sin 2z} = \frac{y}{\sin 3z} = \lambda,$$

$x = \lambda \sin z$; $y = \lambda \sin 3z$; $a = \lambda \sin 2z$. Avem, $x + y = 2\lambda \sin 2z \cos z$.
Înlocuim în celelalte două egalități și găsim:

$$\frac{\sin z}{\sin 2z} = \frac{\sin 2z}{2 \sin 2z \cos z} = \frac{\sin 3z}{\sin 2z\,(2\cos^2 z + \cos 2z)},$$

care e în adevăr o identitate căci:

$$\frac{\sin z}{\sin 2z} = \frac{1}{2\cos z}; \quad \frac{\sin 2z}{2 \sin 2z \cos z} = \frac{1}{2\cos z},$$

$$\frac{\sin 3z}{\sin 2z\,(2\cos^2 z + \cos 2z)} = \frac{\sin z\,(3\cos^2 z - \sin^2 z)}{2 \sin z \cos z\,(3\cos^2 z - \sin^2 z)} = \frac{1}{2\cos z}.$$

De aci rezultă că sistemul nostru e compatibil și soluțiile sale sînt:

$x = \lambda \sin z$; $y = \lambda \sin 3z$; $a = \lambda \sin 2z$, de unde:

$$\sin 2z = \frac{a}{\lambda}, \quad \text{iar} \quad |\lambda| > |a|;$$

de aci, $z = \frac{1}{2} \arcsin \frac{a}{\lambda}$, unde $|\lambda| > |a|$; $x = \lambda \sin z$ și $\sin 2z = \frac{a}{\lambda}$,

deci, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\lambda + a} - \sqrt{\lambda - a})$, iar $y = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}(\sqrt{\lambda + a} - \sqrt{\lambda - a})\,(2\sqrt{\lambda^2 - a^2} + \lambda^2)$.

Problema 1942

Să se determine valorile lui m pentru care expresia

$$\frac{(x + y + mz)^2 + (x + my + z)^2 + (mx + y + z)^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$$

este constantă.

* * *

Soluție. — Dezvoltînd parantezele, expresia dată devine

$$E = \frac{(m^2 + 2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2(2m + 1)(xy + yz + zx)}{2[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)]}.$$

Pentruca această expresie să fie o constantă trebuie ca:

$$\frac{m^2 + 2}{2} = \frac{2(2m + 1)}{-2} \quad \text{sau} \quad m^2 + 4m + 4 = 0,$$

de unde $m = -2$.
Pentru valoarea lui m găsită mai sus, expresia dată ia valoarea 3.

Problelma 1943

Să se arate că:

$$\sin^2(A + 30°) + \sin^2(B + 30°) + \sin^2(C + 30°) + \cos A \cos(A + 60°) + \\ + \cos B \cos(B + 60°) + \cos C \cos(C + 60°) = \frac{9}{4}.$$

Gorea Aristide, Ploești

Soluție. — Notăm cu E partea întîia a egalității. Avem:

$$\cos A \cos(A + 60°) = \frac{1}{2}[\cos 2(A + 30°) + \cos 60°].$$

Analog rezultă,

$$\cos B \cos(B + 60°) = \frac{1}{2}[\cos 2(B + 30°) + \cos 60°],$$

$$\cos C \cos(C + 60°) = \frac{1}{2}[\cos 2(C + 30°) + \cos 60°).$$

Prin urmare:

$$\cos A \cos(A + 60°) + \cos B \cos(B + 60°) + \cos C \cos(C + 60°) =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2(A + 30°) + \cos 60°)] + \frac{1}{2}[\cos 2(B + 30°) + \cos 60°] +$$

$$+ \frac{1}{2}[\cos 2(C + 30°) + \cos 60°] =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2(A + 30°) + \cos 2(B + 30°) + \cos 2(C + 30°)] + \frac{3}{2}\cos 60° =$$

$$= [\cos^2(A + 30°) + \cos^2(B + 30°) + \cos^2(C + 30°)] - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}.$$

prin urmare,

$$E = \sin^2(A + 30°) + \sin^2(B + 30°) + \sin^2(C + 30°) +$$

$$+ \cos^2(A + 30°) + \cos^2(B + 30°) + \cos^2(C + 30°) - \frac{3}{4} =$$

$$= 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

Problema 1989

Tangenta în B la cercul circumscris triunghiului ABC întîlnește în D simediana AS, iar cercul $D(DB)$ întîlnește aceiași simediană în M și N. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}.$$

Gh. Buicliu

Soluție: — Fie x și y unghiurile ADB și ADC. Avem:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB^2}{AC^2} \text{ (proprietatea simedianei).} \qquad (1)$$

Pe de altă parte, triunghiul ABD dă:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cos x$$

$$\therefore \qquad \sin^2 x = \frac{[(AD + DB)^2 - AB^2][AB^2 - (AD - DB)^2]}{4DB^2 \cdot AD^2}.$$

Analog,

$$\sin^2 y = \frac{[(AD + DB)^2 - AC^2]\,[AC^2 - (AD - DB)^2]}{4DB^2 \cdot AD^2}.$$

Ducînd aceste valori în (1) ridicată la pătrat, se găsește relația din enunț, unde:

$$AM = AD - DB \quad \text{și} \quad AN = AD + DB.$$

Problema 1990

Să se demonstreze că egalitatea:

$$\frac{x^4}{y^4} = \frac{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}$$

este tot una cu egalitatea:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Gh. Buicliu

Soluție. — Efectuînd calculele în prima egalitate se găsește:

$$[(a^2 x^2 y^2 - a^2 b^2 (x^2 + y^2) + b^2 x^2 y^2)](x^2 - y^2) = 0$$

care conduce la a doua egalitate din enunț chiar dacă $x = y$.

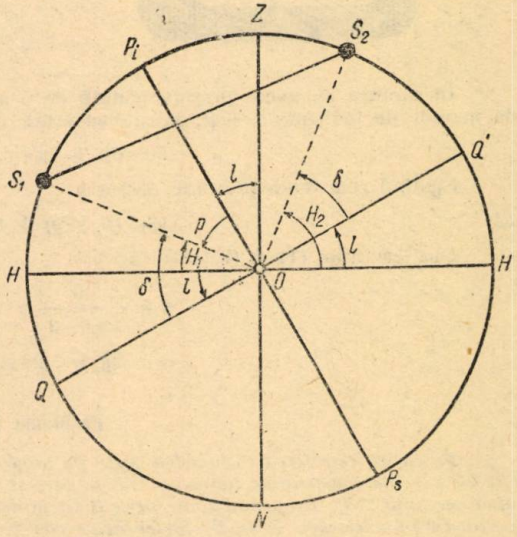
Problema 1991

Într-un loc de latitudine φ, culminația superioară și inferioară a Soarelui este deasupra orizontului. În aceiași zi, lungimea umbrei meridiane a unui turn este U_1 la culminația inferioară și U_2 la culminația superioară. Să se demonstreze relația:

$$\frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta},$$

în care δ este declinația Soarelui.

C. V. Costăchescu



Soluție. — Condiția ca Soarele să fie deasupra orizontului este $\delta > l$; $l = 90° - \varphi$. Avem: $\delta > 90° - \varphi$ sau $\delta + \varphi > 90°$; φ și δ sînt de același semn.

Înălțimea Soarelui la culminația inferioară:

$$H_1 = \delta - l = \delta - 90° + \varphi = \delta + \varphi - 90°.$$

Înălțimea Soarelui la culminația superioară:

$$H_2 = \delta + l = \delta + 90° - \varphi = \delta - \varphi + 90°,$$

$$U = I \cdot \operatorname{ctg} H,$$

$$U_1 = I \operatorname{ctg}(\varphi + \delta - 90°) = I \operatorname{tg}[180° - (\varphi + \delta)] = -I \operatorname{tg}(\varphi + \delta),$$

$$U_2 = I \operatorname{ctg}(\delta - \varphi + 90°) = -I \operatorname{tg}(\varphi - \delta),$$

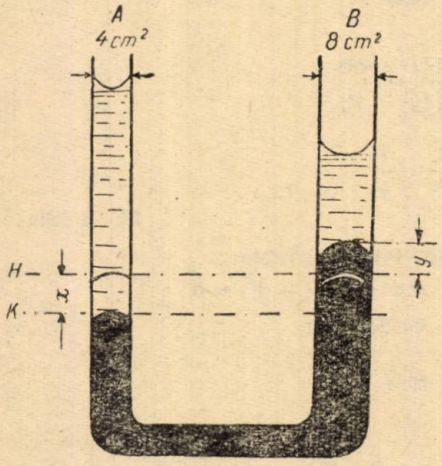
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \delta)}{\operatorname{tg}(\varphi - \delta)},$$

$$\frac{U_1 + U_2}{U_1 - U_2} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \delta) + \operatorname{tg}(\varphi - \delta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \delta) - \operatorname{tg}(\varphi - \delta)} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}.$$

Problema 1997

Două tuburi cilindrice verticale, având secțiunile de 4 cm² și 8 cm² respectiv, comunică în partea inferioară și conțin mercur ($d = 13{,}6$) în cantitate suficientă. Se toarnă în primul o coloană de apă de 100 cm înălțime, în al doilea o coloană de benzină ($d = 0{,}8$) de 50 cm înălțime. Cum se va deplasa nivelul mercurului în cei doi cilindri?

Soluție. — Este evident că nivelul mercurului coboară în tubul cu apă și urcă în cel cu benzină. Să notăm cu H planul orizontal ce trece prin nivelul comun al mercurului, înainte de turnarea celorlalte lichide, și cu K planul orizontal ce trece prin nivelul mercurului în tubul cu apă.



Notînd cu x și y diferențele de nivel față de nivelul inițial, avem:

1° Cantitatea de mercur ce iese din tubul A și intră în tubul B:

$$4x = 8y. \tag{1}$$

2° Scriem că presiunile asupra planului K sînt egale în cele 2 ramuri. Formula presiunii pe unitatea de suprafață este

$$p = h\gamma,$$

unde p este presiunea (în gf/cm²); h = înălțimea coloanei de lichid (în cm); γ = greutatea specifică (în gf/cm³).

În ramura A presiunea este:

$$100 \cdot 1 = 100.$$

În ramura B, avem presiunea dată de o coloană de benzină de 50 cm și o coloană de mercur de înălțime $x + y$; presiunea este:

$$50 \cdot 0{,}8 + (x + y) \cdot 13{,}6.$$

Egalînd cele două presiuni obținem:

$$13{,}6\,(x + y) + 40 = 100. \tag{2}$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă:

$$y = \frac{60}{13{,}6 \cdot 3} \approx 1{,}47 \text{ cm},$$

$$x = 2y \approx 2{,}94 \text{ cm}.$$

Problema 2017

Se dă un cerc (O) de diametru AB. Pe tangenta în B la cerc se ia punctul C, astfel încît $OC = AB$. Se construiește tangenta CT la cerc și se unește punctul C cu punctul A. Se duce apoi, dreapta AT. Perpendiculara pe AB în punctul O întîlnește dreptele AC, CT și AT respectiv în punctele M, P și D. Să se arate că:

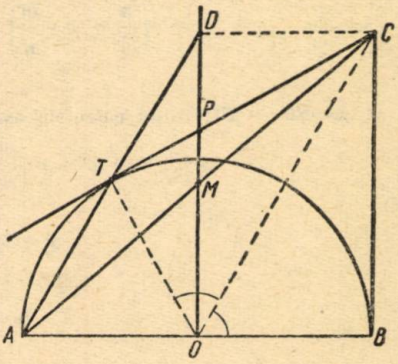
1° $$\frac{1}{OM} + \frac{1}{MP} + \frac{1}{PD} = \frac{11}{OD} \text{ și}$$

2° $$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OD} = \frac{2}{OP}.$$

Lucian Mănescu, R. Vîlcea

Soluție. — Unim O cu punctul C și cu punctul de tangență T. Unim de asemenea punctul C cu punctul D. Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice OBC și OTC rezultă: $\sphericalangle COB = \sphericalangle COT$. Așa dar, $\sphericalangle AOT + 2 \sphericalangle COB = 180°$. Totodată, în triunghiul isoscel AOT putem scrie $\sphericalangle AOT + 2 \sphericalangle OAT = 180°$. Comparînd cele două egalități rezultă că: $\sphericalangle COB = \sphericalangle OAT$ și ca atare $AT \parallel OC$.

De asemenea, din egalitatea triunghiurilor dreptunghice OBC şi OAD deducem că $OD = BC$ şi deci, DC e paralel şi egal cu OB. Prin urmare, patrulaterul $AOCD$ este un paralelogram avînd ca diagonale pe AC şi OD. În consecinţă, punctul M este mijlocul segmentului OD. În triunghiul dreptunghic OAD, segmentul OT fiind jumătate din AD, căci $AD = OC = 2R$, urmează că punctul T este mijlocul segmentului AD. Aşa dar, considerînd triunghiul ADC, segmentul DM este mediana corespunzătoare laturii AC, iar CT este mediana corespunzătoare laturii AD şi deci, punctul P este centrul de greutate al triunghiului considerat. Atunci putem scrie:



$$3\,MP = MD = OM \quad \text{sau} \quad 6\,MP = 2OM.$$

De asemenea, $PD = 2\,MP$ sau $3\,DP = 6\,MP$. De unde rezultă:

$$2\,OM = 3\,DP = 6\,MP \qquad (11)$$

sau:

$$\frac{2}{\frac{1}{OM}} = \frac{3}{\frac{1}{DP}} = \frac{6}{\frac{1}{MP}}, \quad \text{de unde} \quad \frac{11}{\frac{1}{OM} + \frac{1}{DP} + \frac{1}{MP}} = \frac{2}{\frac{1}{OM}}$$

care ne dă relaţia cerută: $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{DP} + \dfrac{1}{MP} = \dfrac{11}{OD}$.

2° Tot din relaţia $2\,OM = 3\,DP = 6\,MP$ putem scrie:

$$\frac{\frac{1}{DP}}{3} = \frac{\frac{1}{OM}}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{\frac{1}{DP} - \frac{1}{OM}}{1} = \frac{\frac{1}{OM}}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{DP} - \frac{1}{OM} = \frac{1}{2\,OM} = \frac{1}{OD}$$

din care scoatem: $\dfrac{1}{DP} = \dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OD}$ sau $\dfrac{2}{2\,DP} = \dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OD}$

sau $$\frac{2}{OP} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{OD},$$

tocmai relaţia de demonstrat.

Problema 2038

Două baloane de sticlă A şi B de capacitate 2 şi 4 litri respectiv, comunică printr-un tub de secţiune neglijabilă şi conţin la începutul experienţei, aer la 0°C şi 760 mm Hg. Se încălzeşte balonul A la 100° şi balonul B la 200°.

a) *Care va fi presiunea în sistem?*

b) *Care este cantitatea de aer ce trece dintr-un balon într-altul?*

* * *

Soluţie. — O parte din aerul conţinut iniţial în balonul B trece în balonul A. Să notăm cu v volumul acestei cantităţi de aer măsurat la începutul experienţei, adică la 0°C şi presiunea 760 mm Hg.

Fie p presiunea în cele două baloane la sfîrşitul experienţei. La sfîrşitul experienţei, în balonul A se află o cantitate de aer ocupînd volumul de 2 litri la presiunea p şi temperatura 373°K. La începutul experienţei această cantitate de aer ocupa volumul $(2 + v)$ litri, se afla la presiunea 760 mm şi temperatura 273°K. Avem aşadar, $\dfrac{2p}{373} = \dfrac{(2+v)\,760}{273}$. La fel pentru balonul B, avem: $\dfrac{4p}{473} = \dfrac{(4-v)\,760}{273}$.

Impărţind aceste ecuaţii obţinem $\dfrac{2\cdot 473}{4\cdot 373} = \dfrac{2+v}{4-v}$, de unde $v = \dfrac{800}{2438} \approx 0{,}328\ l$ şi $p \approx 1209$ mm.

Problema E: 682

Cît trebuie să fie E astfel ca să avem relaţia:

$$\left(\frac{n}{m}+p\cdot\frac{m}{n}\right)\cdot\left(p\cdot\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)-E=(p-1)^2.$$

Gh. Dobrotescu

Soluţie. — Efectuînd calculele avem:

$$1+p^2+p\left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)-E=p^2-2p+1$$

şi:

$$E=2p+p\left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{n^2}\right),$$

$$E=p\left(2+\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{n^2}\right),$$

$$E=p\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)^2.$$

Problema E: 719

Dacă notăm $A=\dfrac{(b-c)^2}{n-p}$, $B=\dfrac{(c-a)^2}{p-m}$ şi $C=\dfrac{(a-b)^2}{m-n}$, *să se arate că:*

$$(Aa+Bb+Cc)^2=(A+B+C)\,(Aa^2+Bb^2+Cc^2).$$

* * *

Soluţie. — Relaţia de demonstrat se scrie:

$$A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2+2ABab+2BCbc+2CAca=A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2+$$
$$+AB(a^2+b^2)+BC(b^2+c^2)+CA(c^2+a^2),$$

de unde:
$$AB(a-b)^2+BC(b-c)^2+CA(c-a)^2=0.$$

Dacă în această relaţie înlocuim A, B şi C, avem:

$$\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(n-p)(p-m)}+\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(m-n)(p-m)}+\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(m-n)(n-p)}=$$

$$=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\left[\frac{1}{(n-p)(p-m)}+\frac{1}{(m-n)(p-m)}+\frac{1}{(m-n)(n-p)}\right]=$$

$$=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\cdot\frac{m-n+n-p+p-m}{(m-n)(n-p)(p-m)}=0.$$

Problema E: 747

Pe un şantier în 4 barăci sînt 436 muncitori. În prima baracă sînt cu 10 muncitori mai mulţi decît în baraca a patra, unde sînt cu 8 muncitori mai mulţi decît în baraca a treia, iar în baraca a doua sînt cu 10 muncitori mai mulţi decît în baraca a treia. Să se găsească cîţi muncitori sînt în fiecare baracă. Rezolvare aritmetică şi algebrică.

Petre Mecea, Dej

Soluţie aritmetică. — Dacă în prima baracă sînt cu 10 muncitori mai mulţi decît în a patra, iar în a patra cu 8 muncitori mai mulţi decît în baraca a treia, atunci în prima baracă sînt cu 18 muncitori mai mulţi decît într-a treia. Raţionînd mai departe, observăm că în baraca a treia este cel mai mic număr de muncitori. Adunînd de la fiecare baracă numărul cu care întrece numărul de muncitori din a treia, avem: $18+10+8=36$. Dacă scădem 36 din 436 vom găsi în fiecare baracă un număr egal cu numărul muncitorilor din celelalte barăci,

împărțind numărul obținut la 4 (numărul barăcilor), iar mai departe, vom aduna numărul de oameni pe care i-am scos din baraca întîia, a doua și a patra. Efectuînd vom avea:

$$436 - 36 = 400 \quad ; \quad \text{apoi} \quad 400 : 4 = 100,$$

cîți muncitori sînt în baraca a treia.

În prima baracă vor fi $100 + 18 = 118$ muncitori; în baraca a doua $100 + 10 = 110$ muncitori, iar în baraca a patra $100 + 8 = 108$ muncitori.

Soluție algebrică. — Judecînd problema observăm că în baraca a treia sînt mai puțini muncitori, pe care-i notăm cu x. În prima baracă vom avea $x + 18$, în baraca a doua $x + 10$, iar în baraca a patra $x + 8$. Adunînd numărul oamenilor din toate barăcile vom găsi 436, încît vom avea:

$$x + 18 + x + 10 + x + x + 8 = 436,$$

o ecuație de gradul întîi cu o necunoscută, pe care o rezolvăm:

$$4x + 36 = 436, \quad \text{prin urmare:} \quad x = 100.$$

În prima baracă vor fi deci 118 muncitori, în a doua 110, în a treia 100, iar în a patra 108 muncitori.

Problema E: 749

O garnitură de tren are în total 30 de vagoane cu cîte două și patru osii. Se întreabă cîte vagoane cu cîte 4 osii și 2 osii sînt.

Șerban Popescu, București

Soluție. — Rezolvăm problema prin metoda presupunerii:

1. Presupunem că toate vagoanele ar avea numai cîte 2 osii. Atunci în total ar fi $30 \cdot 2 = 60$ osii, mai puțin cu $84 - 60 = 24$ osii ca în realitate.

Acest rest pînă la 84 a provenit din faptul că nu am mai adunat și numărul de 2 osii cît au vagoanele cu patru osii mai mult decît cele cu două osii.

Prin repetarea celor două osii de atîtea ori cîte vagoane cu patru osii avem, am obținut restul de 24 osii. Deci:

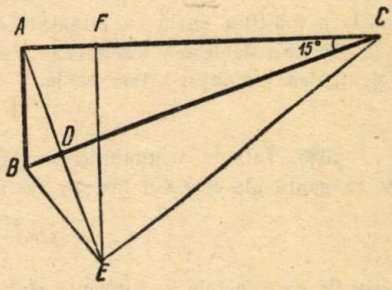
$$24 : 2 = 12 \text{ vagoane cu patru osii,}$$
$$30 - 12 = 8 \text{ vagoane cu două osii.}$$

Problema E: 754

Să se demonstreze că dacă unul din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este de 15°, înălțimea coborîtă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză este un sfert din ipotenuză.

C. I. Ț.

Soluție. — Fie triunghiul ABC și D piciorul înălțimii coborîtă din vîrful unghiului drept A pe ipotenuză, iar $\sphericalangle C = 15°$. Notăm cu E simetricul punctului A față de punctul D. Fie F piciorul perpendicularei coborîtă din punctul E pe cateta AC. Se observă că:



$$\sphericalangle ACE = 30°.$$

Prin urmare,

$$EF = \frac{1}{2} CE = \frac{1}{2} AC.$$

Din triunghiurile asemenea ABC și AEF rezultă

$$\frac{BC}{AE} = \frac{AC}{EF}.$$

De aci deducem:

$$AE = \frac{BC \cdot EF}{AC} = \frac{BC \cdot \frac{1}{2} AC}{AC} = \frac{1}{2} BC.$$

Dar $AE = 2 \cdot AD$, deci

$$AD = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{4} BC.$$

PROBLEME PROPUSE*)

2316. Să se demonstreze geometric identitatea

$$\operatorname{cosec}^2 a - \operatorname{cosec}^2 b = (\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b)^2 + 2(\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b)\operatorname{ctg} b.$$

A. S. Levin (R.S.S. Letonă)

2317. Să se rezolve ecuația

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0.$$

* * *

2318. Care va fi gradul de mărire al unui microscop dacă lentila obiectiv dă o imagină mărită de 50 ori, iar lentila ocular mărește imaginea dată de prima lentilă încă de 20 ori. Dacă distanța dintre focarele celor două lentile ale sistemului este de 5 cm, se întreabă care sînt distanțele lor focale.

Ioanin I. Brezeanu, student, București

2319. Să se arate că:

$$\sqrt{1 - \cos(72° + x)} - \sqrt{1 - \cos(72° - x)} - \sqrt{1 - \cos x} =$$
$$= \sqrt{1 - \cos(144° + x)} - \sqrt{1 - \cos(144° - x)}$$

Zamfira Petrică, studentă, București

2320. Se dă un triunghi. Printr-un punct dat situat în afara triunghiului să se ducă o dreaptă care să împartă aria acestui triunghi în două părți egale.

M. Cerepkin, Karaganda (Matematica v școle)

2321. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \geqslant 6,$$

unde α, β, γ sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghi.

S. Petrov, Gaisin (Matematica v școle)

2322. Un corp este aruncat de jos în sus cu viteza inițială de 40 m/s. După cît timp trebuie aruncat după el, cu aceiași viteză, un al doilea corp, pentru ca întîlnirea lor să aibe loc la o înălțime egală cu jumătate din înălțimea maximă a celor două corpuri?

Să se calculeze vitezele celor două corpuri în momentul întîlnirii și să se explice fără calcul, dece se obțin viteze egale.

(Cercul de probleme de fizică din Capitală)

2323. Într-un triunghi în care centrul de greutate este colinear cu două din punctele de tangență ale cercului înscris, există relația:

$$\cos\frac{B-C}{2} = 3\cos\frac{B+C}{2}.$$

Laturile cu punctele de tangență sînt cele ce formează unghiul A.

I. Hodîrcă, Breaza

2324. Să se arate că:

$$\frac{\sqrt[n]{i} \pm i\sqrt[n]{-i}}{1 \pm i} = \cos\frac{\pi}{2n} \pm \sin\frac{\pi}{2n}$$

unde $i^2 = -1$.

C. Ionescu-Țiu

---

*) Casa VIII (2322, 2326, 2330, 2336, 2339).

2325. Un circuit oscilant este format dintr-o bobină cu rezistența R = 8 ohmi și cu reactanța inductivă $X_L = 15$ ohmi montată în serie cu un condensator cu reactanța $X_C = -15$ ohmi. Circuitul este conectat la un generator de curent alternativ cu frecvența de 300 kHz și cu tensiunea de 120 V. Să se determine:

a) Curentul în circuit și factorul de putere;

b) inductanța proprie a bobinei;

c) capacitatea condensatorului;

d) tensiunea la bornele bobinei;

e) tensiunea la bornele condensatorului;

f) bilanțul puterilor.

Hulubei T. Valeriu, elev, Craiova

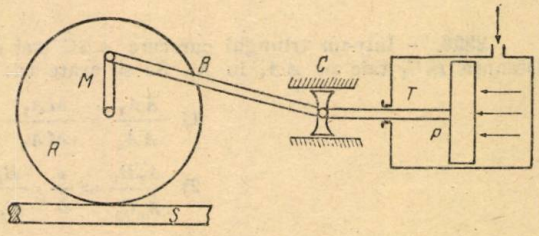
2326. Fie un triunghi ABC înscris într-un cerc. Se duc înălțimile AA', BB' și CC'. Fie ω mijlocul lui AH (H ortocentrul). Fie M mijlocul lui $B'C'$. Notăm cu N mijlocul lui ωM. Să se afle locul geometric al lui N cînd A descrie cercul.

Musa Geavit, student, București

2327. Se dau într-un același plan vectorul alunecător $\overline{v}$ aplicat pe o dreaptă Δ și două puncte A și B. Fie M și N două poziții ale originii vectorului $\overline{v}$. Din studiul descompunerii lui $\overline{v}$ în M și N în componente trecînd prin A și B să se deducă cunoscuta proprietate geometrică: două patrulatere avînd toate laturile și o diagonală paralele au și cealaltă diagonală paralelă.

Alexandru Stoenescu

2328. Cilindrul unei locomotive are diametrul de 20 cm, iar presiunea aburului este de 8 kg/cm². Forța se transmite prin tija T a pistonului, bielei B și manivelei M. Pentru a evita devierea laterală a tijei pistonului se folosește ghidajul C (numit cap de cruce) în care frecarea este neglijabilă. Manivela fiind în poziție verticală (ca în figură) se întreabă:



a) care este efortul la care este supusă biela B?

b) care este forța de tracțiune ce se dezvoltă între roata R și șina S?

Date geometrice: lungimea bielei = 80 cm; lungimea manivelei = 30 cm; diametrul roții locomotivei = 1,40 m.

(Cercul de matematici din Capitală, 1956)

2329. *a)* Voltametrul cu azotat de argint și electrozi de platină avînd rezistența de 1,9 ohmi și forța contraelectromotoare de 1,2 V este alimentat de la un acumulator avînd f.e.m. de 2,2 V și rezistența interioară 0,1 ohm. Să se afle cantitatea de argint depusă în 30 minute.

b) Să se rezolve aceiași problemă dacă electrozii de platină se înlocuiesc prin plăci de argint, știind că prin această înlocuire rezistența voltametrului nu se schimbă.

A. Șaichin

2330. — Fie triunghiul oarecare ABC și MN o antiparalelă la BC. Bisectoarele unghiurilor B și C se întîlnesc în A_1, iar bisectoarele unghiurilor CMN și BNM se întîlnesc în A_2. Să se arate că:

a) patrulaterul $A_1 B_1 A_2 C_1$ este inscriptibil și punctele A, A_1, A_2 sînt colineare,

b) patrulaterele CMA_1A_2 și BNA_1A_2 sînt inscriptibile iar centrele cercurilor circumscrise patrulaterelor $A_1 B_1 A_2 C_1$, $C M A_1 A_2$, BNA_1A_2 respectiv ω_1, O_1, O_2 sînt colineare.

N. V. Pupăzan, Sibiu

2331. — Să se stabilească egalităţile:

$$\sum_0^m C_m^i C_{2m}^{m-i} = \sum_0^m C_m^i C_{2m}^i = C_{3m}^m$$

unde $C_m^0 = 1$.

Corneliu Georgescu

2332. — Într-un cerc de rază R este înscris triunghiul echilateral ABC. Fie M un punct oarecare aşezat pe cerc. Să se afle cea mai mare valoare a sumelor:

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC};\ \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \text{ şi } \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} + \overline{MB} \cdot \overline{MC}$$

Stelian Gh., Mărculescu

2333. — Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relaţia:

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{2S}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

Gh. Dobrescu, elev Brăila

2334. — Solstiţiul de vară, $\delta_\odot = +23°27'$. Ce longitudine au punctele de pe Ecuator, tropicul Racului şi tropicul Capricornului, unde Soarele răsare în acelaşi timp ca la Constanţa ($\varphi = 44°10'$, $\lambda = +28°41'$)?

C. V. Costăchescu

2335. — Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x - (\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = 2\sqrt{3}.$$

Victor Antonescu, Reghin

2336. — Într-un triunghi oarecare ABC trei ceviene AA_1, BB_1, CC_1 concură în M. Dreapta B_1C_1 taie pe AA_1 în A_2. Să se arate că:

$$1)\ \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{MA_1}{MA_2},$$

$$2)\ \frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{B_1C}{C_1B}.$$

Gh. I. Bercea, student

2337. — Trei conductori electrici sînt legaţi în derivaţie. Rezistenţa totală a derivaţiei este $\frac{11}{20}$ ohmi. Cînd doi conductori sînt legaţi în serie, iar cu al treilea sînt legaţi în derivaţie, rezistenţa lor este de $\frac{19}{60}$ ohmi. Cînd conductorii sînt legaţi în serie rezistenţa totală a lor este 19 ohmi.

Să se afle rezistenţele celor trei conductori electrici.

M. Nicolaescu, Ploeşti

2338. — Să se determine x şi y astfel ca relaţiile

$$\cos(7x - a) = \sqrt{2}\cos(5x - a) - \cos(3x - a),$$

$$\cos(6x - a) = y\cos(5x - a) - \cos(4x - a)$$

să devină identităţi.

Alex. Dan Popescu, student, Bucureşti

2339. — Într-un cerc O de rază R se ia o coardă fixă AB şi o coardă mobilă AC. Se prelungeşte AC cu $CD = AC$. Mijlocul dreptei BD este M. Să se găsească locul geometric al punctului M.

* * *

2340. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=a.$$

Caz particular: $a=2\sqrt{2}$; $a=\sqrt{3}$.

Schileru I. Dinu, elev, Bucureşti

2341. — Prin G, centrul de greutate al unui tetraedru $A_1A_2A_3A_4$, se duce un plan oarecare care taie muchiile A_1A_2, A_1A_4, A_1A_4 respectiv în punctele A', A'', A'''. Avem:

$$\frac{A_1A_2}{A_1A'}+\frac{A_1A_3}{A_1A''}+\frac{A_1A_4}{A_1A'''}=4.$$

Tr. I. Voicu, Slatina

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI*)

E: 863. — Într-un magazin de stat s-au vîndut bocanci cu 180 lei perechea, pantofi cu 140 lei perechea şi sandale cu 60 lei perechea, încasîndu-se în total 21080 lei pentru 178 perechi de încălţăminte. Să se afle numărul de perechi din fiecare fel ştiind că numărul de perechi de bocanci este mai mare cu 10 decît cel al pantofilor.

* * *

E: 864. — Să se restabilească înmulţirea:

$$\begin{array}{r} x\ 2\ x \\ x\ 7 \\ \hline x\ x\ 1 \\ x\ x\ 2 \\ \hline x\ x\ x\ x \end{array}$$

în locul semnelor x trebuind cîte o cifră. Justificaţi modul de rezolvare.

M. P. Bogdan, Ploeşti

E: **865.** — Un caiet cu 24 file costă 0,56 lei, iar unul cu 48 file costă 0,88 lei. Ştiind că pentru 25 caiete s-au plătit 18,80 lei se întrebă cîte caiete s-au cumpărat din cele cu 24 file şi cîte din cele cu 48 file?

* * *

E: 866. — Dacă $a+b+c=0$ atunci

$$\frac{(a+b-2c)^4+(b+c-2a)^4+(x+a-2b)^4}{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4}=9.$$

Gh. I. Stoian, student, Bucureşti

E: 867. — La un examen de admitere, $\frac{1}{15}$ din candidaţi au fost respinşi la vizita medicală, $\frac{2}{7}$ din rest au fost respinşi la lucrarea scrisă şi $\frac{3}{5}$ din numărul celor respinşi la vizita medicală şi lucrarea scrisă au fost respinşi la oral, fiind admişi 70 elevi. Să se afle cîţi elevi s-au prezentat la examene?

* * *

E: 868. — Să se găsească numerele A şi B ştiind că admit pe 40 ca cel mai mare divizor comun şi pe 3600 ca cel mai mic comun multiplu.

* * *

*) Clasa V-a (E: 863, 864, 865); VI-a (E: 867, 868, 869, 870); VII-a (866, 871, 872, 873).

E: 869. — Să se arate că:

$$(a-b-1)^2+(b-a-1)^2+(1-a-b)^2+(a+b+1)^2=4(a^2+b^2+1).$$

* * *

E: 870. — Pe o masă sînt farfurii întinse, adînci și mici. Dacă ar fi însă 7 farfurii adînci, numărul farfuriilor adînci ar fi o treime din numărul celor întinse. Numărul farfuriilor mici este o cincime din numărul farfuriilor întinse și adînci la un loc, iar numărul total al farfuriilor aflate pe masă este 78. Cîte farfurii de fiecare fel sînt pe masă?

* * *

E: 871. — Într-un patrulater, bisectoarele a două unghiuri opuse sînt paralele. Ce legătură există între celelalte două unghiuri?

* * *

E: 872. — Să se arate că:

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(a+d)^2+(b+c)^2+(b+d)^2+(c+d)^2+$$
$$+2(a+b)(c+d)+2(ab+cd)=(b+c+d)^2+(c+d+a)^2+$$
$$+(d+a+b)^2+(a+b+c)^2.$$

* * *

E: 873. — Să se afle latura triunghiului echilateral dacă arcul din cercul circumscris subîntins de latură are 25,12 cm.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 aprilie 1956 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori:

Torțescu Florin (student anul II Mecanică, București), *Ene Ion* (student Matematici București), *Bogdan P. Mircea* (clasa X Ploești), *Pătrașcu Sorin* (clasa X s.m. 4. București), *Piso Pompiliu* (clasa IX Tîrnăveni), *Roșianu C. Dragomir* (student București), *Lucan Mihai* (clasa IX Botoșani), *Nistreanu N. Valeriu* (clasa X s.m.4. București), *Jianu Ion* (clasa IX s.m. 2 București), *Emanoil Alexandru* (clasa X s.m. 1 București), *Fluerașu Cezar* (clasa X s.m. 13 București), *Stănescu Gh. Ion* (clasa X. s.m. 17 București), *Stănciulescu M. Mihai* (clasa X Tîrgoviște), *Bulucea D. Constantin* (clasa IX R. Vîlcea), *Nedelcu Mihai* (absolvent Ploești), *Stoian I. Gheorghe* (student București), *Delu Ștefan* (clasa X Corabia), *Turiga M. Const.* (absolvent Urziceni), *Bucur D. Gheorghe* (clasa X Pucioasa), *Dițu Ionică* (clasa X Pietroșani), *Zorapapel Tiberiu* (clasa IX s.m. 17 București), *Tănăsescu I. Ștefan* (clasa X s.m. 4. București), *Urmă Radu* (clasa IX s.m. 1 București), *Corduneanu Adrian* (clasa X Iași), *Murărescu Gheorghe* (clasa X Roman), *Avram N. Constantin* (clasa X Adjud), *Moisin L. Tudor* (clasa X Cîmpina), *Focșeneanu Ion* (clasa X Tg. Neamț), *Mitu Ion* (clasa X Piatra Neamț), *Barăitaru Florin* (clasa X s.m. 13 București,) *Căsăndroiu Tudor* (clasa IX Ploești), *Dobre Ion* (clasa X s.m. 13 București), *Ballag Vasile* (clasa IX Ploești), *Păunescu I. Lucian* (clasa X s.m. 17 București), *Dinulescu Horia* (clasa VIII Focșani), *Receanu Viorica* (clasa IX Sibiu), *Predoiescu Marieta* (clasa VII s.m. 10 București), *Zamfirescu Tudor* (clasa VI s.m. 1 București), *Opriș A. Ion* (clasa X Zalău), *Gorbănescu Gheorghe* (clasa X Trușești), *Alexa I. Dumitru* (student Iași), *Hoța Marcel* (clasă X Tg. Mureș), *Țîru Emil* (student Iași)

Soluții bune primite pînă la 1 aprilie 1956.

CORABIA. — Clasa VIII-a. Petcu Alexandru (1879, 947, 54, 55, 57, 60, 63, 71, 76, E: 659, 99, 706, 44, 47, 49—53, 55, 58). Clasa X-a, Ciorecan Zaharia (1920, 47, 52, 53, 55, 56, 61, 62, 77, 84, 95, 97, 98, 2004—07), *Delu Ștefan* (1891, 947—64, 66, 67, 71, 74—77, 84—87, 88, 90, 92, 93, 95—99, 2001—07, 09—11, 15, 21, 23, 32), Șarpe I. Dumitru (1921, 23, 52, 55, 58, 70, 77, 84, 92—99, 2001—11, 17, 20—24, 30—35).

CRAIOVA. — *Școala medie de băieți nr. 1 « Nicolae Bălcescu »*. Clasa X-a. Bardan I. Virgil (1916, 17, 20—22, 24, 27, 31, 40, 41, 43, 45—49, 51—58, 60—64, 71, 74—77), Căluțoiu Ion (1718, 93, 830, 35, 37, 38, 48, 51, 62, 66), Hulubei T. Valeriu (1716, 873, 918, 21—30, 39, 41, 45, P), Săseanu C. Vasile (1948, 49, 54, 56, 57, 60, 63, 76), Voinea I. Mircea (1948, 49, 52, 54—56, 62, 67, 76, 75, 95, 97, 2001, 04, 06—08, 21).

Școala medie de băieți nr. 2 « Frații Buzești ». — Clasa VIII-a. Radu Gh. Gheorghe (1949, 54, 57, 62—64, 76, 92, 95, 97, E: 765); clasa X-a Dinu Gheorghe (1879, 908, 13—16, 18,

19, 22—25, 46—56, 58—64), Dinuţ Teodor (1947, 54, 55, 82, 83, 85, P), Topuzu Paul (1917, 52, 58, 64, 71, 73, 92, 95, 97, 98, 2005—07, 10, 11, 15, 18, 20—22, 24). Absolvenţi: Capră I. Gh. (1943, 49, 57, 58, 64, 92, 95, 97, 98, 2005—07, 10, 11, 15, 18, 20—24), Cumpănaşu C. Vasile (1875, 77, 82, 91, 948, 54—57, 60, 62, 63), Rădulescu Emil (1875—77, 82, 91, 95, 954, 56, 57, 60, 62).

CURTEA DE ARGEŞ. — Clasa V-a, Gănescu I. Constantin (E: 727, 32, 33, 35, 37, 38, 40, 49—51). Clasa X-a. Bîngă D. (1951, 54-58, 60, 61, 74—77, 82).

DEJ. — Clasa X-a. Fărcaş Ion (1920, 39, 47, 48, 51, 54—57, 60, 63, 73, 74), Gottlieb Clotilda (1664, 74, 81, 84, 96, 706, 830, E: 653, 58, 65), Hoza Gavril (1924, 25, 43, 47, 51, 52, 54—56, 60, 73—75), Itu Stelian (1920, 24, 39, 47, 48, 51, 54, 56, 57, 60, 63, 71, 73—75, 2006).

DEVA. — Clasa VIII-a. Laslău Stela (1949, 54, 55, 57, 76, E: 960, 743, 47—53, 57, 64—67, 71, 72, 74). Clasa X-a. Bulanca Natalia (1947, 48, 50, 51, 54—56, 60, 61, 63), Olariu Voicu (1874, 75, 77, 79, 81—84, 91, 94, 915, 24).

DOROHOI. — Clasa IX-a. Ciopec Mihai (1938, 43, 48, 50, 51, 55—57, 76, 92, 2021), Jişcanu Vasile (1939, 43, 48, 51, 55, 56, 60, 77, 2006), Popa Gheorghe (1943, 48, 51, 55, 56, 60, 63, 71, 76, 77, 2004, 06, 10, 21); clasa X-a. Stoica Fulga (1947, 51, 54—57, 60, 67, 74).

FĂGĂRAŞ. — Clasa VIII-a. Săbăduş Mihai (2022, 24, E: 750, 52, 58, 65, 66, 68, 72, 75). Clasa X-a. Ruja Nicolae (1947—51, 54—58, 60—64, 74—77, 84, 96).

FIERBINŢI (Reg. Bucureşti). Clasa VIII-a. Cîşlaru Cornel (1949, 55, 63, 71, 76, 83, 92, E: 749, 52—54).

FOCŞANI. — Clasa VIII-a. Cristea Rodica (1844, 947, 55, 71, 74, E: 708—11, 13, 14, 16, 18, 21, 22, 25, 27, 29—31, 35, 38, 42, 45, 47—60), *Dinulescu Horia* (1914, 15, 20, 23, 24, 37, 47, 51, 54, 55, 62, 63, 70, 71, 74, 92, 93, 2006, 23, E: 754—60, 62,—66, 68, 71—73), Rădescu Eugen (1947, 54, 55, 57, 62, 70, 71, 74, 76, 92, E: 752, 54). Clasa X-a. Celan Romulus (1917, 31, 43, 48, 49, 55—57, 60, 71, 73—77, 92, 2006), Cristea Aurel (1847, 57, 59, 61, 66, 71, 75, 76, 79—82, 84—87, 89, 91, 92, 98, 903, 04, 08, 11, 13—23), Absolvent Arghir George (1920, 24, 26, 38—41, 43, 44).

GALAŢI. — *Şcoala de marină.* Clasa VIII-a. Bădescu Eugen (1955, 57, 68, 71, E: 747, 49, 50, 52, 53, 55, 58, 59), Constantinescu Corneliu (1976, E: 729, 35, 38, 42, 47, 49—51, 56), Giurgea Victor (1882, 955, 71, E: 724, 25, 27, 29—32, 45, 51—53, 56), Ochiană Const. (1955, 57, 71, E: 747, 49—53, 58, 59), Vasile Nicolae (1955, 57, 68, 71, E: 747, 49, 52, 53, 55, 58, 60). Clasa IX-a. Ştir Dumitru (1948, 50, 51, 54—56, 60, 71, 76, 77, 90), Tudorache C. Mihai (1876, 82, 84, 98, 928, 51, 54—56, 60, 71). Şcoala medie nr. 1. Clasa IX-a. Chirilă Marian (1880, 949, 57, 58, 61, 64, 90, 92, 94, 95, 97, 2005, 06, 08—11, 14, 15, 17, 18, 21, 22, 24). Şcoala medie de fete nr. 2. Clasa VIII-a. Pintilie Constanţa (1955, E: 708, 18, 29, 31, 47, 50, 52, 53, 58). Şcoala *medie mixtă nr.* 3. Clasa X-a. Paraschiv Dumitru (1948, 51, 54, 56, 57, 60, 74—76, 90).

GĂEŞTI. (Reg. Piteşti). Şcoala medie mixtă. Clasa VIII-a. Ixaru Liviu (1940, 44, 49, 54, 55, 57, 64, 70, 71, 76, 91, 97, 2006, 14, 24, E: 735—38, 47—54, 56, 58, 60, 67, 72).

GIURGIU. Clasa VIII-a. Profirescu D. Marcel (1875, 76, 82, 84, 915, 24, 35, 40, 44, E: 724—26, 32, 33, 35—38, 44, 45), Vişinescu M. Mihai (1951, 54, 55, 70, 71, 76, 92, 2001, 23, 26, E: 747, 50, 53, 57, 58, 60, 65, 71—73, 75). Clasa IX-a. Petre Gheorghe (1874, 84, 920, 24, 26, 31, 44, 45, 48, 49, 51, 54—57, 60, 62, 63, 67, 74—77, 92, 2004, 08, 20, 21, 26, 32), Clasa X-a. Ciobanu N.Marin (1920, 31, 40, 41, 47, 48, 51, 54—57, 62, 67, 71, 73—77, 2024, P), Donciu I. Niculae (1876—83, 94, 940, 48, 51, 55, 56, 60), Gologan P. Vladimir (1915, 17, 48, 51, 55—57, 61, 67, 73—75, 97), Pieleanu I. Dumitru (1875—84, 92, 94, 940, 48, 51, 55, 56, 60), Stănescu St. Nelu (1917, 18, 24, 40, 41, 45, 47—52, 54—56, 60, 61, 67, 70, 71, 74—77, 79, 92, 2004, 08, 10, 21, 23). Absolvenţi: Bilcu C. Petre (1915, 17, 19, 24, 31, 92, 93, 97, 2001, 03, 05—08, 10, 11, 21), Botoran I. Petre (1858, 919, 30, 35, 41, 43, 44, 52, 53, 58—64, 67, 68, 70, 81, 84, 90, 92—94, 96—98, 2001, 03, P), Clausius St. B. (1879, 80, 82, 915, 18, 20, 23, 24, 27, 44, 45, 47, 48, 51, 54—57, 60, 62—64, 67, 68, 71—74, 93, 2010, 21), Sin C, Alexandru (1919—21, 35, 37, 38, 44, 90, 92—94, 96—98, 2001—08, 10, 12, 15, 17, 20—24, 32).

HIRLAU (reg. Iaşi). Clasa X-a. Bădăluţă Const. (1947, 48, 50—52, 54—58, 60—62, 64, 74, 76, 77, 84, 90), Pintilie Dumitru (1948—51, 54, 56—58, 60, 62, 63, 90).

HOREZU (reg. Piteşti). Clasa VIII-a. Floricâ I. Gh. (1915, 55, 71, 76, E: 716, 20, 35, 37, 38, 47, 49, 50, 52, 64—67, 71, 72—75, 77), Rădescu N. Nicolae (1948, 54, 54—56, 71, 74—77).

HUŞI (Reg. Iaşi) Clasa X-a. Serf Iacob (1947—64 76, 77, 90, 93, 96).

IANCA (reg. Galaţi). Clasa IX-a. Casaman Gheorghe (1948, 50, 56, 57, 60, 62, 63, 71, 76, 92, 97, 2005, 21, 23).

IAŞI. *Studenţi: Alexa I. Dumitru* (1876, 79, 80, 85, 947, 48, 50, 51, 53, 54—56, 60, 61, 71, 74—78, 82, 83, 90, 92, 97, 98, 2001, 06, 08—10, 20—22, 24), Donea Sorin (1914, 24—27,

38, 40, 41, 43, 47, 48, 50—56. 58, 60, 63, 67, 71, 74—77, 90), Paport Paul (1875—84, 91, 914), Simion Ispas (1836, 80. 91, 943, 61, 92, 98, 2006, 10, 15, 21), *Ţiru Emil* (1879, 82, 91, 908, 14, 31, 43, 47—58, 60—64, 67, 71, 74, 75, 77, 92, 93, 96, 97, 2003—06, 09, 32, P) *Şcoala militară*. Clasa IX-a. Ivan C. Costică (1948—51, 54, 56, 57, 60, 61, 76, 77), Clasa X-a. Panţuru T. Dumitru (1872, 923, 47—52, 54—57, 59—64, 67, 74—77, 79, 84). Clasa IX-a. Copel Ionel (1948, 51, 55, 60, 62, 2004, 06—08, 10, 16), Costinescu Anca (1989, 92—95, 97—98, 2000—02, 05, 06, 08—17, 19—22, 24, 27), Cuşmaru Ilie (1945, 49, 58, 59, 61—63, 76, 77, 90, 92—94, 97, 2002, 05, 06, 10, 14—17, 19, 21, 27), Cuza Const. (1940, 45, 48—51, 55—57, 94), Feldhamer Zeilic (1877, 948, 51, 54—57, 60, 62, 71, 77), Grişaru Ianca (1940, 49, 60—63, 92, 94, 97, 2006, 10, 21), Iţicovici Mihel (1949, 50, 60, 62, 71, 97, 2001, 06, 21), Mihalache Adrian (1992, 93, 95, 97, 98, 2001, 04—06, 08—11, 17, 21—24), Popescu I. Claudiu (1948, 51, 54—56, 60, 62—64, 71, 76, 77), Şor Liber (1949, 50, 56, 57, 61, 62, 64, 71, 76, 77, 90). Clasa X-a. Baran N. (1918, 21, 24, 26, 40, 43, 45, 46, 57, 58, 63, 64, 76), Brînză M. Alex. (1946—58, 60—63, 66, 67, 70, 71, 76, 77), *Corduneanu Adrian* (1915, 16, 18, 20, 23—26, 28, 30, 31, 35, 40, 42—45, 47—55, 57—62, 66, 70, 71, 74—77, 81, 84, 90), Diaconescu Mihai (1875, 76, 78, 81, 82, 84, 88, 91, 93, 924, 48, 51, 60, 62, 74), Feldman Milu (1944, 50, 57, 61, 62, 90, 98, 2004, 06, 15, 23), Hagiu V. Ion (1947—51, 54—58, 60), Marcu Lili (1915—17, 19, 20, 24, 25, 31, 40, 43), Roman Valeriu (1878, 84, 91, 940, 44, 47, 48, 51, 54—57, 62. 76, 84).

LUGOJ. — Clasa IX-a. Boroancă Ion (1948, 51, 55, 57, 62, 64, 71, 76, 77, 92, 97, 2003, 04, 06, 07, 24), Daba Dumitru (1676, 917—21, 25, 31, 41, 45, 49, 52, 57, 61, 62, 64, 71, 76, 77, 92—96), Florea Dorel (1921, 41, 42, 49, 50, 52, 64, 76, 82, 83, 85, 90, 93), Dobrin P. (1917, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 58, 60—62, 74, 75).

MEDIAŞ. — Clasa VIII-a. Edgar Routil (1949, 54, 55, 57, 62, 64, E: 750, 52, 53, 65, 68, 72), Stănescu Dumitru (E: 735, 38, 47, 49—52, 57), absolvent Jilăveanu S. Gheorghe (1892, 906, 13, 17, 47—51, 54—56, 60—63, 65—67, 70, 71, 73—76, 85, 92, 97, 2001, 02, 10, 21).

NĂSĂUD. — Clasa X-a. Mătea Titus (1947, 48, 51, 54, 56, 62, 67, 71, 74—76, 93).

ORĂŞTIE. — Clasa X-a. Oprişa Aurel (1951, 55, 57, 71, 82, 83, 85, 95, 2020, 23).

ORADEA. — Clasa VIII-a. Mureşan Constantin (1955, 70, 71, E: 747—52, 58). Clasa IX-a. Bulzan Nicolae (1948, 50, 51, 55, 56, 60, 63, 92, 97, 98, 2005—08, 10), Held Petru (1947—50, 54, 56—58, 60—62, 64, 71, 76, 77), Waloner Eva (1875, 76, 79, 82—83, 914, 40, 43, 44, 54—57, 60, 61, 71, 76). Absolvent: Ilie Gheorghe (1947—49, 52, 54—57, 67, 71, 73—75), Mladin Stefan (1971, 73—75, 80).

ORAŞUL STALIN. — Clasa VIII-a. Moise Victoria (1882, E: 716, 20—22, 25—27, 29—31). Clasa IX-a. Jinga Gheorghe (1992, 97, 98, 2001, 04—06, 09—11, 17, 21, 34), Pielmuş Ioan (1940, 48, 52, 54—58, 60, 70, 71, 77), Popescu Alex. (1940, 48, 56, 57, 62, 70, 71, 76, 97, 2004), Rădulescu D. Const. (1948, 51, 56, 57, 60, 71, 76, 77, 92, 97, 2004—06, 21, 34), Rusu Gh. (1946, 50—55, 58, 60, 61), Teclici Viorel (1915, 18, 20—22, 24—26, 40, 43, 44). Clasa X-a. Buciu Pavel (1879, 80, 917, 20, 46, 47, 52, 53, 59, 62, 64, 77, 92, 2006, 07, 10, 23), Caltofeanu Constantin (1948, 51, 54—58, 60—62, 67), Han Erica (1946—49, 51, 54, 56, 57, 61, 64, 74—77). Oancea Rodica (1948, 51, 55, 56, 58, 61—63, 74, 77), Şerban A. Maria (1946, 48, 50, 51, 55, 58, 60, 63, 76, 77), Zătreanu Dan (1948, 51, 55—58, 60—64, 74, 75, 77). Absolvenţi: Badulescu Valeriu (1947—49, 55—57, 60, 62, 74—76), Coticeru Maria (1915, 24, 47—49, 51, 53, 57, 54, 58, 60, 61, 2006), Popa Alex. (1947, 49, 55—57, 60, 62, 67, 74, 75), Uţă Marin (1831, 32, 71, 72, 74—88, 91, 92, 900, 08).

PIETROŞANI (Hunedoara). — Clasa X-a. *Diţu Ionică* (1879, 80, 917, 18, 20, 24, 31, 43, 45, 47, 48, 51, 54—58, 60, 62—64, 67, 70—77, 92, 93, 97, 2001, 02, 04—06, 08, 10, 20, 23, 32), absolvent Stanciu Zaharia (1947, 48, 51, 54, 56, 58, 60, 61, 71, 76), tehnician Cătrina N. Constantin (1967, 71, 74).

PIATRA NEAMŢ. — Clasa VIII-a. Osgal Petre (1955, 70, 71, 74, 76, E: 747, 49, 50, 52, 53, 55, 58). Clasa X-a. Apopei Rodina (1926, 27, 47, 48, 51—54, 56, 58, 63, 74, 76, 77, 84), Caţ Edi (1875, 77, 80—82, 91, 915, 17, 25, 43, 47, 48, 50, 56, 58, 60—62, 90), Cimpoeşu Teodora (1908, 26, 27, 40, 42, 43, 45, 47, 48, 53, 54, 56, 60—62, 66, 74, 75), Gala Florin (1947, 48, 50, 54, 56, 57, 70—62, 71, 2006), Gavril V. Vasile (1920, 38, 47, 48, 50, 54, 56, 60—62, 71, 76, 2006), *Mitu Ion* (1901, 03, 14—17, 19—27, 31, 40, 41, 43, 47—58, 60—64, P), Murguleţ Dumitru (1920, 47, 48, 50, 54, 56, 57, 60, 62, 2023, P). Năstase Maria (1908, 26, 40, 42, 43, 45, 47, 48, 53, 54, 56, 60—62, 66, 74, 75), Tofan V. Mihai (1947—49, 51, 54, 55—57, 62, 64, 76, 84).

PITEŞTI. — Clasa VIII-a. Arsene Gheorghe (1944, 54, 55, 60, 71, 76, E: 747, 49, 50, 54, 58), Barbos Iuliu (1962, 70, 2024, 32, E: 744, 62, 65, 66, 68, 71—73), Barbu Gheorghe (1970, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 54, 57), Căldrean N. Severin (1955, 70, 76, E: 747, 49, 50, 51, 58, 62, 64, 66, 71, 74), Dinescu G. Nicolae (1955, 70, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 53,

55, 58), Dumitrescu Emil (1960, 70, 76, 92, E: 714, 747, 49—53), Gheorghiu Vasile (1971, 76, E: 747, 49—52, 54, 57), Ioanicescu Gheorghe (1971, 76, E: 747—54, 56), Lepădatu Gheorghe (1955, 70, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 55, 58), Nicolae R. Iulian (1955, 57, 60, 62—64, 70, 71, 76, E: 747, 49—54, 58, Petre Gh. Ion (1946, 55, 70, 76, E: 747, 49—52, 55, 58), Rorojan Nicolae (1955, 70, 71, E: 747, 49, 50, 52, 54, 57, 58), Rădulescu Marin (2023, E: 762—66, 71—74), Roşianu I. Clement (1970, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 54, 57), Sălceanu Stelian (E: 747, 49—54, 57), Teodorescu C. Alex. (1944, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 56, 58, 66, 67, 71, 74). Clasa X-a. Olaru Elefterie (1948, 52, 55, 56, 93, 97, 2006, 27, 21, 23), Marin Ion (1915—17, 19—26, 30, 32, 38, 40, 42—45, P), absolvent Ghiţulescu Iulian (1948, 51, 54—57, 60—63, 71, 73—75, 92, 96, 2002, 04).

PLOEŞTI. — *Şcoala medie « I. L. Caragiale »*. Clasa VIII-a. Bordeanu Constantin, (1937, 38, 51, 55, 60, 63, 64, 71, E: 714, 21, 35, 38, 47, 50—53), Ciobanu Romeo (1940 47, 51, 55, 57, 60, 62, 76, 93, E: 735, 37—39, 42, 43, 45, 47, 48, 50, 57, 58), Constantinopol Alex. (1940, 44, 47, 55, 60, 62, 64, 76, E: 735, 37—40, 42—45, 47—51, 54, 55, 57), Ionescu Ioan (2024, E: 727, 32, 35, 38, 47, 49, 50, 55, 57, 60, 73, 74), Magdu Marian (1947, 55, 2006, E: 735, 37, 38, 42, 44, 47, 50, 51, 57), Popescu A. Adrian (1949, 55, 57, 60, 62—64, E: 747, 49, 50, 58), Raţă Vasile (1955, 71, 2023, 24, E: 747, 49, 50, 52, 65, 75), Tănăsescu Anton (1957, 63, 71, 2023, E: 765—69, 71). *Clasa IX-a. Baltag Vasile* (1825, 908, 10, 17, 27, 42, 45, 65, 72, 83, 92, 93, 95—98, 2001, 03, 05—11, 14, 17—24, 26, 27, P, N), Bărbieru N. Pană (1948, 50, 51, 54—56, 58, 60, 61, 63, 67, 76), Bogdan Ion (1948, 54—56, 60—63, 76), *Căsăndroiu Tudor* (1922—25, 31, 40, 43—45, 48—52, 54—65, 70, 71, 74—77, 80, 81, 85, 92, 93, 96, 97), Cojocaru I. Alex. (1948, 50, 55, 56, 77, 92, 97, 2005, 06, 10), Drăgan Radu (1915, 17, 19, 21, 23—26, 31, 51). Drăghicescu Radu (1831, 43, 44, 71, 75, 77, 948, 55, 56, 62, 77), Geain Haim (1948, 55, 56, 60, 90, 92, 98, 2008, 10, 21), Georgescu D. Const. (1915, 40, 48, 50, 51, 55, 56, 60, 77, 2006), Ionescu Lucian (1915, 25, 40, 44, 47, 49—51, 55—57, 60, 62—64, 71, 76, 77, 88), Istrate I. Gheorghe (1875, 915, 22, 40, 45, 48—50, 51, 55—58, 60, 61, 63, 71, 75, 77, 85, 92, 97), Lecca Aurel (1915, 23—25, 44, 48—51, 54—58, 62—64, 71, 76, 77, 90), Lungu Liviu (1945, 48, 49, 51, 54—58, 60—64, 77, 82, 90, 92, 2005, 06, 10, 14, 15, 17, 21, P), Manolescu Dumitru (0947, 48, 50, 51, 54—56, 58, 60—62, 76), Minasian Eduard (1947, 48, 50, 51, 55—58, 60—63, P), Panaitescu M. Gheorghe (1922, 23, 25, 31, 40, 44, 48—52, 54—50, 62—64, 70—77, 81, 85, 90, 92, 96, 97), Popescu Const. (1947, 48, 50, 51, 54—58, 60, 61, 63, 78), Popescu N. Toma (1940, 44, 48, 50, 51, 54—56, 58, 61—64, 77), Rusu Dan (1884, 86, 91, 92, 98, 913, 47, 48, 50, 55, 60), Stănescu Teodor (1880, 98, 947—49, 51, 55—58, 60—62, 71, 76), Tudor Marin (1924, 31, 48—52, 54—58, 60—63, 70, 71, 76, 77, 90, 92), Tudorăncescu Nic. (1874, 75, 915, 24, 47—51, 54—56, 58, 61—63, 76, 77), *Clasa X-a.* Anghelescu P. Alexandru (1862, 72, 74—84, 88, 91, 92, 94, 97, 98, 902, 04, 05, 08, 11, 13—17, 20, 23, 24, 26, 31, 40, 43, 45, P), *Bogdan P. Mircea* (1874—86, 88, 90—92, 94, 98, 904, 08, 11, 13—18, 20—27, 30, 37, 39—44, 47—52, 54—58, 60—64, 71, 73, 74, 76, 77, 90, 92—94, P), Călăraşu Romeo (1875—83, 90, 948, 55, 56, 74, 75), Cernat I. Traian (1940, 47, 48, 51, 54—57, 61, 62, 64, 82), Damian Şerban (1877, 79, 80, 84, 85, 87, 91, 98, 99, 901, 02, 07, 08, 11, 13—15, 17, 19, 20, 22—24), Dinescu Sorin (1947—57, 60—63, 67, 68, 71, 73—77, 92, 93, 96, 97, 99, 2001, 06, 08, 15, 20, 21, 23, 24, 32, 33), Dinu C. Const. (1915, 17, 20, 24, 40, 43, 47, 48—51), Georgescu Sorin (1874—85, 90, 91, 94, 98, 902, 04, 08, 14), Hendrich Paul (1879, 80, 89, 91, 902, 14, 15, 17, 19, 22, 43), Miculescu Gh. (1943, 46, 48, 50, 51, 54—56, 60, 61, 63, 92, 2021), Petrescu M. Răzvan (1874—86, 88, 90—92, 94, 98, 99, 902, 11, 13, 14, 48, 51, 54—57, 63, 71, 74, 75, 77), Stefănescu D. Ion (1874, 76, 78—83, 85, 90—92, 94, 98, 902, 06, 08, 11, 13—15, 20, 24, 47,—48, 51, 54—56, 60, 74), Văgăunescu Gheorghe (1874—86, 88, 90—92, 94, 98, 900, 04, 08, 11, 13—15, 17, 18, 20, 22, 24, 40—42, 44), Viniţchi Victor (1874, 78, 79, 86, 88—91, 94, 900, 03, 04, 08, 14, 16, 18, 21, 22). *Şcoala medie de fete « A. Toma »*. Clasa X-a. Grecu Viorica (1918, 21, 22, 24, 25, 37, 47—51, 60), Mezinscu Anca (1877, 79, 80, 915, 17, 24, 31, 38, 40, 47—51, 54—57, 60, 62, 73, 90, 92), Nicolescu Teodorina (1948, 51 55, 56, 73—75, 96, 97, 2006, 07, 20, 23). *Şcoala medie mixtă serală*. Clasa X-a. Mirică Gh. Ion (1915, 24, 31, 40, 43, 47, 48, 51, 54—57, 60, 62, 71, 73—75. *Şcoala mixtă nr. 24*. Clasa VI-a. Gheorghiu A. Nicolae (E: 735, 37, 38, 40, 42, 47, 49—51, 58). *Absolvenţi:* Calotă M. Cornel (1875—84, 91, 92, 94, 915, 17, 20, 51, 54—58, 62, 71, 74, 75, 77, 92, P). Gorea Aristide (1685, 695, 721, 831, 903, 2015, P), *Nedelcu Mihai* (1835, 37, 44, 45, 47, 49, 51, 74—82, 84—91, 915, 17, 20, 40, 47—51, 53, 55—62, 71, 73, 74, 2006, 21).

PUCIOASA. *Şcoala medie mixtă*. Clasa X-a. *Bucur D. Gheorghe* (1716, 945—55, 57—67, 70, 71, 73—78, 81, 84, 90, 92—97, P), Frăţiloiu Gh. (1914, 27, 42, 45, 47, 49, 50, 52, 66, 70, 76, 77, 86, 90, 92, 93, 96, 97, 2003—11, 15, 20, 21, 32), Stan N. Dumitru (1808, 25, 900, 01, 03, 11, 70, 84, 92, 93, 96—98, 2001—10, 15, 20, 21).

RĂDĂUȚI. — Iftimie Viorel (1946—53, 55—64, 71, 76, 77, 81, 82, 84, 89, 90, 92—94, 96).

RÎMNICU-SĂRAT. Clasa VII-a. Popescu Cornel (1955, 57, 76, E: 747, 49, 50, 52, 55, 58, 68). Clasa IX-a. Ionescu Valeriu (1915—20, 23—25, 47—49, 51, 53—55), Jercan Mircea (1948, 64, 70, 72—74, 76, 77, 92, 95, 97, 2006, 08, 31).

REȘIȚA. Clasa VIII-a. Meilă Ana (1954, 55, 60, 64, 76, E: 747, 49, 50, 52). Clasa X-a. Farcaș D. Dan (1947—49, 51—57, 60—62, 64), Olteanu Romeo (1946—49, 52, 53, 56, 60, 61, 64).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa VIII-a. Boangiu I. Ilie (1940, 57, 64, 92, 96, 97, 2001, 06, 07, 21, 23, 32), Constantinescu I. Ion (1924, 54, 55, 62, 63, 71, 76, E: 738, 47, 49, 50, 52, 53, 58, 62, 65, 66, 68, 71, 72, 74), Mosor D. Tudor (1915, 24, 39, 54, 55, 62, 63, 71, 74, 76, 92, E: 735—38, 44, 45, 47, 49, 50, 52, 53, 58), Ulmamei Mircea (1951, 54—56, 63, 71, 76, 94, E: 747, 49, 50, 58). Clasa IX-a. *Bulucea D. Constantin* (1762, 875, 77, 80, 83, 90, 91, 98, 901, 08, 11, 15, 20, 23, 25, 31, 35, 38, 40, 42—45, 48, 49, 51, 54—64, 76, 77, 93), Cocoș Gh. Emil (1946—49, 51—57, 60, 62, 63, 71, 73, 74, 76), Constantinescu Const. (1948, 51, 54—56, 60—62, 76, 77, 92, 97, 98, 2005, 06, 21, 23, 24), Smadea Dumitru (1948, 51, 55, 56, 60, 71, 76, 77, 95, 2006, 21, 23), Urea I. Ion (1940, 43, 48, 51, 55—57, 60, 65, 77, 92, 98, 2006, 21). Clasa X-a. Băiașu D. Nic (1914, 15, 24, 47—49, 51, 54—57, 60—62, 68, 70, 71, 73—77, 90, 92, 97, 2003, 06, 21, 24), Burduază A. Const. (1832, 79, 914, 15, 24, 35, 42, 47, 48, 51, 54—56, 60—63, 68, 70, 71, 73—75, 77, 82, 90), Buricescu I. Gheorghe (1881, 918, 48, 54—56, 60—62, 67, 71, 73, 75,—77, 82, 90, 93), Chiriță I. Silvestru (1879, 89, 935, 47—51, 54—56, 58, 60—62, 67, 70, 72—77, 90, 92, 93, 95, 96), Enescu I. Nicolae (1935, 42, 46—52, 64, 66, 67, 70, 71, 73—77, 84, 90, 92—94, 96, 2004, 07), Georgescu D. Ion (1889, 916, 19, 25—27, 44, 46—64, 67, 70—77, 90, 92—96, P), Lazăr Gheorghe (1948, 51, 60, 66, 93, 96—98, 2000, 04, 06, 07, 10, 21, 23), Poajgă Const. (1946—64, 67, 71, 73—77, 90, 92, 93, 2003, 07, 10, 11, 15, 21, 23), Pușchilă I. Octavian (1946, 48—51, 53—57, 59—61, 63), Rotaru Paula (1949, 51, 62, 64, 92, 94, 96, 97, 2003, 06, 07, 10), Tugulea Eugen (1862, 79, 85, 89, 935, 42, 47—49, 51, 54—58, 60—63, 66, 72—77, 82, 84, 90, 93).

ROMAN. — Clasa VIII-a. Căruță Gheorghe (1949, 54, 92, 2023, E: 747, 49—51, 65, 67, 74), Ilioi C. Const. (1946, 49, 54, 55, 62, 64, 70, 71, 76, 92, 93, E:, 747, 49, 50, 52, 53), Ricinscki Cezar (1915, 54, 55, 70, 71, 92, 2009, E: 735, 38, 41, 43, 46, 47, 50, 52, 53, 58, 65, 68, 71—74). Clasa IX-a. Niculăiasa Vasile (1954, 58, 62, 70, 74, 97, 98, 2006, 10, 21). Clasa X-a. Dămător Petru (1924, 47, 48, 51, 55, 56, 58, 60—64, 84, 90), *Murărescu Gh.* (1874—92, 98, 900, 08, 11, 13—24, 26, 27, 30—32, P), Zaharia Gh. (1851, 55—58, 947—49, 51, 54).

ROȘIORII DE VEDE. — Școala medie mixtă. Clasa VIII-a. Alina Victoria (1970, 71, 74, 76, E: 725, 27, 42, 47, 48, 51, 58), Grigore Angela (1970, 71, 76, 2023, E: 747, 50, 62, 64, 66, 71). Clasa IX-a. Bozdog Marin (1947, 48, 50, 54—56, 60, 61, 63, 74, 75, 77, 85, 92, 95, 97, 98, 2006, 10, 21, 23, 24). Clasa X-a. Barbaru Ion (1948, 51, 54—56, 60, 65, 67, 74, 75, 2032).

SALONTA. Anonim (1875, 76, 79, 80, 82, 84, 92, 948, 50—52, 54—56, 60, 61).

SIBIU. Clasa VIII-a. Ancuța Victor (1949, 55, 57, 60, 62, 63, 76, 92, E: 747, 49—54). Clasa IX-a. Bîrsan Ioan (1960—62, 64, 92, 98, 2004—06, 08, 10, 21), *Receanu Victoria* (1872, 74—84, 86, 88, 91, 94, 98, 914, 15, 17, 47, 48, 54—58, 60, 61, 71, 77, 90).

SIGHET. Clasa VII-a. Tomoiagă M. Doru (E: 735—38, 41, 47, 49, 50, 63, 65, 71—73).

SIGHIȘOARA. Clasa IX-a. Bukowski Peter (1946, 48, 50, 51, 54—56, 62, 64, 67, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 82), absolvent Ingeborg Ambrosius (1915—26).

SIMERIA (Hunedoara). Clasa X-a. Ardelean Dumitru (1949, 51, 54, 57, 63, 71, 74—76), Gyenge Csaba (1917, 24, 43, 47—49, 51, 54, 56, 57, 61, 63, 74, 75).

SLOBOZIA (Reg. București). Clasa IX-a. Ivan Petre (1948, 50, 51, 55—57, 60, 62—64, 76).

SUCEAVA. — Clasa X-a. Creoleanu Nicolae (1947—51, 54—58, 60—62, 74—76), Hrincescu Constantin (1920, 47, 48, 50, 51, 54—56, 60, 61, 67, 74—76), Nimițan I. Ion (1946—49, 51, 54—57, 60—64, 92, 94).

TECUCI. — Clasa VI-a. Tătaru Petru (E: 736, 37, 45—47, 58, 62, 65, 73, 74, P). Clasa VIII-a. Diaconu A. Niculai (1955, 60, 2006, 23, E: 747, 50, 52, 53, 58, 65, 67, 68, 74), Vidrașcu Traian (1915, 38, 55, 70, 71, 76, E: 677, 699, 702, 07, 14, 31, 38, 41, 45). Clasa IX-a. Catană Costică (1940, 48, 55—57, 58, 61, 62, 70, 71, 76, 77), Grigoraș Neculai (1874, 76, 940, 43, 48, 55, 56, 70, 74). Clasa X-a. Andrei Valeria (1920, 41, 60, 67, 74, 75, 2006, 07, 32), Pîrvănescu Iulius (1917, 47—49, 51, 52, 55—58, 60—62, 71, 73—77, 90, 2021, 24, 32). Absolvenți: Munteanu A. Const. (1915—20, 24, 26, 27, 30, 37, 38, 40, 41, 43, 45, 47, 48, 51, 55, 56, 60, 62, 64), Sevastie I.G. (1947—58, 60—64, 71, 76, 77, 80, 90, 92, 93, 95—97, 2006, 07, 21), Stoica Radu (1874, 76—78, 80—82, 91, 92, 94, 951).

TIMIŞOARA. — *Student* Bărbulescu Ştefan (1915, 24, 25, 40, 43, 47—49, 51, 54—57, 60, 62, 68, 77, 83, 90, 2006, 10, 21, 23, 24). *Absolvent* Popa I. Gheorghe (1833, 41, 42, 44, 47, 81, 90, 92, 94, 948, 49, 54—57, 62). Şcoala medie de băieţi nr. 1 *Clasa VII-a.* Mihăileanu N. Alexandru (2115, E: 764, 66, 71, 73, 74, 86, 94, 97, 98), Bratu Dorin (E: 748, 54, 55, 58). *Clasa VIII-a.* Toma Corneliu (1954, 55, 76, 90, E: 747—53, 58). *Clasa IX-a. Mihăileanu N. Constantin* (1992*, 93*, 2001*, 41, 43, 49, 50, 53, 94, 97, 100, 04, 09, 11, 13, 24, 25, 28, 29, 31), Muştaina Doina (1948, 50, 52, 55, 56, 60, 61, 62, 77). *Clasa X-a.* Bărglăzan Mircea (1946—58, 60—64, 67, 70, 71, 74—77, 80, 84, 93), Nerodea Tiberiu (1966, 67, 71, 73, 92, 95, 97, 2006, 10, 20, 21, 23), Popa Laurenţiu (1894, 915, 22—24, 26, 45—48, 50, 51, 52, 54—58, 60—64, 71, 74,—77, 80, 90, 92, 93, 96, 97), Vasilievici Alex. (946, 47, 57, 63, 67, 73, 80, 92, 2004, 06, 07, 10, 21, 23, 32).

TÎRGOVIŞTE. Clasa VIII-a. Cîrnu Mircea (1875, 76, 79, 82, 915, 24, 26, 30, 32, 33, 35—39, 41, 54, 55, 57, 60, 62, 63, 71, 74, 76, 92). Clasa IX-a Brînzan I. Traian (1949—51, 54, 55, 57, 60, 62, 64, 76, 92, 95, 98, 2006, 11), Raicu Gh. Şerban (1948, 50, 51, 55, 56, 60—62, 76, 2006, 10, 21, 23, 24). Clasa X-a. Enescu S. Mihai (1947—57, 60—64, 71, 74, 76, 77, 84), Laţcu Gh. Dumitru (1947—51, 55—57, 60—62, 67, 73—75), *Stănciulescu M. Mihai* (1902, 08, 13—15, 17, 20, 22—24, 30, 40, 45—49, 51, 52, 54—56, 58—63, 73, 77, 78, 84, 85, 92—97, 2000, 03, 06, 10, 20, 32—34, P).

TÎRGU-JIU. — Clasa VII-a. Velicescu Mircea (1882, E: 677, 723—25, 27, 29—31, 33, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 45). Clasa IX-a. Călugăru V. (1940, 44, 48, 55—57, 74—77, 92, 97, 2016, 17, 23), Lupescu Const. 1787, 82, 91, 98, 914, 15, 40, 43, 44, 51, 55—57, 60), Popescu A. Sorin (1879, 80, 98, 901, 43, 45, 48, 50, 51, 55—57, 76, 77). *Clasa X-a.* Bărbuceanu S. Gheorghe (1920, 24, 41, 55, 57, 62, 64, 68, 71, 76), Bunget Ion (1916, 20, 24, 31, 35, 40, 43, 45, 49, 55, 58, 62, 63, 90, 2006, 07, 10, 21, 22, 32), Cătălina Ion (1921, 42, 62, 64, 92, 93, 95, 97, 98, 2003, 06—08, 10, 15, 20, 21), Popescu A. Iulian (1916, 22, 37, 58, 61, 65, 91, 93, 95, 97, 98, 2001—04, 06, 08, 10, 11, 15, 20, 21, 23, 32, P).

TÎRGU-MUREŞ. — Clasa VII-a. Sofronie Virgil (E: 747, 49, 50, 54, 55, 62, 65, 67, 71). Clasa VIII-a. Ghetmăneţ Octavian (1949, 55, 57, 60, 62—64, 76, E: 747—52, 54—57), Talparu Alex. (1949, 54, 55, 57, 70, 71, 76, 92, E: 747—54, 57, 59). Clasa X-a. *Hoţa Marcel* (1879, 80, 84, 900, 24, 25, 40, 43, 46—52, 54—58, 60—62, 64, 67, 71, 74—77, 80, 90, 97, 2001), Jovmir Lucian (1915—17, 19—21, 24, 40, 47—49, 54, 56—58, 60, 62, 71, 74, 75), Matei Aurel (1874—77, 79—84, 91, 915, 24, 25, 40—46, 48—52, 55—57, 60, 61, 63, 64, 68), Paşca Magdalena (1879, 87, 914, 20, 43, 47, 48, 51, 53—56, 60, 64, 63, 67, 71, 74, 75, 80, 2006).

TÎRGU-NEAMŢ — Clasa IX-a. Plăcintă Const. (1948—51, 53, 55—57, 60—64, 67, 71, 74, 76). Clasa X-a. *Focşăneanu I.* (1939, 47—58, 60—64, 67, 70—77, 80, 86, 90, 92, 93, 95, 96, 99, 2000, 02, 04), Răileanu Mihai (1945, 47—52, 54—58, 60—64, 67, 70—77, 90, 92), Văcaru M. Ion (1947—49, 51, 54, 55, 57, 60, 61, 73—76).

TÎRNĂVENI.— Şcoala medie « Alexandru Sahia ». Clasa IX-a. *Piso Pompiliu* (1874—87, 91, 92, 98, 99, 901, 03, 08, 12, 13—15, 17, 19—21, 23—25, 30, 31, 35, 40, 41, 43—52, 54—63).

TRUSEŞTI. — (Suceava) Clasa VIII-a. Carp Grigore (E: 738, 47, 50, 52, 64—66, 71, 72, 74). Clasa X-a. Chihan Isac (1879, 915, 17, 20, 24, 31, 39, 47—49, 51, 54—57, 60, 61, 63, 68, 73—77, 90, 92, 94, 2006, 10, 15, 21, 23), Ciubotaru C. Constantin (1956, 66, 70, 73, 79, 92—2011, 14—16, 20—23, 32), Creţu Gheorghe (1947—49, 51, 55—57, 61—64, 74, 76, 2008, 10, 15, 21), *Gorbănescu Gheorghe* (1947—49, 51, 53—57, 61, 66, 67), 71, 74, 75, 77, 92, 93, 95, 97, 98, 2000, 05—10, 15, 20, 21, 23, 32), Isac Vasile (1948, 51, 55—57, 61, 73, 74, 76, 2010, 15, 21), Serediuc I. Mihai (1947—49, 51, 55—57, 60, 61, 2006, 10, 15, 21), Slabu N. Vasile (1940, 47, 48, 55—57, 60, 74—76, 95, 97, 98, 2006, 10, 15, 21—23).

TURDA. — Clasa X-a. Racoviţan Dorin (1920, 43, 48—51, 55—58, 61, 74—77, 92).

TURNU MĂGURELE. — Clasa VIII-a. Grecu Eftimie (1914, 23, 28, 40, 71, E: 725, 27, 29—31, 42, 45, 47, 51—54, 67, 72, 74, 75). Clasa X-a. Niculescu M. Iulian (1953, 92—97, 2001—11, 15, 8, 20, 21, 23, 32—37, 39), absolventă Dragomirescu Elena (1996, 97, 2003—08, 20).

TURNU-SEVERIN. — Clasa VIII-a. Bresniceanu Alex. (1955, 76, 92, E: 747, 49, 50, 52, 54, 58), Crişmăroiu Const. (1970, E: 735, 38, 41, 47, 49, 50, 52, 58, 65, 74), Lăzăroniu Gheorghe (1992, E: 747—50, 52, 55, 58), Popii D. Virgil (1976, E: 747, 49—52, 58, 64, 66, 71, 73). Clasa IX-a. Găletuşe Stelian (1914, 48—50, 54—57, 60, 61, 71, 76). Clasa X-a. Ionescu Radu (1879, 80, 914, 47, 54, 67, 71, 75, 76, 95, 96, P), Moise Mihai (1948, 51, 54—57, 60, 62, 64, 67, 74—76).

URLAŢI (Ploeşti). — Clasa VIII-a. Lucaş Viorica (1939, 40, 76, E: 730, 38, 42, 43, 47—52, 58, 59). Clasa X-a. Tănase Nicolae (1879, 80, 940, 43, 48, 51, 54—58, 60—64, 74—77, 90).

URZICENI (Bucureşti).— *Turiga M. Const.* (1879, 80, 918, 20, 27, 45, 47—52, 54—58, 60—64, 70, 71—73, 77—90, 92, 95—97, 2003—08, 10, 11, 15, 21, P).

VASLUI. — Clasa VIII-a. Barbu Viorel (1915, 23, 24, 49, 54, 57, 62, 64, 70, 71, 74, 76, 81, E: 751, 54, 60).

VIDRA (București). — Clasa VIII-a. Sima P. Luca (1924, 47, 48, 51, 56, 71—76, 96, 97, 2004, 07, 23, E: 725, 29, 50, 52, 66, 71, 72, 74), Tutoreanu Emil (1971, E: 747, 49—51, 54, 55, 58, 68).

ZALĂU (Cluj). — Clasa VIII-a. Popp Florica (1875, 76, 78—81, 83—99, 90, 91, 94, 914). Clasa IX-a. Moroti Cornel (1879, 82, 83, 940, 48, 56, 62, 63, 76). Clasa X-a. Farcaș V. Beniamin (1940, 48—51, 54, 60—62, 64, 73, 7002, 06—08, 19—21), *Opriș A. Ioan* (1877, 78, 81, 87, 94, 908, 13—15, 19, 26, 27, 45, 47—51, 54—58, 60—62, 67, 71, 73—77, 90).

ERATĂ. — La problema 2203 în loc de *MR*, *MS* se va scrie *BR*, *BS*.

— La problema 2243 în loc de $R\sqrt[3]{\sin A}$ se scrie $R\sqrt[3]{\sin A}$.

Rezolvitorii de probleme sînt din nou rugați să scrie pe plicul cu soluții trimis lunar, numele, clasa, școala și localitatea unde este școala; iar soluțiile să fie așezate în ordinea numerică crescîndă.

— Se mai primesc soluții pînă la apariția numărului 10 (octombrie 1956), numai la problemele apărute în ultimele trei numere și la problemele: 2213, 2215, 2220, 2222, 2226, 2227, 2236, 2237, 2239, 2245 și următoarele, iar de la elementar începînd cu E: 819 și următoarele.

— Se primesc soluții la exercițiile propuse pentru școala de 7 ani numai de la elevii claselor a V-a, a VI-a a VII-a, și a VIII-a, precum și de la elevii școalelor profesionale sau de învățători.

— Pentru abonarea pe ultimele trei luni, adică pentru numerile ce urmează, 10, 11, 12, se poate achita la oficiul poștal suma de trei lei, prețul fiind de 1 leu exemplarul.

— Pentru anul 1957 nu s-a fixat costul abonamentului.

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— La exerciții și probleme propuse pentru școala de 7 ani se primesc rezolvări de la elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a și a VIII-a, de la elevii anului I al școlilor tehnice de maiștri sau din anul I și II ai școlilor profesionale, pedagogice de învățători. Nu se iau în seamă soluțiile problemelor propuse pentru școala de 7 ani dacă sînt trimise de elevi ai *claselor a IX-a, a X-a, ai școlilor medii tehnice sau de studenți* și nici soluțiile trimise după trecerea a trei luni de la publicarea problemelor respective sau de la publicarea eratei, dacă a fost cazul.

Rezolvitorii de probleme sînt rugați să nu trimită plicuri cu mai puțin de 10 soluții; trimiterea rezolvărilor și propunerilor să se facă numai odată în cursul aceleiași luni, așezînd problemele rezolvate în ordinea lor numerică așa cum vor fi apoi, anunțate la rubrica rezolvitorilor de probleme. Pe o parte a plicului se va scrie: localitatea, școala sau institutul, numele și adresa rezolvitorului, iar pe cealaltă parte, adresa: «Gazeta Matematică și Fizică», seria B, strada Academiei nr. 14, București I.

Din problemele primite nu se anunță cele incomplet rezolvate, cele care conțin greșeli, cele neglijent redactate, cele care au greșeli de calcul, desene neglijent făcute, sau sînt copiate după altele.

De asemenea, nu se publică problemele propuse de către colaboratori, dacă ele sînt cunoscute sau nu sînt însoțite de soluția lor clar redactată.

Pentru o redactare uniformă dăm indicațiile:

În loc de: $\widehat{AOB}$, să se scrie $\sphericalangle AOB$. În loc de: ΔABC, se va scrie triunghiul ABC. În loc de: $\sim$ triunghiurilor, se va scrie, asemănarea triunghiurilor. În loc de: Ducem prin A o $\perp$ pe AC, se va scrie, prin A ducem o perpendiculară pe AC.

Országos Pedagógiai Könyvtár

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu**
2. *Șiruri recurente* de **A. I. Marcușevici**
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev**
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov**
5. *Metoda inducției matematice* de **I. S. Sominski**
6. *Elemente de calculul probabilităților* de **Gh. Mihoc**
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu**
8. *Arii și logaritmi* de **A. I. Marcușevici**
9. *Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi* de **A. I. Ghelfond**
10. *Despre conice și alte curbe* de **O. Sacter**
11. *Maxime și minime geometrice* de **Ion Ionescu**
12. *Cometele* de **F. I. Zighel**
13. *Radioastronomia* de **S. Sklovski**
14. *Structura materiei* de **V. Atanasiu**
15. *Soarele și observarea lui* de **V. V. Saronov**
16. *Elemente de calcul vectorial* de **O. Kreindler**
17. *Experiențe simple cu ultrasunete* de **B. B. Kudriavțev**
18. *Nomograme* de **M. V. Pentkovski**
19. *Elemente de teoria congruențelor de drepte* de **A. Kahane**
20. *Culegere de probleme de geometrie* de **Gh. Țițeica** (*revăzută și complectată* de **G. D. Simionescu**)
21. *Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale* de **A. Halanay**
23. *Introducere în fizica solidului* de **V. Sergiescu**

Pentru abonarea pe 4 luni se poate achita la oficiul poștal local suma de 4 lei (prețul fiind 1 leu exemplarul)

Volumul VII, Nr. 9 (Gazeta Matematică și Fizică seria B) septembrie 1956

C. 876. – INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 **Prețul Lei 1 exemplarul**

E 1426
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - OMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VII — octombrie 1956

10

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII, Nr. 10 — octombrie 1956

SUMARUL:

	Pag.
1. *Omografia de Gh. D. Simionescu*	505
2. *Fizica şi sportul de Laszlo Heinrich* . . .	521
3. *Caleidoscop fizic*	530
4. *Notă matematică*	532
5. *Viaţa ştiinţifică: Congresul matematicienilor*	533
6. *Probleme rezolvate (1712; 1769; 1899; 1902; 1922; 1925; 1930; 1939; 1983; 2012; 2027; 2086; 2092; 2094; 2139; 2239)*	536
7. *Probleme propuse (2342—2369)*	545
8. *Chestiuni de examen (2370—2380)*	548
9. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E. 874—E: 884)*	550
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme*	551

ANUL VII 10 OCTOMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Boiangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Mészöly Könyvtár TULAJDONA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL VII * Nr. 10 octombrie 1956

OMOGRAFIA

Conf. univ. GH. D. SIMIONESCU

1. În geometria modernă, un loc important îl ocupă transformările de figuri, care constituie una din metodele cele mai generale pentru studiul proprietăţilor figurilor geometrice. Metoda transformărilor de figuri poate fi folosită pentru demonstrarea unor proprietăţi cunoscute, dar mai ales pentru cercetări de investigaţie, de descoperire a unor proprietăţi noi. Ea serveşte de asemenea la expunerea sistematică a unor capitole de geometrie (de exemplu, capitolul conicelor).

Transformările de figuri care se întîlnesc mai des sînt: *translaţia, rotaţia, simetria* (în raport cu o axă sau cu un punct), *omotetia, inversiunea, omologia* etc.

Omografia şi *involuţia* ocupă un loc aparte, deoarece ele transformă numai *mulţimea punctelor de pe o dreaptă în mulţimea punctelor de pe o altă dreaptă sau de pe aceiaşi dreaptă* şi de asemenea, *mulţimea dreptelor* (planelor) *unui fascicul în mulţimea dreptelor* (planelor) *altui fascicul sau aceluiaşi fascicul.*

Cu toate acestea transformarea omografică se foloseşte la rezolvarea multor probleme de geometrie; unele exemple vor fi date în cuprinsul acestui articol.

2. Pentru a înţelege cum se pot creia corespondenţe, în mod natural, între punctele unei drepte şi punctele altei drepte (sau aceleiaşi drepte) vom da aci cîteva exemple concrete; de la acestea, prin abstractizare, vom trece la problema generală.

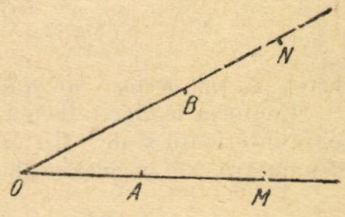


Fig. 1

Exemplu I. — *Pe două şosele rectilinii, care se intersectează în O, pornesc în acelaşi timp, din A şi din B, în sensurile $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$, două vehicule, cu vitezele v şi v'. Notînd cu M şi N poziţiile celor două vehicule, la timpul t după plecare, se cere să se stabilească relaţia dintre spaţiile $\overline{OM} = s$ şi $\overline{ON} = s'$ parcurse de ele.*

Notăm $\overline{OA} = a$ şi $\overline{OB} = a'$. Mişcările fiind presupuse uniforme, avem $\overline{AM} = vt$ şi $\overline{BN} = v't$. De aci rezultă (fig. 1)

$$(1) \qquad \overline{OM} = s = a + vt; \quad \overline{ON} = s' = a' + v't.$$

Eliminînd pe t între cele două egalităţi obţinem relaţia căutată,

$$(2) \qquad v's - vs' = av' - a'v.$$

Cantităţile a, a', v, v' sînt constante, iar mărimile *variabile* s şi s' sînt legate între ele printr-o relaţie de gradul I. Aceasta înseamnă că la o poziţie M a primului mobil corespunde *o singură poziţie* N a celui de al doilea şi reciproc.

Astfel mulţimea punctelor de pe şoseaua OA (considerată ca o dreaptă) este pusă în corespondenţă cu mulţimea punctelor de pe şoseaua OB (considerată tot ca o dreaptă).

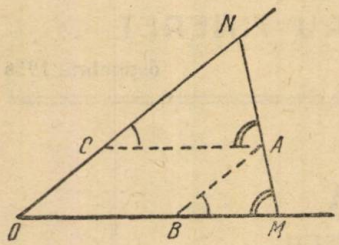


Fig. 2

Exemplul II. — *În unghiul format de două şosele rectilinii, care se intersectează în O, se află un stîlp A. Pe una din şosele se mişcă un automobil care are un far lateral M; acesta proiectează umbra stîlpului A în N, pe un zid situat de-a lungul celeilalte şosele. Se cere relaţia de legătură între lungimile* $\overline{OM} = x$ *şi* $\overline{ON} = x'$, *care dă poziţiile farului pe şosea şi a umbrei pe zid.*

Poziţia stîlpului A o determinăm ducînd paralelele $AB \parallel ON$ şi $AC \parallel OM$ (fig. 2) şi notînd $\overline{OB} = b$; $\overline{OC} = c$. Triunghiurile asemenea ABM şi NCA ne dau $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{CN}}$ sau $\dfrac{x-b}{b} = \dfrac{c}{x'-c}$, de unde rezultă relaţia cerută

$$xx' - cx - bx' = 0. \tag{3}$$

Şi aici relaţia este de gr. I în raport cu fiecare din variabilele x şi x', deci unui x dat îi corespunde un singur x' şi reciproc, adică unui punct M îi corespunde un singur punct N şi reciproc.

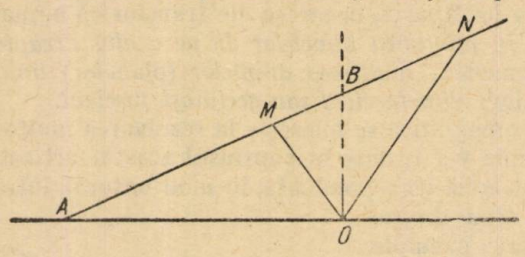


Fig. 3

Exemplul III. *O oglindă plană este acoperită, lăsîndu-se liberă o porţiune foarte mică în jurul unui punct O. Un punct M se mişcă pe o dreaptă care întîlneşte normala în O la oglindă în B, iar oglinda în A. Se cere relaţia care există între* $\overline{AM} = x$, *care dă poziţia punctului M şi* $\overline{AN} = x'$, *pe aceiaşi dreaptă, care dă poziţia imaginei N a punctului M.*

Conform legilor reflexiei, în triunghiul MON normala OB (fig. 3) este bisectoare interioară şi deci OA este bisectoare exterioară. Se ştie însă din geometria elementară, că în acest caz avem,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}} \text{ sau } \frac{x}{x'} = -\frac{x-a}{x'-a} \quad (\overline{AB} = a)$$

de unde rezultă relaţia cerută sub una din formele

$$2xx' - a(x + x') = 0 \quad \text{sau} \quad (4') \quad \frac{2}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'}. \tag{4}$$

Relaţia (4) fiind de gr. I atît în raport cu x cît şi cu x', rezultă că la o poziţie a lui M rezultă o singură poziţie a lui N şi reciproc, ceea ce este în concordanţă cu fenomenul fizic.

Transformarea omografică

3. În toate exemplele de mai sus, unui punct M de pe o dreaptă îi corespunde un singur punct N pe altă dreaptă (în exemplul III, pe aceiași dreaptă) și reciproc, unui punct N îi corespunde un singur punct M. Această corespondență fizică se traduce algebric prin relațiile (2), (3) și (4) care sînt toate de gradul întîi în raport cu variabilele (x și x' sau s și s') ce determină pozițiile punctelor M și N.

De la aceste exemple concrete să ne ridicăm la problema generală, abstractă.

Fie două drepte (Δ) și (Δ') într-un plan; pe fiecare din ele alegem cîte o origine O și U' și cîte un sens pozitiv, astfel că pozițiile punctelor M și M', situate respectiv pe (Δ) și (Δ'), sînt determinate prin *abscisele* lor $\overline{OM} = x$ și $\overline{U'M'} = x'$.

Prin *definiție* spunem că mulțimea punctelor M de pe dreapta (Δ) și mulțimea punctelor M' de pe dreapta (Δ') *sînt în corespondență omografică, dacă abscisele celor două puncte sînt legate printr-o relație de gr. I în raport cu fiecare din ele.* Punctul M și corespunzătorul său M' se numesc *puncte omoloage.*

Ecuația cea mai generală de gr. I în raport cu fiecare din variabilele x și x' este

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0, \tag{5}$$

deci, dacă abscisele punctelor M și M' satisfac o astfel de relație, ele sînt în corespondență omografică.

Relațiile (2), (3) și (4) sînt de această formă (în prima $A = 0$), în celelalte $D = 0$), deci punctele M și N din cele trei exemple se corespund omografic.

Orice înșiruire de puncte pe o dreaptă se zice că formează o *diviziune* avînd ca bază acea dreaptă. De aceea dacă două puncte M și M' descriu dreptele (Δ) și (Δ') și sînt legate printr-o relație de forma (5), se spune că ele formează *două diviziuni omografice cu bazele* (Δ) și (Δ').

În sfîrșit, lucrurile se pot privi și altfel. Din relația (5) se deduce

$$x' = -\frac{Bx + D}{Ax + C}, \quad \text{relație de forma} \quad x' = \frac{ax + b}{cx + d}; \tag{6}$$

la fiecare valoare dată lui x îi corespunde o singură valoare pentru x', deci la fiecare punct M corespunde un singur punct M', care se numește *transformatul* lui M prin omografia definită de relația (6).

Funcțiunea $x' = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, care efectuează o transformare omografică se numește *funcțiunea omografică*. Pentru ca această funcțiune să nu se reducă la o constantă trebuie ca $ad - bc \neq 0$. În adevăr, dacă $ad = bc$, atunci $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$; amplificînd prima fracție cu x se poate scrie $\dfrac{ax}{cx} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, deci $x' = \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ = constant. Aceasta este o transformare degenerată care nu ne interesează. Vom presupune deci, în tot ce urmează, că $ad - bc \neq 0$ sau referindu-ne la forma (6), că $AD - BC \neq 0$, adică transformarea este veritabilă.

Din punct de vedere geometric este esențial faptul că într-o corespondență omografică unui punct M îi corespunde un singur punct M', și reciproc, unui punct M' îi corespunde un singur punct M. Geometria analitică ne arată că ecuațiile dreptelor, cercurilor, planelor și sferelor sînt algebrice și prin urmare, dacă pentru construcția punctului M', corespunzător lui M, se folosesc numai drepte, cercuri, plane sau sfere și unui punct M îi corespunde un singur punct M', iar unui punct M' un singur punct M, *atunci se poate afirma că între M și M' există o corespondență omografică*, deoarece relația între abscisele lor este algebrică și nu poate fi decît de gr. I. În asemenea condiții nici nu mai este nevoie să se pună în evidență relația omografică, decît dacă se cere în mod special acest lucru.

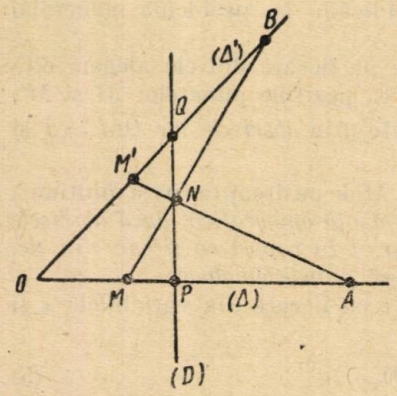


Fig. 4

Exemple. I. *Se dau două drepte* (Δ), (Δ') *care se întîlnesc în* O *și o a treia dreaptă* (D) *care nu trece prin* O. *Pe dreptele* (Δ), (Δ') *se iau punctele fixe* A, B, *iar pe* (D) *un punct variabil* N. *Dreapta* NA *taie pe* (Δ') *în* M', *iar* NB *taie pe* (Δ) *în* M. *Punctele* M *și* M' *formează două diviziuni omografice, cu bazele* (Δ) *și* (Δ').

În adevăr, să luăm punctul M oarecare pe (Δ); dreapta BM taie pe (D) într-un singur punct N, iar dreapta AN taie pe (Δ') într-un singur punct M' (fig. 4). Un raționament asemănător arată că unui punct M' de pe (Δ') îi corespunde un singur punct M pe (Δ). Deoarece construcția punctului M' s-a făcut numai cu drepte, punctele M și M' descriu două diviziuni omografice pe (Δ) și (Δ').

Cu titlul de exercițiu, dacă se notează $\overline{OA} = a$; $\overline{OB} = b$; $\overline{OP} = p$; $\overline{OQ} = q$, unde P, Q sînt intersecțiile dreptei (D) cu (Δ) și (Δ'), $\overline{OM} = x$, $\overline{OM'} = x'$, atunci scriind teorema lui Menelaus pentru triunghiul OPQ, tăiat de transversalele ANM' și BNM, se ajunge la relația omografică

$$(bp + aq - pq)\,xx' - ab\,(qx + px') + apbq = 0.$$

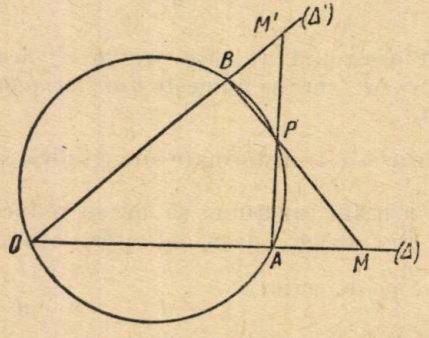


Fig. 5

II. *Fie două drepte* (Δ), (Δ') *care se taie în* O, *punctele fixe* A, B *pe aceste drepte și cercul* (Γ) *circumscris triunghiului* OAB. *Se unește un punct* P *variabil al cercului* (Γ) *cu* A *și* B, *iar dreptele* AP, BP *taie respectiv pe* (Δ') *și* (Δ) *în* M' *și* M. *Punctele* M *și* M' *sînt în corespondență omografică.*

În adevăr, pornind de la punctul M (fig. 5), pentru a construi pe M' ducem întîi dreapta MB care taie cercul (Γ) într-un singur punct P, iar dreapta AP taie pe (Δ') într-un singur punct M'. Pornind de la M' se arată la fel că se obține un singur punct M. Deoarece pentru construcția lui M' nu s-au folosit decît drepte și cercul (Γ), cele două puncte M și M' descriu pe (Δ) și (Δ') diviziuni omografice.

Proprietăţile transformărilor omografice

4. *Teoremă fundamentală. — O transformare omografică este perfect definită dacă se cunosc trei puncte* M_1, M_2, M_3 *şi transformatele lor* M_1', M_2', M_3'.

Relaţia omografică (5) conţine patru coeficienţi, însă presupunînd $A \neq 0$, împărţim cu A şi notînd $\frac{B}{A} = b$, $\frac{C}{A} = c$, $\frac{D}{A} = d$, obţinem:

$$xx' + bx + cx + d = 0. \tag{7}$$

Dacă se cunosc abscisele α, β, γ ale celor trei puncte M_1, M_2, M_3 şi abscisele α', β', γ' ale transformatelor lor, atunci scriind că fiecare pereche trebuie să verifice relaţia (7) obţinem sistemul

$$\begin{cases} \alpha\alpha' + b\alpha + c\alpha' + d = 0, \\ \beta\beta' + b\beta + c\beta' + d = 0, \\ \gamma\gamma' + b\gamma + c\gamma' + d = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Deoarece $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ şi deci $\alpha' \neq \beta' \neq \gamma'$, din sistemul (8) se pot calcula b, c, d care înlocuite în (7) determină transformarea. Dacă notăm

$$R = \alpha(\beta' - \gamma') + \beta(\gamma' - \alpha') + \gamma(\alpha' - \beta'); \; M = \alpha\alpha'(\gamma' - \beta') + \beta\beta'(\beta' - \gamma') +$$

$$+ \gamma\gamma'(\beta' - \alpha'); \; N = \alpha\alpha'(\gamma - \beta) + \beta\beta'(\alpha - \gamma) + \gamma\gamma'(\beta - \alpha);$$

$P = \sum \alpha\alpha'(\gamma\beta' - \gamma'\beta)$, rezolvarea sistemului (8) ne dă

$$b = \frac{M}{R}; \quad c = \frac{N}{R}; \quad d = \frac{P}{R}. \tag{9}$$

Pentru cei care cunosc determinanţii şi teoria sistemelor liniare, se observă că (7) împreună cu (8) formează un sistem de 4 ecuaţii cu trei necunoscute b, c, d care este compatibil dacă

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ \alpha\alpha' & \alpha & \alpha' & 1 \\ \beta\beta' & \beta & \beta' & 1 \\ \gamma\gamma' & \gamma & \gamma' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9'}$$

Aceasta nu este decît relaţia omografică determinată de cele trei perechi de puncte date.

5. *Fiind date trei drepte* (Δ), (Δ'), (Δ''), *dacă se trece de la punctele* M *ale dreptei* (Δ) *la punctele* M' *ale dreptei* (Δ') *printr-o transformare omografică* Ω_1, *apoi de la punctele* M' *ale dreptei* (Δ') *la punctele* M'' *ale dreptei* (Δ'') *printr-o altă transformare omografică* Ω_2, *atunci se poate trece direct de la* M *la* M'' *printr-o transformare omografică* Ω.

Se spune că prin compunerea a două omografii se obţine tot o omografie sau că produsul a două omografii este tot o omografie şi se exprimă simbolic acest lucru astfel: $\Omega = \Omega_1\Omega_2$.

Pentru demonstrație, arătăm că dacă avem

$$A_1 xx' + B_1 x + C_1 x' + D_1 = 0,$$
$$A_2 x'x'' + B_2 x' + C_2 x'' + D_2 = 0,$$

atunci între x și x'' există de asemenea o relație omografică.

În adevăr, relațiile se mai pot scrie,

$$\begin{array}{l|l} (A_1 x + C_1) x' + B_1 x + D_1 = 0 & -(A_2 x'' + B_2) \\ (A_2 x'' + B_2) x' + C_2 x'' + D_2 = 0 & (A_1 x + C_1) \end{array}$$

și înmulțind prima cu $-(A_2 x'' + B_2)$, a doua cu $(A_1 x + C_1)$, apoi adunînd, se elimină x' și se capătă relația omografică,

$$(A_1 C_2 - A_2 B_1) xx'' + (A_1 D_2 - B_1 B_2) x + (C_1 C_2 - A_2 D_1) x'' + C_1 D_2 - B_2 D_1 = 0.$$

Ținînd seamă că fiecare transformare admite o transformare inversă, se deduce din (5) și că între transformările omografice există transformarea identică ($x - x' = 0$, pe aceiași dreaptă), rezultă că transformările omografice formează un *grup*, grupul omografiilor.

6. *Punctele limită.* Fie (Δ), (Δ') două drepte pe care punctele omoloage M, M' descriu diviziuni omografice. Cînd punctul M tinde către infinit pe dreapta (Δ), punctul M' tinde, în general, către nu punct J' la distanță finită pe (Δ'); deasemenea, cînd M' tinde către infinit pe dreapta (Δ'), M tinde către un punct I al dreptei (Δ). *Punctele I și J' se numesc punctele limită ale celor două diviziuni omografice* și ele sînt omoloagele punctelor de la infinit, pe cele două drepte.

Dacă transformarea omografică este dată, atunci pozițiile punctelor limită se determină cu ușurință. În adevăr, din relația (5) rezultă

$$x' = -\frac{Bx + D}{Ax + C} = -\frac{B + \dfrac{D}{x}}{A + \dfrac{C}{x}} \quad \text{și} \quad x = -\frac{Cx' + D}{Ax' + B} = -\frac{C + \dfrac{D}{x'}}{A + \dfrac{B}{x'}}.$$

Făcînd în prima relație pe $x \to \infty$ și în a doua pe $x' \to \infty$ și notînd abscisele corespunzătoare lui J' și I cu x_0' și x_0, avem:

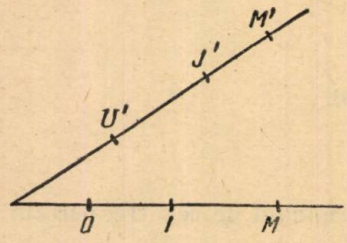


Fig. 6

$$(10) \qquad x_0' = -\frac{B}{A}; \quad x_0 = -\frac{C}{A}.$$

Dacă se aleg punctele limită ca origini pe cele două drepte, atunci relația omografică (5) capătă o formă mult mai simplă. Pentru a găsi această formă să notăm noile abscise $\overline{IM} = X$ și $\overline{J'M'} = X'$ și să observăm că oriunde s-ar găsi punctele M și M', ținînd seama de orientarea segmentelor, avem (fig. 6) $\overline{OM} = \overline{OI} + \overline{IM}$; $\overline{U'M'} = \overline{U'J'} + \overline{J'M'}$, adică

$$(11) \qquad x = x_0 + X; \quad x' = x_0' + X'$$

sau

$$x = -\frac{C}{A} + X; \quad x' = -\frac{B}{A} + X'.$$

Înlocuind pe x şi x' în (5) obţinem $Axx' = BC - AD$ sau

$$(12) \qquad XX' = K \text{ (const)} \quad \left(K = \frac{BC - AD}{A^2} \neq 0\right).$$

Exemple. — Să determinăm punctele limită, pe cale geometrică, la unele din exemplele luate mai înainte.

— Astfel, în *exemplul II de la paragraful* 2, cînd $M \to \infty$ avem $AM \parallel OB$, deci intersectează pe OC în C şi invers, cînd $N \to \infty$, $AN \parallel OC$ şi intersectează pe OB în B; punctele limită sînt chiar B şi C. Din cele expuse la exemplul citat rezultă $\overline{BM} \cdot \overline{CN} = \overline{OB} \cdot \overline{OC}$, deci $XX' = bc = \text{const}$.

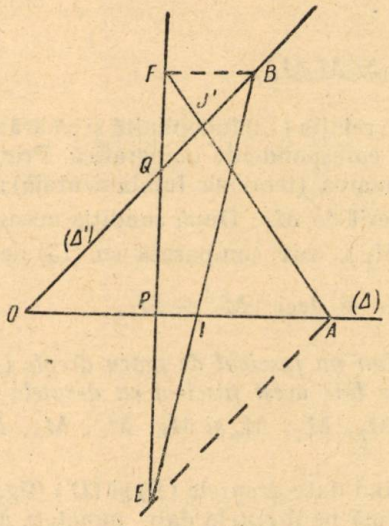


Fig. 7

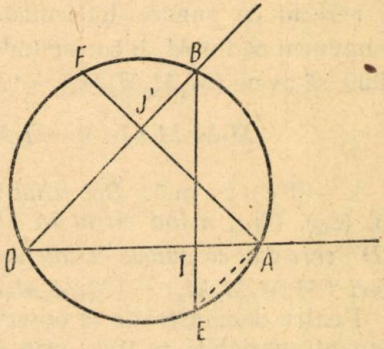


Fig. 8

— În exemplul I, paragraful 3, cînd $M \to \infty$, $MB \parallel \Delta$, deci se duce prin B paralela la (Δ) pînă taie pe (D) în F; FA taie (Δ') în J'. Analog, paralela prin A la (Δ') taie pe (D) în E, iar BE taie pe (Δ) în I. Punctele limită sînt I şi J' (fig. 7).

— În exemplul II, din acelaşi paragraf, procedeul este asemănător, numai că dreapta (D) este înlocuită cu cercul ( ). Figura 8 arată cum se determină punctele limită.

7. *Condiţia necesară şi suficientă ca două diviziuni pe două drepte* (Δ) *şi* (Δ'), *să fie omografice este ca raportul anarmonic a patru puncte de pe* (Δ) *să fie egal cu raportul anarmonic al omoloagelor lor pe* (Δ').

a) Condiţia este necesară. Presupunem că cele două diviziuni sînt în corespondenţă omografică; luînd punctele limită ca origini, relaţia între abscise este $xx' = k$, deci pentru patru perechi de puncte trebuie să avem

$$x_1x_1' = x_2x_2' = x_3x_3' = x_4x_4' = k.$$

Rapoartele anarmonice din enunţ sînt:

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} : \frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}$$

şi

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = \frac{x_1' - x_3'}{x_2' - x_3'} : \frac{x_1' - x_4'}{x_2' - x_4'} = \frac{\frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_3}}{\frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_3}} : \frac{\frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_4}}{\frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_4}} =$$

$$= \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

prin urmare:

$$(13) \qquad (M_1M_2M_3M_4) = (M_1'M_2'M_3'M_4').$$

b) *Condiţia este suficientă.* Presupunem relaţia (12) îndeplinită şi să arătăm că cele patru perechi de puncte se găsesc în corespondenţă omografică. Primele trei perechi de puncte determină transformarea (teorema fundamentală); să presupunem că lui M_4 îi corespunde M_4'' diferit de M_4'. După condiţia necesară trebuie să avem $(M_1M_2M_3M_4) = (M_1'M_2'M_3'M_4'')$, care comparată cu (13) ne dă

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = (M_1'M_2'M_3'M_4'') \quad \text{şi deci} \quad M_4'' \equiv M_4'.$$

8. — Teoremă. *Dat fiind într-un plan un fascicul de patru drepte* (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4), *având vîrful în* Ω, *dacă se taie acest fascicul cu dreptele* (D) *şi* (D') *care dau ca puncte de intersecţie* M_1, M_2, M_3, M_4 *şi* M_1', M_2', M_3', M_4', *atunci* $(M_1M_2M_3M_4) = (M_1'M_2'M_3'M_4')$.

Pentru demonstraţie să observăm că fiind date dreptele (D) şi (D') (fig. 9), o dreaptă variabilă ce trece prin Ω determină pe dreptele date punctele M şi M' care sînt în corespondenţă omografică (exemplul II, paragraful 2), deci patru puncte oarecare din prima diviziune şi omoloagele lor au acelaşi raport anarmonic.

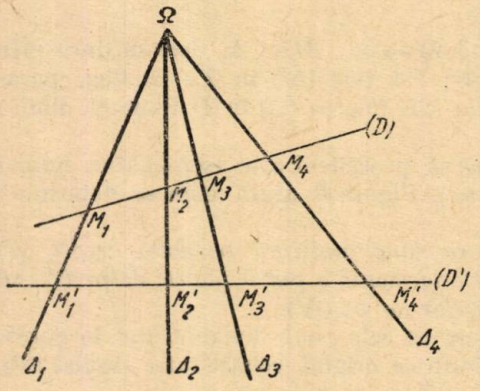


Fig. 9

Această teoremă cunoscută arată că raportul anarmonic al celor patru puncte este acelaşi, oricare ar fi dreapta cu care se taie fasciculul, fapt care se interpretează în două feluri: *a)* că proprietatea aparţine fasciculului, deci se spune că raportul anarmonic constant este al fasciculului; *b)* că raportul anarmonic se păstrează printr-o proiecţie centrală (dintr-un punct fix), deci este *invariant proiectiv.*

Observare. Cele două diviziuni omografice determinate de o dreaptă variabilă ce trece prin Ω au o caracteristică specială, anume că punctul ω de intersecţie al dreptelor (D) şi (D') coincide cu omologul său, deoarece raza $\Omega\omega$ este unică.

9. *Teorema reciprocă. — Dacă în două diviziuni omografice avînd ca baze dreptele* (D) *şi* (D'), *punctul de intersecţie al celor două drepte coincide cu omo-*

logul său, atunci toate dreptele care unesc perechi de puncte omoloage sînt concurente.

Să considerăm două perechi de puncte omoloage M_1, M_1' şi M_2, M_2' şi să notăm cu Ω punctul comun al dreptelor M_1M_1', M_2M_2'; urmează să demonstrăm că dacă M, M' este o altă pereche de puncte omoloage, dreapta MM' trece prin Ω. Pentru aceasta ducem dreapta ΩM şi să presupunem că ea taie pe (D') în M'' diferit de M'. Fie ω intersecţia dreptelor (D) şi (D'), care coincide cu omologul său. Atunci pe baza teoremei precedente trebuie să avem $(\omega M_1M_2M) = (\omega M_1'M_2'M'')$. De altă parte însă, patru puncte şi omoloagele lor au acelaşi raport anarmonic, deci $(\omega M_1M_2M) = (\omega M_1'M_2'M')$, de unde rezultă $(\omega M_1'M_2'M'') = (\omega M_1'M_2'M')$ prin urmare $M'' \equiv M'$. Teorema este demonstrată.

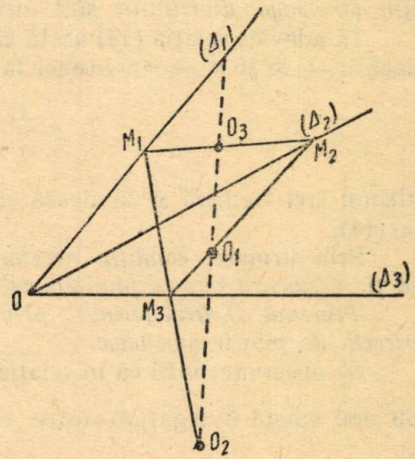


Fig. 10

10. *Aplicaţie. Să se demonstreze că dacă vîrfurile M_1, M_2, M_3 ale unui triunghi se mişcă pe trei drepte concurente (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) şi dacă două din laturi M_1M_2, M_2M_3 trec prin două puncte fixe O_3, O_1, atunci şi latura a treia M_3M_1 trece printr-un punct fix O_2 care este coliniar cu O_3 şi O_1.*

În adevăr, M_1 şi M_3 (fig. 10) descriu pe (Δ_1) şi (Δ_3) două diviziuni omografice, deoarece M_1O_2 taie pe (Δ_2) într-un singur punct, iar M_2O_1 taie pe (Δ_3) de asemenea într-un singur punct, deci unui punct M_1 îi corespunde un singur punct M_3. Este evident că şi invers, unui punct M_3 îi corespunde un singur punct M_1; construcţia este făcută numai prin linii drepte.

Se observă că dacă M_2 vine în punctul comun ω al celor trei drepte, atunci M_1 şi M_3 vin tot în ω, deci ω coincide cu omologul său. Conform teoremei precedente M_1M_3 trece printr-un punct fix O_2. Apoi dacă M_1 vine la intersecţia lui (Δ_1) cu OO_3, atunci şi M_3 vine la intersecţia lui O_1O_3 cu (Δ_3), deci punctul fix aparţine dreptei O_1O_3.

Transformări omografice particulare

11. *Diviziuni asemenea.* Dacă în relaţia omografică (5) considerăm $A = 0$, atunci rămîne

$$Bx + Cx' + D = 0. \tag{14}$$

Să arătăm că în acest caz dacă M, N sînt două puncte oarecare pe dreapta (Δ) şi M', N' transformatele lor pe (Δ'), atunci $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \text{const.}$ Fie α, β abscisele lui M şi N şi α', β' abscisele lui M' şi N'. Fiecare pereche de puncte trebuie să satisfacă relaţia (14), deci

$$B\alpha + C\alpha' + D = 0; \qquad B\beta + C\beta' + D = 0,$$

de unde prin scădere se capătă $B(\beta - \alpha) + C(\beta' - \alpha') = 0$ sau $\frac{\beta - \alpha}{\beta' - \alpha'} = -\frac{C}{B} = \text{const.}$ Însă, $\overline{MN} = \beta - \alpha$; $\overline{M'N'} = \beta' - \alpha'$, deci $\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \text{const.}$

Deoarece raportul între două segmente omoloage rămîne constant, se spune că astfel de diviziuni sînt *diviziuni asemenea.*

Proprietate caracteristică. În două diviziuni asemenea punctele la infinit pe cele două drepte de bază sînt puncte omoloage. Reciproc, dacă punctele la infinit sînt omoloage, diviziunile sînt asemenea.

În adevăr, relaţia (14) arată că dacă $x \to \infty$, atunci şi $x' \to \infty$. Reciproc, dacă $x \to \infty$ şi $x' \to \infty$, atunci în relaţia omografică (5), pusă sub forma

$$A + \frac{B}{x'} + \frac{C}{x} + \frac{D}{xx'} = 0,$$

ultimii trei termeni se anulează şi rămîne $A = 0$, adică relaţia (5) se reduce la (14).

Prin urmare, *condiţia necesară şi suficientă ca două diviziuni omografice să fie asemenea este ca punctele de la infinit pe cele două drepte să fie omoloage.*

Teoremă. O transformare prin diviziuni asemenea este definită prin două perechi de puncte omoloage.

Să observăm întîi că în relaţia (14) trebuie ca $B \neq 0$ şi $C \neq 0$, căci altfel nu mai există o legătură între x şi x'. Dacă punem $-\frac{B}{C} = m$; $-\frac{D}{C} = n$, atunci relaţia (14) devine

$$x' = mx + n. \tag{15}$$

Scriind că abscisele α, α' ale unei perechi de puncte omoloage M_1, M_1' şi β, β' a unei a doua perechi de puncte omoloage M_2, M_2' verifică relaţia (15), se formează un sistem din care se scoate $m = \frac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta}$ şi $n = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha - \beta}$. Relaţia (15) devine

$$(\alpha' - \beta')x - (\alpha - \beta)x' + \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0 \tag{16}$$

şi este perfect determinată.

12. *Diviziuni egale. Dacă raportul a două segmente omoloage în două diviziuni asemenea este egal cu* 1 (adică segmentele sînt egale), *diviziunile se numesc egale.*

Am văzut că $\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = -\frac{C}{B}$ şi am notat $-\frac{B}{C} = m$. Deci ca două diviziuni să fie egale trebuie ca $-\frac{C}{B} = 1$ sau $m = 1$. Relaţia (15) devine atunci

$$x' = x + n, \tag{17}$$

care depinde de un singur parametru n, deci pentru determinarea transformării este de ajuns să se cunoască o singură pereche de puncte omoloage.

Originii O de pe dreapta (Δ), pentru care $x = 0$, îi corespunde punctul O' dat de $x' = n$. Dacă se ia O' ca nouă origină, abscisa nouă fiind X', atunci $x' = n + X'$ şi relaţia (16) ia forma $X' = x$.

13. *Exemple.* I. *Fie două drepte paralele* (Δ), (Δ') *şi un punct O în afara dreptelor. O dreaptă variabilă ce trece prin O determină pe cele două drepte două diviziuni asemenea.*

În adevăr, ducînd două raze oarecare OMN' şi ONN' (fig. 11), precum şi perpendiculara OPP', se vede imediat că $\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \text{const}$, deci diviziunile sînt asemenea.

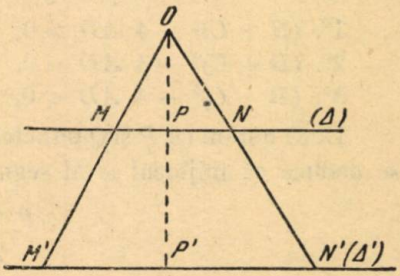


Fig. 11

II. *Dacă două drepte paralele* (Δ), (Δ') *sînt tăiate de o dreaptă variabilă care rămîne paralelă cu ea însăşi, punctele de intersecţie cu cele două drepte date formează diviziuni egale.*

Observare. Primul exemplu din paragraful 2 constituie un exemplu de diviziune asemenea, deoarece relaţia (2) este de forma (14), adică nu conţine termenul în ss'.

Diviziuni omografice de aceeaşi bază

14. Relaţia omografică (5) poate stabili legătura între abscisele a două puncte M şi M' aşezate pe aceiaşi dreaptă (Δ) şi măsurate de la o origină comună O. În acest caz mulţimea punctelor M de pe dreapta (Δ) se transformă în ea însăşi, punctele fiind luate în altă ordine. Transformarea este efectivă dacă $AD - BC \neq 0$. Se spune că în acest caz avem *două diviziuni omografice de aceiaşi bază.*

Proprietăţile transformărilor omografice se păstrează. Astfel:

a) transformarea este determinată de trei perechi de puncte omoloage;

b) produsul a două omografii de aceiaşi bază este o omografie de aceiaşi bază;

c) punctele limită I şi J' se păstrează cu aceiaşi definiţie, numai că ele sînt aşezate pe aceiaşi dreaptă, avînd abscisele $x_0 = -\frac{C}{A}$ şi $x_0' = -\frac{B}{A}$; rezultă că $\overline{IM} \cdot \overline{J'M'} = K$;

d) raportul anarmonic a patru puncte oarecare este egal cu raportul anarmonic al punctelor transformate.

Dacă $A = 0$ avem două diviziuni asemenea cu aceiaşi bază. Dacă relaţia omografică se reduce la $x' = x + n$, atunci avem două diviziuni egale de aceiaşi bază.

În particular, dacă $x' = x$ $(n = 0)$ avem *transformarea identică.*

15. *Punctele duble.* Se pune întrebarea firească: dacă pe aceiaşi dreaptă avem două diviziuni omografice, e ista pe acea dreaptă puncte care să aparţină deodată ambelor diviziuni? Dacă există, ele se numesc *puncte duble* sau *puncte unite* ale celor două diviziuni. De la început putem afirma că nu pot e ista trei asemenea puncte, deoarece trei perechi de puncte omoloage determină transformarea şi atunci trei puncte coincizînd cu omoloagele lor, cele două diviziuni coincid.

Prin urmare, putem avea cel mult două puncte duble. Pentru a le găsi trebuie să facem în relația omografică (5), $x = x'$ $(A \neq 0)$. Rezultă ecuația

$$Ax^2 + (B + C)\, x + D = 0 . \tag{18}$$

Se deduce imediat că putem avea trei cazuri:

1°. $(B + C)^2 - 4\, AD > 0$, punctele duble sînt reale;
2°. $(B + C)^2 - 4\, AD = 0$, » » » confundate;
3°. $(B + C)^2 - 4\, AD < 0$, » » » imaginare.

Dacă notăm cu P și Q punctele duble și cu p și q abscisele lor, atunci din (18) se deduce că mijlocul ω al segmentului $\overline{PQ}$ are abscisa

$$\frac{p + q}{2} = -\frac{B + C}{2A} .$$

Ținînd seamă de formulele (10) care dau abscisele punctelor limită, rezultă că mijlocul segmentului $\overline{IJ'}$ are abscisa $\frac{x_0 + x_0'}{2} = -\frac{C + B}{2A}$, deci coincide cu mijlocul ω al segmentului $\overline{PQ}$.

Observare. Dacă diviziunile sînt asemenea, atunci $A = 0$ și o rădăcină este infinită; a doua rădăcină este $x = -\frac{D}{B + C}$. Deci diviziunile asemenea au un punct dublu la infinit și unul la distanță finită. Dacă diviziunile sînt egale, atunci $-\frac{C}{B} = 1$, deci $B + C = 0$; rezultă că și al doilea punct dublu este la infinit.

Fie P și Q punctele duble a două diviziuni omografice de aceiași bază, M un punct oarecare și M' transformatul său în cealaltă diviziune. Atunci se poate enunța următoarea

Teoremă. a) *Raportul anarmonic $(PQMM')$ este constant.*

b) *Reciproc, dacă P și Q sînt două puncte fixe, iar M și M' mobile și dacă raportul anarmonic $(PQMM')$ este constant, atunci punctele M, M' descriu două diviziuni omografice care au P și Q ca puncte duble.*

a) Pentru demonstrație să mai considerăm o pereche de puncte omoloage *fixe* M_1 și M_1'. Atunci conform paragrafului 7, *avem*:

$$(PQMM_1) = (PQM'M_1'), \text{ adică } \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} : \frac{\overline{M_1P}}{\overline{M_1Q}} = \frac{\overline{M'P}}{\overline{M'Q}} : \frac{\overline{M_1'P}}{\overline{M_1'Q}} .$$

Aceasta se mai scrie însă, și sub forma:

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} : \frac{\overline{M'P}}{\overline{M'Q}} = \frac{\overline{M_1P}}{\overline{M_1Q}} : \frac{\overline{M_1'P}}{\overline{M_1'Q}} = \text{const. sau } (PQMM') = (PQM_1M_1') = \text{const.},$$

ceea ce era de demonstrat.

b) Dacă $\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} : \frac{\overline{M'P}}{\overline{M'Q}} = k$ $(k \neq 1$; diviziunile nu sînt asemenea),

atunci $\frac{p - x}{q - x} : \frac{p - x'}{q - x'} = k$ sau $(1 - k)\, xx' - (q - kp)\, x - (p - kq)\, x' + (1 - k)\, pq = 0.$

Am obținut o relație omografică între x și x', deci M și M' descriu două diviziuni omografice de aceiași bază. Pentru determinarea punctelor duble facem $x = x'$ și găsim

$$(1 - k)[x^2 - (p + q)x + pq] = 0, \quad (k \neq 1)$$

de unde se vede că punctele duble au abscisele $x = p$ și $x = q$, adică sînt tocmai punctele P și Q.

16. Ne propunem să vedem ce devine relația omografică (5) dacă luăm ca origină mijlocul ω al segmentului format de punctele duble P, Q (care coincide cu mijlocul lui $\overline{IJ'}$). Abscisa lui ω este $-\dfrac{B+C}{2A}$ și dacă notăm cu X și X' noile abscise a două puncte omoloage M, M', formulele (11) ne dau

$$x = X - \frac{B+C}{2A}; \quad x' = X' - \frac{B+C}{2A}. \tag{19}$$

Înlocuind în (5) și făcînd calculele găsim

$$XX' + \frac{B-C}{2A}(X - X') - \frac{(B+C)^2 - 4AD}{4A^2} = 0. \tag{20}$$

Notînd $\lambda = \dfrac{B-C}{2A}$; $\mu = \dfrac{(B+C)^2 - 4AD}{4A^2}$, relația ia forma

$$XX' + \lambda(X - X') - \mu = 0. \tag{20'}$$

Dacă socotim pe ω aparținînd primei diviziuni, atunci omologul său ω' în a doua diviziune se obține făcînd în (20') $X = 0$. Rezultă $X'_0 = -\dfrac{\mu}{\lambda}$. Dacă socotim pe ω aparținînd celeilalte diviziuni, atunci omologul său ω_0 în prima diviziune se obține făcînd $X' = 0$. Găsim $X_0 = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Cele două omoloage ale lui ω, socotit succesiv ca aparținînd fiecărei diviziuni, sînt simetrice față de ω.

Expresia lui μ arată că dacă punctele duble sînt reale, atunci $\mu > 0$, dacă punctele duble sînt confundate $\mu = 0$ și dacă punctele duble sînt imaginare $\mu < 0$.

În cazul *punctelor duble confundate*, ele se suprapun cu ω, mijlocul lui $\overline{IJ'}$, ceea ce se verifică imediat pe forma (20') făcînd $X = X'$. Deoarece $\mu = 0$ relația (20') ia forma

$$\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} = \frac{1}{\lambda} = \text{const}, \tag{21}$$

caracteristică acestui fel de corespondență omografică.

17. *Construcția punctelor duble.* Problema se pune numai în cazul punctelor duble reale, distincte, de i $\mu > 0$. Din relația (20') deducem

— abscisele punctelor duble (făcînd $X = X'$) $X_{p,q} = \pm\sqrt{\mu}$;

— abscisele punctelor limită $X_i = \lambda$; $X'_j = -\lambda$,

— omoloagele lui ω, socotit pe rînd în cele două diviziuni și determinate mai înainte, $X'_0 = -\dfrac{\mu}{\lambda}$; $X_0 = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Rezultă imediat $X_p^2 = X_0 X_i = X_0' X_j'$ sau între segmente,

$$\overline{\omega P}^2 = \overline{\omega Q}^2 = \overline{\omega I} \cdot \overline{\omega \omega_0} = \overline{\omega J'} \cdot \overline{\omega \omega'}. \tag{22}$$

Construcţia lui $\overline{\omega P}$ se face cu una din construcţiile mediei geometrice cînd se cunoaşte I, J', ω, ω'. Figura 12 arată cele două construcţii mai exacte (construcţia cu tangenta la cerc este cea mai neprecisă): $\overline{\omega E} = \overline{\omega F} = \overline{\omega P} = \overline{\omega Q}$.

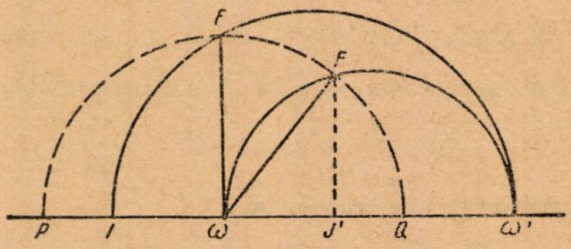


Fig. 12

18. *Exemple.* I. Considerăm două drepte (Δ) şi (D), care se taie în P şi două puncte A, B exterioare dreptelor. N fiind un punct variabil pe (D), dreptele AN, BN taie pe (Δ) în M şi M'. Cînd N descrie dreapta (D) punctele M şi M' descriu două diviziuni omografice pe (Δ).

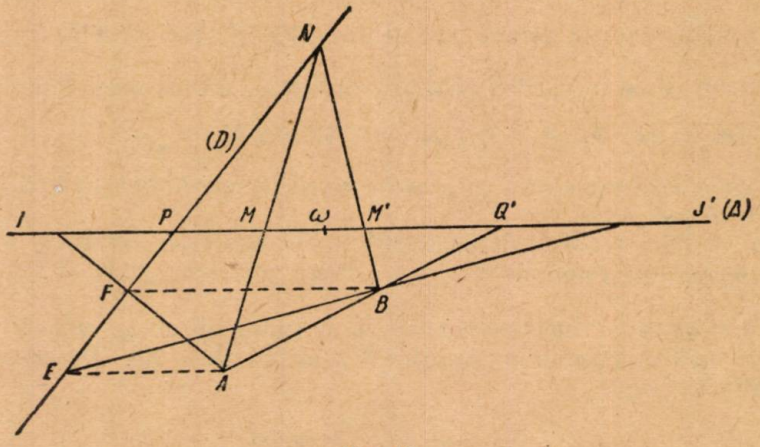


Fig. 13

În adevăr, dacă se uneşte A (fig. 13) cu un punct M oarecare pe (Δ), se obţine un singur punct N, care unit cu B, dă un singur punct M'. Construcţia se face numai cu drepte, deci corespondenţa este omografică. Punctele duble sînt P şi intersecţia Q a dreptei AB cu (Δ), deci reale şi distincte dacă AB nu trece prin P. Punctele limită se obţin astfel: cînd $M' \to \infty$, BM' este paralelă cu (Δ) şi taie pe (D) în F, iar FA întîlneşte pe (Δ) în I; cînd $M \to \infty$, AM devine paralelă la (Δ) şi taie pe (D) în E, iar BE taie (Δ) în J'. Punctele limită sînt I şi J'. Se verifică foarte uşor că $\overline{J'Q} = \overline{PI}$.

II. Pe o dreaptă (Δ) luăm un punct O (fig. 14) şi ridicăm perpendiculara pe (Δ). Printr-un punct A al perpendicularei ducem segmentul fix $\overline{AB} = a$. O dreaptă variabilă ce trece prin A întîlneşte dreptele OB, (Δ) respectiv în N şi M'. Fie M proiecţia lui N pe (Δ); punctele M, M' descriu pe (Δ) două diviziuni omografice cu punctele duble confundate în O. Cînd $M' \to \infty$, N vine în B, iar M vine în I, proiecţia lui B pe (Δ); cînd $M \to \infty$, $AN \parallel OB$ şi taie pe (Δ) în J'; acestea sînt punctele limită şi $J'O = OI = a$.

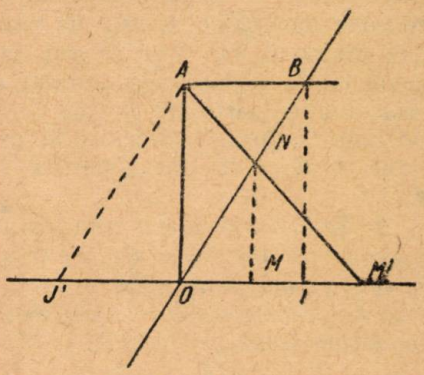


Fig. 14

Ca verificare să stabilim relaţia între $\overline{OM} = X$ şi $\overline{OM'} = X'$. Dacă notăm cu P punctul unde paralela la (Δ) prin N taie pe OA, atunci se ştie că în trapezul $ABM'O$ avem relaţia

$$\frac{1}{\overline{OM'}} + \frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{PN}} \text{ ; deci } \frac{1}{\overline{OM}} - \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{1}{\overline{AB}} \text{ sau } \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} = \frac{1}{a},$$

care este de forma (21).

III. În exemplul I de mai sus, dacă dreapta (D) este paralelă cu (Δ) (fig. 15), diviziunile descrise de M şi M' pe (Δ) sînt asemenea. În adevăr, cînd $M \to \infty$, atunci $N \to \infty$ şi prin urmare $M' \to \infty$; punctele la infinit sînt omoloage şi diviziunile sînt asemenea. Notînd raportul distanţelor de la A la (D) şi (Δ) cu K_1 şi raportul distanţelor de la B la aceleaşi drepte cu K_2, iar proiecţia

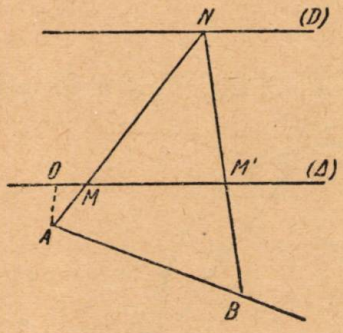


Fig. 15

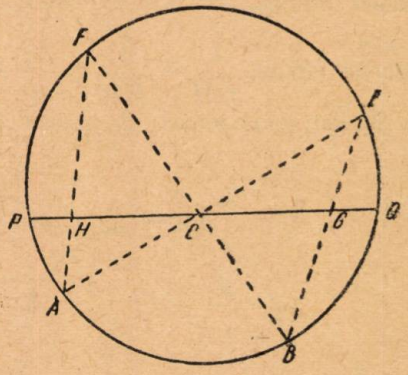


Fig. 16

lui $\overline{AB}$ pe (Δ) cu m, relaţia între $\overline{OM} = X$ şi $\overline{OM'} = X'$ [O fiind proiecţia lui A pe (Δ)] este $K_1X - K_2X' + m\,(K_2 - 1) = 0$.

IV. Dacă în acelaşi exemplu avem şi $AB \parallel \Delta$, atunci diviziunile descrise de M şi M' pe (Δ) sînt egale. În adevăr în acest caz $\overline{MM'} = \text{const}$.

Aplicaţii. 1. *Se dă un cerc, o coardă PQ* (fig. 16) *şi două puncte A, B situate pe cerc. Fie C mijlocul coardei PQ; dreptele AC, BC taie din nou cercul respectiv în E şi F, iar EB şi FA intersectează coarda PQ în G şi H. Să se demonstreze că* $\overline{PH} = \overline{GQ}$.

Fie M un punct oarecare pe dreapta PQ; AM taie cercul într-un singur punct N, iar NB taie pe PQ într-un singur punct M'. Reciproc, unui punct M' îi corespunde un singur punct M. Deci M și M' descriu pe dreapta PQ două diviziuni omografice. E ușor de văzut că P și Q sînt punctele duble ale celor două diviziuni, iar G și H sînt omologele lui C, mijlocul segmentului PQ, considerat ca aparținînd pe rînd fiecărei diviziuni. Conform celor spuse la paragraful 16, G și H sînt simetrice față de C.

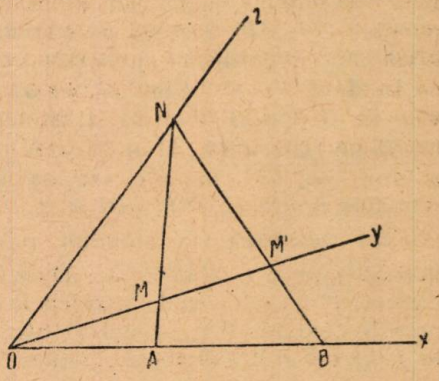


Fig. 17

2. *Se dau trei drepte care trec prin același punct: Ox, Oy și Oz. Pe Ox* (fig. 17) *se iau două puncte fixe A și B, iar pe Oz un punct variabil N. Dreptele AN, BN intersectează pe Oy în M și M'. Să se demonstreze că* $\frac{1}{\overline{OM}} - \frac{1}{\overline{OM'}} = \text{const.}$

Problema se poate trata și pe cale elementară. Aci vom observa că sîntem într-un caz particular al exemplului I de mai înainte, cînd dreapta AB trece prin intersecția celorlalte două drepte și deci punctele duble se confundă. Atunci avem conform relației (21), $\frac{1}{\overline{OM}} - \frac{1}{\overline{OM'}} = k$. Constanta se determină situînd pe N într-o poziție particulară, de ex. $N \to \infty$; atunci M și M' se obțin ducînd prin A și B paralele la Oz. Dacă paralelele la Oy prin A și B taie pe Oz în E și F și dacă notăm $\overline{EA} = a$, $\overline{FB} = b$, atunci trebuie să avem $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = k$, deci relația devine $\frac{1}{\overline{OM}} - \frac{1}{\overline{MO'}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

3) *Se dau două perechi de puncte A, B și A', B'* (fig. 18) *și o dreaptă (D).*

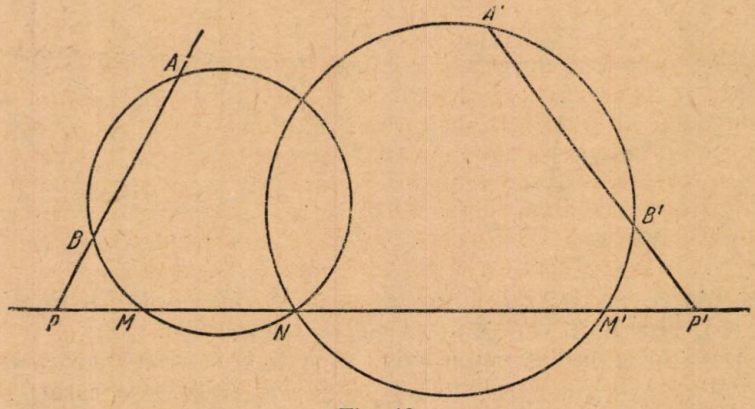


Fig. 18

Să se ducă un cerc prin A, B și alt cerc prin A', B' astfel încît secanta lor comună să fie dreapta D.

Să se discute condițiile de posibilitate ale problemei (GMF, 1952).

Fie P intersecția dreptei AB cu (D) și P' intersecția dreptei $A'B'$ cu (D). Luăm un punct arbitrar M pe (D) și ducem cercul ABM care taie din nou pe (D) în N; cercul $A'B'N$ taie din nou pe (D) în M'. Punctele M și M' descriu diviziuni omografice pe (D), deoarece construcția este făcută numai cu cercuri, iar unui punct M îi corespunde un singur punct N, și deci un singur M' și reciproc, unui punct M' îi corespunde un singur punct M. Cercurile ABN, $A'B'N$ au punctul N comun; ele vor avea drept secantă comună pe (D) dacă și M, M' coincid, deci trebuie căutate punctele duble ale celor două diviziuni. Pentru aceasta se construiesc punctele limită I, J', apoi omoloagele mijlocului ω al segmentului $\overline{IJ'}$ și se folosesc cele spuse la paragraful 17.

Pentru condiția de existență a problemei să găsim relația omografică, luînd P ca origină; vom nota $\overline{PM} = x$; $\overline{PM'} = x'$; $\overline{PP'} = a$, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = t_1^2$ (t_1 fiind tangenta din P la un cerc oarecare ce trece prin A și B); $\overline{P'A'} \cdot \overline{P'B'} = t_2^2$ (analog pentru cercurile ce trec prin A' și B'). Avem evident: $\overline{PM} \cdot \overline{PN} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = t_1^2$; $\overline{NP'} \cdot \overline{M'P'} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = t_2^2$. Deducem $\overline{PN} = \frac{t_1^2}{x}$; $\overline{NP'} = \frac{t_2^2}{a - x'}$ și cum $\overline{PN} + \overline{NP'} = a$, rezultă $\frac{t_1^2}{x} + \frac{t^2}{a - x'} = a$ sau $axx' - (a^2 - t_2^2)\, x - t_1^2\, x' + at_1^2 = 0$. Făcînd $x = x'$ găsim $ax^2 - (a^2 + t_1^2 - t_2^2)\, x + at_1^2 = 0$. Condiția de realitate a punctelor duble este

$$(a^2 + t_1^2 - t_2^2) - 4a^2\, t_1^2 = (a + t_1 + t_2)\,(a + t_1 - t_2)\,(a - t_1 + t_2)\,(a - t_1 - t_2) \geqslant 0.$$

Expresia din prima parte este $-S^2$, S^2 fiind aria triunghiului cu laturile a, t_1, t_2, deci trebuie ca $S^2 \leqslant 0$, adică triunghiul să nu existe și deci $a \geqslant t_1 + t_2$ sau $\overline{PP'} \geqslant t_1 + t_2$. *(va urma)*

FIZICA ȘI SPORTUL

LASZLO HEINRICH

PENTRU a putea aprecia și compara între ele rezultatele obținute de sportivi într-un sport sau altul este necesară punctarea acestor rezultate și omologarea lor pe plan național și internațional. În prezent, după ce s-a stabilit tabela internațională de punctaj, se poate face o comparație justă între rezultatele obținute, de exemplu la probele de atletism. Baza punctajului o constituie valoarea comparativă a rezultatelor obținute la probele care compun decatlonul. De exemplu, pe baza acestui punctaj avem posibilitatea de a compara rezultatele obținute la alergarea de 800 m plat și la aruncarea suliței.

După cum noțiunea de lucru mecanic este diferită în fizică și în practică în general, tot așa noțiunea de putere în fizică se deosebește esențial de aceiași noțiune în sport. Vom lămuri această diferență prin următorul exemplu. Avem doi sportivi care se deosebesc prin fizicul lor. La săritura în înălțime, din punctul de vedere al rezultatului sportiv apreciem numai pe acela care sare stacheta cea mai înaltă. Această apreciere însă, nu dovedește de loc că învingătorul a săvîrșit efortul fizic maxim. De exemplu, săritorul A, cu greutatea de 75 kg și înălțimea 190 cm, cîștigă concursul cu o săritură de 195 cm. Al doilea săritor B, avînd greutatea de 73 kg și înălțimea de 170 cm, efec-

tuînd o săritură de 185 cm, nu se califică nici măcar pentru finală. După cum se ştie, centrul de greutate al omului, situat la înălţimea osului sacru, îşi schimbă locul în mare măsură după poziţia corpului. Să considerăm, pentru simplificare, centrul de greutate situat la 2/3 din înălţimea corpului omenesc. Sportivul A şi-a ridicat masa, îngrămădită în centrul său de greutate, de la nivelul de 190, 2/3 cm = 126,6 cm cel puţin pînă la înălţimea de 195 cm. Atletul A a deplasat aşadar centrul său de greutate pe o distanţă de 195—126,6 cm = 68,4 cm. Lucrul mecanic săvîrşit de el este: 75 kg. 68,4 cm = 51,3 kgm. Sportivul B şi-a ridicat centrul său de greutate de la nivelul de 170. 2/3 cm = 113,3 cm pînă la înălţimea de 185 cm, deci a deplasat o greutate de 73 kg pe o distanţă de 185—113,3 cm = 71,7cm. Lucrul mecanic executat de el este 73 kg. 71,7 cm = 52,341 kgm. Deci concurentul B a efectuat un lucru mecanic mai mare aproximativ cu 1 kgm. La aprecierea puterii din punctul de vedere al fizicii trebuie luat în considerare şi timpul care trece din momentul desprinderii sportivului de la pămînt pînă în momentul cînd ajunge deasupra stachetei. Cu cît este mai scurt acest timp cu atît este mai mare puterea lui din punctul de vedere al fizicii. Dacă presupunem că acest timp este identic pentru amîndoi sportivii, din punctul de vedere al fizicii puterea concurentului B este mai mare decît aceea a atletului A. În contradicţie cu aprecierea rezultatului din punctul de vedere al sportului, pentru care nu contează decît înălţimea la care a fost trecută stacheta, la aprecierea din punctul de vedere al fizicii intră în calcul greutatea şi înălţimea concurentului precum şi durata săriturii.

Aşadar din punctul de vedere al sportului, la compararea rezultatelor obţinute nu se ţine seamă de puterea efectuată de concurent. La calculul acestor puteri se ţine seamă de greutatea şi de înălţimea sportivului. Rezultatele obţinute se consideră că se datoresc pregătirii şi aptitudinii sportivului în acel sport.

Omologarea rezultatelor la diferite sporturi se poate face numai atunci cînd condiţiile de concurs sînt aproximativ identice. De exemplu, la alergările de maraton nu se poate asigura un traseu identic pe o distanţă de 42,195 km, din care cauză timpul alergării nu este omologat ca record. De exemplu, la omologarea rezultatelor obţinute la concursurile de viteză se iau în considerare şi condiţiile atmosferice. Rezultatele obţinute la alergările de viteză sînt influenţate în mod esenţial de direcţia şi intensitatea vîntului. Dacă în timpul alergărilor de viteză suflă un vînt puternic în sensul alergării, recordul nu este omologat.

Pentru realizarea unor rezultate cît mai valoroase se tinde nu numai la folosirea maximă a calităţilor sportivului (de exemplu, stilul, întocmirea unui plan corespunzător pentru antrenament etc.), dar şi la utilizarea tuturor posibilităţilor care se crează prin aplicarea legilor fizicii. De exemplu, Bengt Nilson, recordmanul european în proba de săritură la înălţime, a obţinut în 1954 recordul european, aplicînd un excelent procedeu tehnic de rostogolire specială, la efectuarea unei sărituri de 211 cm. El şi-a aplecat corpul imediat după ce a trecut peste stachetă, ca să-şi poată menţine centrul de greutate la o înălţime cît se poate de mică. Aplicînd tehnica descrisă, el a reuşit să-şi asigure cea mai potrivită poziţie a corpului deasupra stachetei; în acest fel, la trecerea peste stachetă rămîne o distanţă minimă între stachetă şi centrul de greutate al sportivului.

Rezultatele probelor de sărituri cu schiurile sînt influenţate şi de construcţia trambulinei. În timpul zborului săritorul imită cu braţele, aripile

unui avion. Forţa dinamică de ascensiune, care ridică aripile avionului şi tot corpul lui, rezultă din acţiunea comună a aerului comprimat sub aripi şi a aerului care se mişcă cu viteză mare deasupra aripilor. Pe de o parte aripile sînt apăsate în sus, iar pe de altă parte, într-o măsură mai mare, ele sînt aspirate în sus. În timpul zborului săritorul cu schiuri se apleacă mult în faţă nu numai pentru a micşora rezistenţa aerului, care împiedică zborul său, dar şi pentru motivul că sub corpul său se comprimă, iar deasupra lui se rarefiază aerul. Acţiunea aspiratoare se adaugă la cea de apăsare şi astfel rezultă o forţă ascensională. Această forţă contribuie la întîrzierea aterizării săritorului, care rămîne mai mult timp în aer, deci săritura lui va fi mai lungă.

La aruncarea discului, pentru a se obţine rezultate mai bune se foloseşte şi legea giroscopului. În momentul aruncării discul trebuie pus în rotaţie cu viteză mare în jurul unui ax care trece prin centrul său de greutate. Momentul de inerţie al discului şi deci energia lui cinetică de rotaţie are valoarea maximă în raport cu acest ax, denumit ax sigur. Punctele materiale care compun corpul în mişcare, din cauza inerţiei tind să-şi păstreze starea de mişcare şi planul de rotaţie. Evident, această tendinţă devine maximă, cînd corpul se roteşte în jurul axului sigur. Deci discul, rotindu-se în jurul axului sigur, îşi păstrează după aruncare direcţia axului neschimbată. Din acest motiv el se mişcă pe partea descendentă a curbei în aşa fel, încît planul său formează un unghi ascuţit cu rezistenţa aerului. Aşadar în aer rezultă o forţă dinamică de ascensiune, identică cu aceea care se constată la aripile avionului. Discul, din cauza rotaţiei sale, nu se mişcă pe o curbă balistică, ci pe o altă curbă, atingînd pămîntul la o depărtare mai mare decît atunci, cînd ar fi fost aruncat fără rotaţie.

La jocul de fotbal se întîmplă ca la lovitura de corner mingea să ajungă direct în plasă. Golul marcat este valabil. Rezultatul — de altfel destul de rar — se explică prin efectul Magnus. Dacă jucătorul care execută lovitura de colţ (corner) imprimă mingii pe lîngă mişcarea de translaţie una de rotaţie, mingea antrenează din cauza frecării straturile de aer vecine şi în jurul ei ia naştere aşa numita circulaţie. Dacă mingea, rotindu-se, înaintează uniform, în partea dinspre poartă a mingii sensul curentului de aer care se mişcă uniform coincide cu sensul circulaţiei, iar în partea opusă cele două sensuri sînt contrare. De partea mingii unde cele două mişcări au aceeaşi direcţie şi sens, viteza aerului se măreşte, liniile de curent se îngrămădesc şi presiunea se micşorează. Pe partea opusă a mingii, viteza se micşorează, liniile de curent se rarefiază şi presiunea se măreşte. Din acest motiv ia naştere o diferenţă de presiune, care reprezintă o forţă îndreptată dinspre locul cu presiunea mai mică înspre locul cu presiunea mai mare. Drept rezultat al acestei forţe mingea care zboară în faţa porţii ajunge în plasă, fără să fi fost atinsă de un alt jucător, în afară de acela care a executat lovitura.

Rolul rezistenţei aerului devine însemnat la viteze mari. Asemenea viteze se întîlnesc la probele de patinaj viteză. În acest caz rezistenţa aerului creşte cu pătratul vitezei. Pe un patinoar amenajat la altitudine mai mare, unde presiunea aerului este mai mică, se pot obţine rezultate mai bune, deoarece rezistenţa aerului este proporţională cu densitatea lui. Rezultatele obţinute anul trecut de patinorii sovietici la Alma-Ata au uimit pe sportivii din lumea întreagă. Acest patinoar, este amenajat la o înălţime de 1650 m, într-un loc ferit total de vînt.

În afară de cele menţionate mai există şi alte condiţii care influenţează asupra rezultatelor obţinute de patinori. Astfel, pentru amenajarea pati-

noarului descris se foloseşte exclusiv apa rîului Alma-Acinca, care este foarte curată şi măreşte netezimea suprafeţii gheţii. La obţinerea rezultatelor excelente contribuie şi lumina solară de altitudine precum şi aerul curat. Un ziar norvegian a propus Federaţiei Internaţionale de Patinaj ca în anii viitori recordurile mondiale de patinaj viteză realizate pe patinoare de altitudine să fie înregistrate separat de cele obţinute pe patinoare obişnuite.

Dacă la aprecierea rezultatelor obţinute la probele de sărituri şi de alergări nu se poate ţine seamă şi de constituţia sportivului, la probele de ridicarea halterelor, de aruncare a greutăţii, a suliţei, a discului şi a ciocanului este posibilă aprecierea rezultatelor obţinute şi din punctul de vedere al fizicii. În aceste cazuri sînt ridicate sau aruncate corpuri cu greutate stabilită prin regulament (de exemplu, pentru seniori suliţa are 800 g, greutatea—7,257 kg, discul—2 kg, iar ciocanul — 7,257 kg plus un fir de oţel etc.). La comparaţia rezultatelor se ţine seamă de mişcarea corpurilor care au aceeaşi greutate.

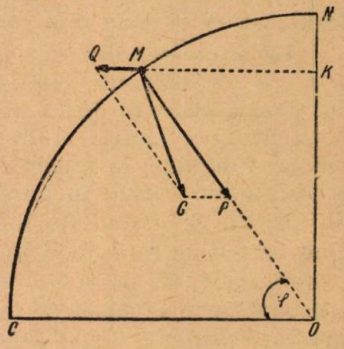


Fig. 1

Şi compararea rezultatelor în condiţiile menţionate este relativă. Se ştie că la probele de aruncări, recordul constă în distanţa realizată. Ori distanţa aruncării este invers proporţională cu valoarea acceleraţiei gravitaţionale (g). Deoarece acceleraţia gravitaţională depinde de latitudinea locului, rezultatele obţinute la probele de aruncări depind de poziţia geografică a locului unde se ţine concursul.

Să vedem cum variază acceleraţia gravitaţională cu latitudinea locului. Admitem că este vorba de echilibrul punctului M în raport cu un corp în mişcare (Pămîntul). Fie N Polul Nord, NMC (fig. 1) meridianul care trece prin punctul M şi OC intersecţia Pămîntului cu planul ecuatorial. Asupra corpului acţionează o forţă, greutatea P, a cărei valoare este mg. Cînd punctul M se află în repaus, deci corpul se găseşte la unul din Poli, valoarea acceleraţiei gravitaţionale la Poli este g. Polii nu iau parte la mişcarea de rotaţie diurnă a Pămîntului. Asupra corpului mai acţionează forţa centrifugă de inerţie, care rezultă din rotaţia Pămîntului în jurul axului. Această forţă are aceeaşi mărime şi direcţie însă sensul opus forţei centripete, îndreptată spre centrul traiectoriei circulare. Valoarea forţei centrifuge de inerţie este $Q = m\omega^2 MK$, unde MK este raza traiectoriei circulare a punctului M. Pentru a putea calcula greutatea aparentă G, adunăm după regula paralelogramului forţelor cele două forţe: forţa $\vec{P} = mg$, îndreptată spre centrul Pămîntului, şi forţa centrifugă de inerţie $\vec{Q} = m\omega^2 MK = m\omega^2 R \cos\varphi$. În ultima formulă $R = MO$ este raza Pămîntului.

Rezultanta celor două forţe, care este diagonala paralelogramului, nu trece prin centrul O al Pămîntului. Mărimea ei este dată de lungimea diagonalei G a paralelogramului construit din cele două forţe componente $\vec{Q}$ şi $\vec{P}$. Mărimea forţei rezultante se poate calcula aplicînd teorema cosinusului:

$$G^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\varphi. \qquad (1)$$

Însă $G = mg_\varphi$, unde g_φ este valoarea accelerației gravitaționale la latitudinea φ. Înlocuind valorile lui G, P și Q în ecuația (1), obținem

$$m^2 g_\varphi^2 = m^2 g^2 + m^2 \omega^4 R^2 \cos^2\varphi - 2m^2 gR\omega^2 \cos^2\varphi,$$

de unde

$$g_\varphi = \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2 \cos^2\varphi - 2g\omega^2 R \cos^2\varphi}. \qquad (2)$$

În această formulă ω este viteza unghiulară a Pământului în mișcare diurnă. Valoarea ei este:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{24.60.60\ \text{s}} = 0{,}72 \cdot 10^{-4}\ \text{s}^{-1}. \qquad (3)$$

Cunoscînd raza Pământului ($R = 6370$ km), putem calcula valoarea lui

$$\omega^2 R = (0{,}72.10^{-1}\ \text{s}^{-1})^2 \cdot 6370 \cdot 10^3\ \text{m} = 0{,}033\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Prin ridicare la pătrat obținem:

$$\omega^4 R^2 = (0{,}033\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2})^2 = 0{,}001\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-4},$$

care este o mărime neglijabilă. Deci, în formula (2) neglijăm termenul care cuprinde pe ω^4 și scriem

$$g_\varphi = \sqrt{g^2 - 2g\omega^2 R \cos^2\varphi} = g\sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R \cos^2\varphi}{g}} = g\sqrt{1 - \frac{2.0{,}033 \cos^2\varphi}{g}}.$$

Utilizînd relația aproximativă

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$$

obținem

$$g_\varphi = g\left(1 - \frac{0{,}033 \cos^2\varphi}{g}\right).$$

În sfîrșit obținem rezultatul final

$$g_\varphi = g - 0{,}033 \cos^2\varphi.$$

La Poli $g = 9{,}833\ \text{ms}^{-2}$. De aceea la latitudinea φ avem

$$g_\varphi = 9{,}833 - 0{,}033 \cos^2\varphi. \qquad (4)$$

La Ecuator ($\varphi = 0°$) avem

$$g_{\varphi=0} = 9{,}833 - 0{,}033 = 9{,}800\ \text{ms}^{-2}.$$

Însă măsurătorile directe dau pentru valoarea lui g, la Ecuator, valoarea $9{,}781\ \text{ms}^{-2}$. Diferența dintre cele două valori se explică prin faptul că la deducerea formulei nu s-a luat în considerare turtirea la Poli, deci în realitate forța de atracție gravitațională se micșorează mai mult spre Ecuator.

Rezultatele măsurărilor sînt exprimate prin formula lui Helmert:

$$g_\varphi = 9{,}781\,(1 + 0{,}00531 \sin^2\varphi). \qquad (5)$$

În calculele noastre vom utiliza această formulă.

La probele de aruncări distanța aruncării în conformitate cu formula, este

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (6)$$

fiind invers proporțională cu valoarea accelerației gravitaționale (V_0 este viteza inițială a corpului aruncat, iar α — unghiul sub care este aruncat corpul). De exemplu, dacă se aruncă sulița în condiții absolut identice, deci cu aceiași V_0 și α, la Poli ea ajunge la pământ la o distanță mai mică decît la Ecuator.

Concursurile sportive se țin la diferite latitudini, adică în locuri cu g_φ diferită. Pentru a se aprecia just rezultatele obținute pe diferite terenuri, trebuie luată în considerare variația accelerației gravitaționale.

În rîndurile sportivilor din lumea întreagă a stîrnit un viu interes recordul atins de atletul sovietic Stanislav Nenașev, de numai 21 ani, care la proba de aruncare a ciocanului a realizat la Kiew, distanța de 64,05 m. Să calculăm rezultatul pe care l-ar fi obținut atletul sovietic, dacă ar fi aruncat ciocanul în condiții absolut identice odată la polul Nord și odată la Ecuator. Orașul Kiew este situat pe paralela $\varphi = 50°25'$, deci valoarea accelerației gravitaționale în acel loc, calculată după formula (5), este:

$$g_\varphi = 9{,}781\,(1 + 0{,}00531 \sin^2 50°25') = 9{,}812 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

La calcul vom avea nevoie de valoarea lui g la Ecuator și la Poli. La Poli $g = 9{,}833 \text{ m s}^{-2}$, iar la Ecuator $g = 9{,}781 \text{ ms}^{-2}$. Deci dacă atletul Nenașev a realizat la Kiew distanța de 64,05 m, la Poli ciocanul ar fi străbătut distanța

$$x = \frac{64{,}05 \cdot 9{,}812}{9{,}833} = 63{,}91 \text{ m}.$$

La Ecuator, atletul Nenașev ar fi aruncat ciocanul în condiții absolut identice, la o distanță

$$x = \frac{64{,}05 \cdot 9{,}812}{9{,}781} = 64{,}25 \text{ m}.$$

Diferența față de distanța realizată la Kiew este: la Poli de 64,05 m — — 63,91 m = 14 cm, iar la Ecuator 64,25 m — 64,05 m = 20 cm. În ambele cazuri diferența este considerabilă nu numai din punctul de vedere al fizicii, dar și din acela al atletismului.

Deci urmează că pentru a putea compara în mod just rezultatele obținute la probele de aruncări ar fi bine să recalculăm toate rezultatele obținute referitor la o paralelă geografică oarecare (de exemplu la cea de 45°). În mod analog în meteorologie nu se dă valoarea absolută a presiunii barometrice măsurată pe locul dat, ci se comunică întotdeauna, valoarea recalculată la nivelul mării.

Valoarea accelerației gravitaționale variază însă și cu înălțimea măsurată de la suprafața mării. Pentru a calcula această variație trebuie să luăm în considerare în primul rînd variația lui g la Poli la înălțimea h, iar apoi să determinăm variația care rezultă din cauza creșterii forței centrifuge.

Greutatea unui corp cu masă m la Poli, la distanţa R de la centrul Pămîntului, adică la suprafaţa mării, se calculează după formula atracţiei universale

$$mg_0 = k\frac{m \cdot M}{R^2}, \tag{7}$$

unde M este masa Pămîntului. Dacă ridicăm corpul cu masa m la înălţimea h de la suprafaţa mării, greutatea lui se obţine cu formula

$$mg_h = k\frac{mM}{(R+h)^2}. \tag{8}$$

Prin împărţirea relaţiilor (7) şi (8) obţinem:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{1+\frac{2h}{R}+\frac{h^2}{R^2}} \approx \frac{1}{1+\frac{2h}{R}},$$

deoarece h^2/R^2 în cazul înălţimilor mici are valoare atît de mică încît o putem neglija. De aici obţinem

$$g_h = \frac{g_0}{1+\frac{2h}{R}}.$$

Dacă efectuăm împărţirea şi neglijăm iarăşi termenul cu patrat, obţinem:

$$g_h = g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right). \tag{9}$$

Dacă utilizăm formula dedusă mai sus

$$g_\varphi = \sqrt{g^2 - 2g\omega^2(R+h)\cos^2\varphi},$$

putem obţine valoarea acceleraţiei gravitaţionale la înălţimea h şi paralela geografică φ.

$$g'_\varphi = \sqrt{g_0^2\left(1-\frac{2h}{R}\right)^2 - 2g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)\omega^2(R+h)\cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{g_0^2\left(1-\frac{4h}{R}\right) - 2g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)\omega^2(R+h)\cos^2\varphi}.$$

Dacă înălţimea este mică în comparaţie cu raza R a Pămîntului, atunci $2h/R$ şi $4h/R$ sînt neglijabile faţă de unitate, şi în loc de $R+h$ putem scrie R. Deci,

$$g'_\varphi \approx g_0\sqrt{1-\frac{2\omega^2 R\cos^2\varphi}{g_0}}.$$

*) În calculele făcute valorile latitudinilor geografice ale diferitelor piste atletice de concurs le-am luat cu o precizie aproximativă. Dacă vrem să obţinem rezultate precise, trebuie să utilizăm valorile experimentale ale acceleraţiei gravitaţionale.

În asemenea cazuri putem neglija variația cu înălțimea a accelerației gravitaționale.

Limita de eroare la măsurătorile distanței la concursurile atletice (evaluate numai în cm) depășește corecția care s-ar ivi din cauza variației cu înălțimea a accelerației gravitaționale, dacă înălțimea față de nivelul mării este mică. La rezultatele obținute în probele de aruncări am avea o diferență măsurabilă din punct de vedere al sportului numai dacă ar fi vorba de înălțimi mari. Ori la asemenea înălțimi nu se organizează concursuri atletice.

Valoarea accelerației gravitaționale este influențată în mică măsură și de forma suprafeței. Valoarea accelerației gravitaționale este mai mare la vîrful muntelui înalt decît la poalele lui, deoarece la forța de atracție se adaugă și masa muntelui. Avem variații din următoarele cauze: neomogenitatea scoarței pămîntului, clinalele, anticlinalele, așezarea rocilor etc. În aceste cazuri nu putem folosi o formulă matematică; valoarea accelerației gravitaționale se determină experimental.

Pînă acum am considerat constantă greutatea suliței, a discului etc. Cercetările teoretice și experimentale ale lui Lorand Eötvös au demonstrat că greutatea corpului care se mișcă față de Pămînt depinde de direcția mișcării și de valoarea vitezei. Acest așa-numit efect Eötvös este o consecință a legilor mecanicii clasice.

După cum am mai menționat, forța gravitațională este de fapt rezultanta a două forțe: forța de atracție universală și forța centrifugă, determinate de rotația Pămîntului în jurul axei sale. Deoarece repartiția masei Pămîntului precum și viteza lui de rotație se pot considera constante, adică într-un punct bine determinat al Pămîntului atît forța de atracție cît și forța centrifugă sînt constante, greutatea unui corp în repaus față de Pămînt este constantă.

Situația însă se schimbă dacă considerăm un corp în mișcare față de Pămînt. Pămîntul se mișcă de la apus spre răsărit, deci un corp care se mișcă în această direcție, se rotește cu o viteză mai mare decît ceea a Pămîntului. Pentru acest motiv asupra corpului care se deplasează de la apus spre răsărit, se exercită o forță centrifugă mărită. Această forță micșorează mai mult forța care rezultă din atracția universală, deci greutatea corpului se micșorează. Dacă corpul se deplasează de la răsărit la apus, viteza lui de rotație se micșorează, deci și forța centrifugă care acționează asupra corpului devine mai mică. În acest fel forța care rezultă din atracția universală se micșorează mai puțin. Rezultatul este că în acest caz avem o mărire aparentă a greutății corpului.

Pentru o analiză cantitativă a variației greutății trebuie să luăm în considerație faptul că forța centrifugă acționează și asupra corpurilor care sînt în legătură rigidă cu sistemul în mișcare de rotație uniformă. Dacă însă acest corp se deplasează cu vizeza v față de sistemul în rotație uniformă (cu viteza unghiulară constantă) asupra corpului acționează în afară de forța centrifugă și o forță de inerție. Aceasta este așa-numita forță Coriolis. Valoarea ei în cazul unui co p cu masa m care se mișcă cu viteza relativă v pe suprafața Pămîntului este dată de relația.

$$F = 2mv\omega \sin \delta \qquad (10)$$

unde δ este unghiul format de vectorii $\vec{v}$ și $\vec{\omega}$. Direcția forței $\vec{F}$ este perpendiculară atît pe direcția vectorului $\vec{v}$ cît și pe cea a vectorului $\vec{\omega}$. Această forță nu poate fi egală cu zero decît în două cazuri: 1) cînd corpul se găsește în repaus

relativ față de sistemul în rotație uniformă ($v=0$) și 2), dacă pentru un observator direcția vitezei relative este para elă cu axa de rotație ($\vec{v} \parallel \vec{\omega}$).

În general, dacă vectorul $\vec{v}$ formează un unghi δ cu vectorul $\vec{\omega}$, forța Coriolis se poate descompune în două componente. Componenta verticală are efectul maxim, cînd corpul se deplasează de-a lungul unui meridian geografic. Componenta orizontală are valoarea maximă, cînd corpul se mișcă de-a lungul unei paralele geografice. Din acțiunea componentei verticale rezultă pe emisfera boreală deviația la dreapta. Această deviație se constată pe emisfera boreală la rîurile care curg de la sud spre nord. La aceste rîuri eroziunea malului drept este mai mare decît a celui stîng și din acest motiv malul drept este mai înalt. Tot această componentă determină rotirea planului de oscilație a pendulului în experiențele lui Foucault.

Componenta orizontală produce efectul Eötvös menționat mai sus. Din punctul de vedere al rezultatelor obținute la probele de aruncări, ne interesează tocmai acest efect. După constatarea lui Eötvös, în cazul unei mișcări de la apus spre răsărit, variația accelerației gravitaționale față de un sistem de referință legat cu Soarele este

$$\Delta g = -2\omega v \cos \varphi, \qquad (11)$$

unde v este viteza relativă, φ — latitudinea geografică și ω — viteza unghiulară a Pămîntului (după formula (3) $\omega = 0{,}72\ 10^{-4}\ s^{-1}$). Dacă corpul se mișcă pe paralela 45°, de la apus spre răsărit cu viteza $v = 1$ cm s^{-1} micșorarea accelerației gravitaționale este

$$\Delta g = 2.0{,}72 \cdot 10^{-4} \cdot 1.0{,}70711 = 0{,}000103 \text{ cm. } s^{-2}.$$

Dacă greutatea corpului în repaus relativ este 1gf = 981 dyn, această micșorare de greutate reprezintă a zecea milioana parte a greutății inițiale.

Oricît de mică ar fi această variație, ea poate fi pusă în evidență în mod experimental. Măsurătorile făcute pe suprafața Mării Negre au justificat prima oară presupunerea lui Eötvös. Însuși Eötvös a confecționat o balanță specială de rotație, cu care a reușit să pună în evidență variația greutății corpurilor care se mișcă pe o paralelă.

Natural efectul este cu atît mai mare, cu cît masa și viteza relativă a corpului sînt mai mari. Dacă în cazul unui corp de greutatea 1 g și viteza de 1 cm. s^{-1} micșorarea greutății este 10^{-7} g, atunci în cazul unui om de 100 kg greutatea care se deplasează de la apus spre răsărit cu viteza de 1 m s^{-1}, micșorarea greutății este $10^7 \cdot 10^{-7} = 1$ g. Dacă omul se deplasează de la răsărit spre apus, greutatea lui se mărește cu aceiași cantitate. Astfel, dacă omul cu greutatea de 100 kg se deplasează pe paralela 45 cu viteza de 1 m s^{-1}, variația greutății atinge 2 g

Să aplicăm constatările menționate la rezultatele obținute la probele de aruncări ale concursurilor atletice. Pentru a putea aplica formula (11) trebuie să cunoaștem viteza corpului aruncat. Din formula (6), care dă distanța aruncării, determinăm viteza inițială. În cazul unei aruncări cu suliță, de 70 cm, viteza inițială este

$$V_0^2 = \frac{x \cdot g}{\sin 2\alpha} = \frac{70 \cdot 9{,}81}{1},$$

de unde

$$V_0 \approx 25 \text{ m} \cdot s^{-1}.$$

Variaţia acceleraţiei gravitaţionale la Ecuator, conform formulei (11), este

$$\Delta g = 2 \cdot 0{,}72,\ 10^{-4} \cdot 2500 = 0{,}36\ \text{cm.s}^{-2}.$$

Presupunem aruncarea suliţei cu viteza iniţială de mai sus, la Ecuator, de la apus la răsărit, şi distanţa aruncării 70 m. Să calculăm rezultatul obţinut dacă suliţa ar fi aruncată în condiţii identice însă în direcţie contrară:

la valoarea $g - \Delta g$ distanţa aruncării este 70 m;

la valoarea $g + \Delta g$ distanţa aruncării este de x m, de unde obţinem

$$x = \frac{70\,(g - \Delta g)}{g + \Delta g} = \frac{70\,(978{,}1 - 0{,}36)}{978{,}1 + 0{,}36} = 69{,}95\ \text{m}.$$

Această diferenţă de 5 cm ar fi considerabilă. Dacă însă ne deplasăm spre Poli, valoarea acestei diferenţe ar fi din ce în ce mai mică şi la Poli ar dispare. Pe lîngă aceasta trebuie să luăm în considerare şi faptul că suliţa aruncată nu se mişcă cu viteza constantă ; viteza iniţială a suliţei reprezintă viteza ei maximă. Diferenţa de 5 cm există numai în cazul că suliţa înaintează mereu cu aceiaşi viteză, care este egală cu viteza ei iniţială ($V_0 = 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). Într-adevăr, diferenţa care rezultă din cauza efectului Eötvös este mai mică decît cea calculată şi abia atinge valoarea exactităţii metodei de măsurare a distanţelor la probele atletice.

Rezumînd cele expuse mai sus, putem constata că la probele de aruncări ale concursurilor atletice distanţa aruncării este influenţată în mod apreciabil de variaţia acceleraţiei gravitaţionale cu poziţia geografică. Toate rezultatele obţinute la probele de aruncări ar trebui recalculate pentru latitudinea de 45°. Dacă luăm în considerare efectul Eötvös, obţinem o variaţie măsurabilă, dar neînsemnată. În sfîrşit, variaţia acceleraţiei gravitaţionale cu înălţimea socotită de la suprafaţa mării nu influenţează de loc rezultatele probelor de aruncări. Mărimea variaţiei datorită ultimelor două cauze este atinsă şi chiar depăşită de fluctuaţiile determinate de unele împrejurări externe, de exemplu de variaţia temperaturii, a presiunii atmosferice, a umidităţii etc.

CALEIDOSCOP FIZIC

1. **Inele de fum.** Cu siguranţă mulţi au observat inele din fum de ţigară. Să construim un aparat cu ajutorul căruia să putem produce asemenea inele.

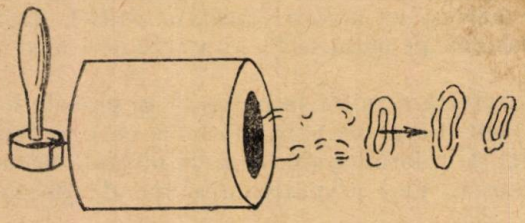


Fig. 1

Să tăiem în peretele unei cutii de carton (fig. 1) o deschidere circulară, iar în partea opusă întindem o membrană de cauciuc. Dacă suflăm fum în cutia astfel pregătită şi ciocănim în peretele format din membrană, atunci prin deschiderea circulară ies inele de fum.

Cauza apariţiei acestor inele este că la marginea deschiderii circulare coloana de aer suferă o frecare pe cînd în partea centrală această frecare lipseşte. Astfel se nasc vîrtejuri care duc la formarea de inele.

2. **Atracţia bulelor de aer.** Este cunoscut faptul că suflînd între două baloane acestea se apropie. Acest fenomen se poate realiza şi în cazul în care mediul dintre baloane este în repaus. Luăm un cilindru de sticlă prevăzut la fund cu un dop de plută prin care pătrund două tuburi. Umplem cilindrul cu apă şi suflăm aer prin cele două tuburi (fig. 2). Dacă bulele de aer sînt egale atunci ele se ridică cu viteze egale şi se apropie. Fenomenul se poate observa mai uşor dacă în locul apei întrebuinţăm un amestec de glicerină cu apă. Cauza apropierii constă în faptul că între bule se crează o presiune mai mică decît în afară.

Fig. 2

3. **Praştie dintr-o vergea de sticlă.** Se ia o vergea de sticlă pe care o electrizăm prin frecare. Pulverizăm picături de terebentină spre vergeaua de sticlă electrizată; acestea se vor apropia şi apoi se vor depărta cu viteză mare (fig. 3). Viteza mare este cauzată de faptul că rezistenţa mediului este mică pentru aceste picături care au o rază mică. Respingerea se datoreşte încărcării picăturilor (prin contact), cu acelaşi fel de electricitate ca şi vergeaua.

4. **Morişca magnetică.** Fierul îşi pierde proprietăţile magnetice în jurul temperaturii de 770°C. Cunoscînd această proprietate se poate construi un mic motor. Sudăm aproximativ 32 sîrme subţiri de fier la o placă. Aşezăm morişca astfel construită pe un ac şi în faţa ei, la aceeaşi înălţime aşezăm un magnet (fig. 4). Dacă

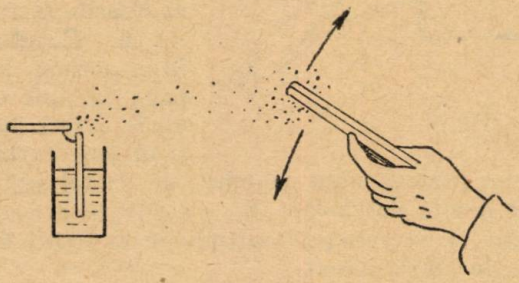


Fig. 3

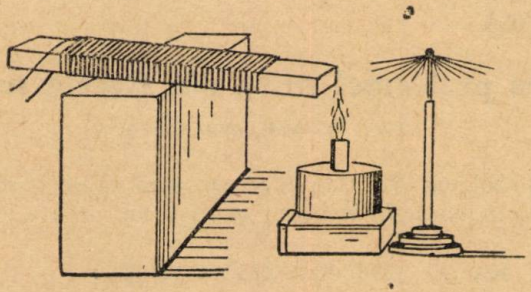


Fig. 4

încălzim sîrmele pînă la roşu se poate observa că dispozitivul confecţionat se pune în mişcare.

5. **Iluzie optică.** Dacă observăm — mişcînd capul spre dreapta sau spre stînga — figuri formate din cercuri concentrice (fig. 5), de exemplu, plăci de patefon sau suprafeţe metalice şlefuite circular, avem impresia că diferite sectoare ale acestor figuri, se rotesc. Cum se explică acest fenomen?

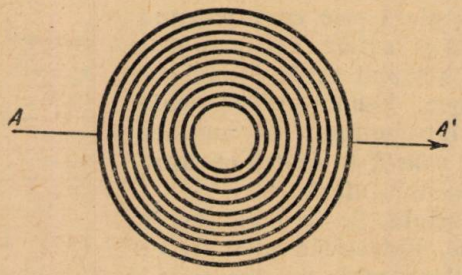


Fig. 5

Prin mişcarea capului în direcţia AA' imaginile formate în ochi, de porţiunile de cercuri traversate în mişcare, se contopesc. Această contopire nu are loc pentru porţiunile de cercuri ale căror linii sînt paralele cu mişcarea. Fenomenul se petrece identic dacă în loc să mişcăm capul mişcăm pe aceiaşi direcţie figura.

Dacă mişcăm figura circular, atunci liniile paralele cu mişcarea sînt mai luminoase şi pentru poziţii diferite ale figurii, locul acestor părţi luminoase este diferit, ceea ce dă impresia că diferite sectoare se rotesc.

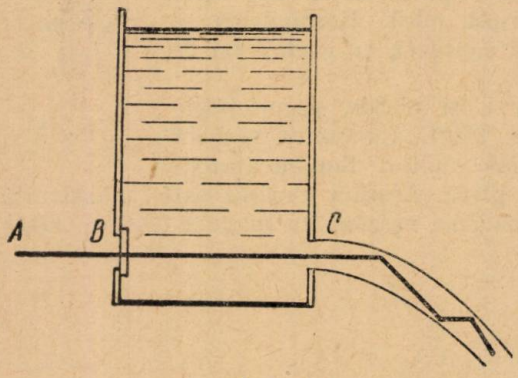


Fig. 6

6. **Conducerea luminii.** Ştim despre lumină că se propagă în linie dreaptă. Totuşi în unele cazuri lumina se propagă şi în linie curbă. Să vedem cum.

Să tăiem într-o parte a unui cilindru de metal (fig. 6) deschiderea C şi în partea opusă o altă deschidere B, pe care să o acoperim cu o sticlă. Lumina ce vine din A se reflectă multiplu în curentul de apă şi astfel ea pare că se îndoaie în acest curent.

NOTĂ MATEMATICĂ

14. Asupra problemei nr. 5 din Gazeta matematică

(vol. I, 1895, pag. 37) *)

ÎN această problemă V. Cristescu cere să se găsească relaţia care leagă unghiurile unui triunghi la care centrul de greutate se află pe cercul înscris.

G. Ţiţeica rezolvă problema găsind relaţia:

$$(1) \qquad IG^2 = r^2 + \frac{5}{36}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{6}(ab + bc + ca),$$

*) reprodusă în G.M.F. seria B, vol. VI, pag. 404.

însă, dacă observăm că această relație se mai poate pune și sub forma:

$$IG^2 = r^2 - \frac{1}{9}\left[2\sum (p-a)(p-b) - \sum (p-a)^2\right]$$

și ținem seamă de o relație cunoscută, relația (1) se mai poate scrie:

$$IG^2 = r^2 - \frac{1}{9}(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})\prod(-\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}).$$

Această relație ne permite să împărțim interiorul triunghiului în patru zone:

— Centrul de greutate cade în interiorul cercului înscris, în care caz avem:

$$\sqrt{p-a} < \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c},$$
$$\sqrt{p-b} < \sqrt{p-c} + \sqrt{p-a},$$
$$\sqrt{p-c} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b};$$

— centrul de greutate cade în porțiunea dintre vîrful A și cercul înscris, în care caz avem:

$$\sqrt{p-a} > \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c},$$
$$\sqrt{p-b} < \sqrt{p-c} + \sqrt{p-a},$$
$$\sqrt{p-c} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b},$$

și relații asemănătoare pentru zonele corespunzătoare vîrfurilor B și C.

În cazul cînd centrul de greutate cade chiar pe cercul înscris, pe porțiunea cuprinsă între punctele de tangență ale laturilor b și c înspre vîrful A, avem:

$$\sqrt{p-a} = \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c},$$

căreia îi corespunde relația între unghiuri:

$$\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} = \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}$$

și relații similare pentru porțiunile corespunzătoare vîrfurilor B și C.

Mircea Adam, București

VIAȚA ȘTIINȚIFICĂ

AL IV-LEA CONGRES AL MATEMATICIENILOR ROMÎNI

ÎNTRE 27 mai și 4 iunie 1956, s-au desfășurat la București lucrările celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni, care a constituit un eveniment de o deosebită importanță pentru știința din patria noastră.

La lucrările Congresului au participat peste 300 de matematicieni: cercetători ai institutului de matematică al Academiei R.P.R., cadre didactice din învățămîntul superior cît și cadre didactice din învățămîntul mediu. Au participat de asemenea, 74 matematicieni străini, bine cunoscuți pentru contribuția lor la dezvol-

tarea matematicii, reprezentînd 18 ţări: Anglia, Austria, Belgia, R.P. Bulgaria, R. Cehoslovacă, R.P. Chineză, Elveţia, Franţa, R.D. Germană, Israel, Italia, R.F. Jugoslavia, Japonia, Norvegia, R.P. Polonă, S.U.A., R.P. Ungaria şi U.R.S.S. Dintre matematicienii străini au participat la Congres prof. I.N. Vecua, membru corespondent al Academiei de Stiinţe din U.R.S.S., J. Hadamard şi A. Denjoy, membri ai Academiei de Stiinţe din Franţa, K. Kuratowski, membru al Academiei de Stiinţe din Polonia, prof. E. Hille din S.U.A., G. Hajos, membru

× ××

Aspecte de la Congres. In primul plan se află marele matematician Jacques Hadamard (×) şi matematicianul sovietic I. N. Vecua (××).

al Academiei din R.P. Ungaria, B. Segre, membru al Academiei dei Lincei (Italia), prof. W. Blaschke, prof. W. Schröder din R.D.G., Chen-Kien-Kwong din R.P. Chieză etc.

Lucrările Congresului s-au desfăşurat în cinci secţii, şi anume, 1) algebră şi teoria numerelor, 2) analiză, 3) geometrie şi topologie, 4) matematici aplicate, 5) metodologie şi istoria matematicii.

În cadrul acestor secţii au fost prezentate comunicări ştiinţifice originale sau lucrări de sinteză asupra unui ansamblu de cercetări. O notă caracteristică a Congresului a fost numărul mare de tineri matematicieni care au prezentat lucrări originale importante contribuind în mare parte la succesul Congresului.

În programul lucrărilor de matematică un loc important au ocupat cercetările de matematică aplicată: hidrodinamică, aerodinamică, calculul probabilităţilor şi statistică matematică, teoria elasticităţii, calculul numeric şi grafic, fizică teoretică etc. De asemenea au fost prezentate numeroase lucrări de metodologie şi istoria matematicii, probleme privind predarea matematicii elementare, legătura dintre teoria şi practică la lecţiile de matematici, activitatea extraşcolară la matematici, aspecte din istoria matematicii romîneşti etc.

În afară de şedinţele de comunicări s-au ţinut 7 şedinţe în care au fost prezentate 27 conferinţe generale privind diferite cercetări din matematică, cît şi şedinţe pe secţii reunite.

Au fost prezentate în total 223 de comunicări şi conferinţe dintre care 152 au fost prezentate de matematicieni romîni, iar 71 de participanţi străini.

La Congres au fost prezentate ample rapoarte asupra lucrărilor matematicienilor romîni publicate în ultimii ani. Cinci dintre acestea privesc domeniile:

×

Aspecte de la Congres. Marele matematician J. Hadamard (×) înconjurat de matematicieni romîni şi străini.

geometrie diferenţială, ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale şi funcţionale, teoria funcţiilor reale şi complexe, algebră, topologie şi analiză funcţională, matematici aplicate.

Din rapoartele prezentate se pot constata progresele matematicii romîneşti realizate în ultimii ani, în special din 1950 încoace, cînd măsurile luate de Partidul Muncitoresc Romîn şi Guvernul R.P.R. au început să dea roade depline. Rapoartele au fost examinate cu un deosebit interes de matematicienii străini.

Oaspeţii străini au arătat un deosebit interes pentru producţia şcoalei matematice romîneşti. Multe dintre rezultatele matematicienilor romîni au fost citate în comunicările prezentate de matematicienii străini.

Congresul a deschis largi perspective de colaborare ştiinţifică, de întărire a legăturilor ştiinţifice cu celelalte ţări, de organizare a muncii de cercetare ştiinţifică. Cu ocazia Congresului s-au stabilit legături directe între specialiştii din ţara noastră şi cei din alte ţări care lucrează în aceleaşi domenii.

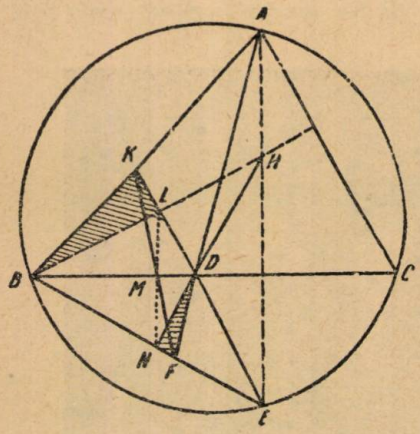
Cel de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni constituie o afirmare măreaţă a muncii ştiinţifice din ţara noastră. Prin organizarea lucrărilor, prin înaltul lor nivel ştiinţific, Congresul este un succes cu care ştiinţa din patria noastră se poate mîndri.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1712

Fie un triunghi oarecare ABC şi cercul său circumscris. Diametrul dus prin A taie dreapta BC în D, iar înălţimea din A taie cercul în E. Fie punctele $F = (AD, BE)$; $K = (AB, DE)$; $L = (BH, DE)$; $M = (BD, FK)$; $N = (BE, DH)$, unde H este ortocentrul. Să se arate că punctele L, M, N sînt colineare.

Ion Alexa



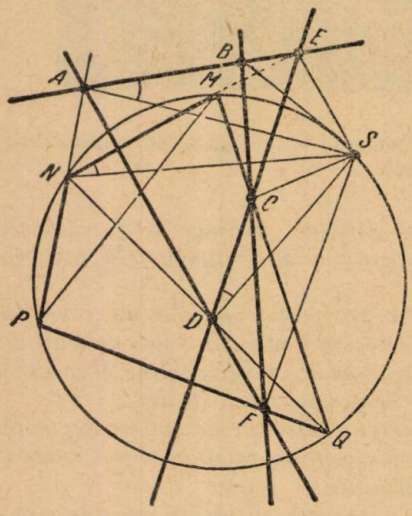
Soluţie dată de **Florin Grosu,** Galaţi. — Triunghiurile KBL şi FDN sînt omologice deoarece intersecţiile $H\,(BL, DN)$, $E\,(KL, FN)$ şi $A\,(KB, FD)$ sînt colineare. Rezultă că dreptele KF, BD şi LN sînt concurente.

Punctul $M\,(BD, KF)$ se află deci pe LN, adică L, M, N sînt colineare.

Problema 1769

Fie S un punct variabil pe cercul circumscris al patrulaterului inscriptibil $MNPQ$. Dreptele lui Simpson ale punctului S în raport cu triunghiurile care au ca vîrfuri punctele M, N, P, Q formează patrulaterul complect $ABCDEF$. Să se arate că S este punctul lui Miquel al acestui patrulater.

Mihail I. Popescu, stud nt. Bucureşti



Soluţie dată de **Dinu Gheorghe** (Craiova). — Ne sprijinim pe teorema: Dîndu-se un patrulater complet $ABCDEF$, cercurile BCE, ADE, CDF şi ABF trec prin acelaşi punct (punctul lui Miquel).

În cazul problemei este necesar şi suficient să arătăm că unul din aceste cercuri trece prin punctul S.

Vom arăta că cercul AED trece prin S. Patrulaterul $SDNE$ este înscriptibil ($\sphericalangle SDN = \sphericalangle SEN = 90°$) şi avem:

$$\sphericalangle SDE = \sphericalangle SNE. \qquad (1)$$

Patrulaterul $SNAE$ este înscriptibil ($SE \not\perp NS$ şi $SA \not\perp NA$) şi avem:

$$\sphericalangle SNE = \sphericalangle SAE. \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă: $\sphericalangle SDE = \sphericalangle SAE$, adică patrulaterul $SDAE$ este înscriptibil deci S se află pe cercul AED.

Problema 1899

Ştiind că x, y, z, u reprezintă numere întregi şi pozitive diferite, scrise în ordinea $1 < x < y < z < u$, să se arate că:

$$xyz + xyu + xzu + yzu \leqslant \frac{31}{24}\, xyzu - 1.$$

L. Mănescu

Soluție dată de **I. Lupuțiu** București. — Neegalitatea se mai poate scrie:

$$\frac{xyz + xyu + xzu + yzu + 1}{xyzu} \leqslant \frac{31}{24} \quad \text{sau}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{xyzu} \leqslant \frac{31}{24}.$$

Trebuie să demonstrăm că maximul funcției din membrul stîng este $\frac{31}{24}$.

$$F(x, y, z, u) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{xyzu}.$$

Ținem seamă de relațiile din enunț: x, y, z, u întregi și pozitivi și $1 < x < y < z < u$. Atunci maximul funcției are loc pentru $x = 2; y = 3; z = 4; u = 5$.

Maximul funcției este $\frac{31}{24}$, deci inegalitatea e valabilă.

Problema 1902

Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația:

$$2x^2 + xy - xy^2 = 47.$$

Miron I. Oprea

Soluție dată de **Gh. Stoian**, București. — Ecuația se mai scrie:

$$x(2x + y - y^2) = 47.$$

Deoarece 47 este un număr prim, nu putem avea decît două cazuri:

a) $x = 1; \; 2x + y - y^2 = 47.$

Înlocuind pe x în a doua ecuație, obținem

$$y^2 - y + 45 = 0.$$

Această ecuație admite rădăcini imaginare.

b) $x = 47; \; 2x + y - y^2 = 1$, deci

$$y^2 - y - 93 = 0,$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 372}}{2}.$$

În acest caz ecuația nu admite rădăcini întregi.

Prin urmare, ecuația dată este imposibilă în numere întregi.

Problema 1922

Să se transforme în produs expresiile

$$\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24},$$

$$\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24} + \sin \frac{\pi}{6}.$$

* * *

Soluție. — *a)* Avem: $\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}=$

$$=\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}\right)=\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\frac{\pi}{24}=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}.$$

b) $$\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}+\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}+2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=4\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}.$$

Problema 1925

Se dau expresiile:

$$A_1=A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha,$$
$$B_1=C\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha-A\sin 2\alpha,$$
$$C_1=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha.$$

Să se arate că avem:

$$B_1^2-4A_1C_1=B^2-4AC.$$

* * *

Soluție. Adunînd și scăzînd prima și ultima ecuație obținem:

$$A_1+C_1=A+C,$$
$$A_1-C_1=(A-C)\cos 2\alpha+B\sin 2\alpha.$$

De aci rezultă:

$$A_1=\frac{(A+C)+(A-C)\cos 2\alpha+B\sin 2\alpha}{2},$$

$$C_1=\frac{(A+C)-(A-C)\cos 2\alpha-B\sin 2\alpha}{2}.$$

Deci,

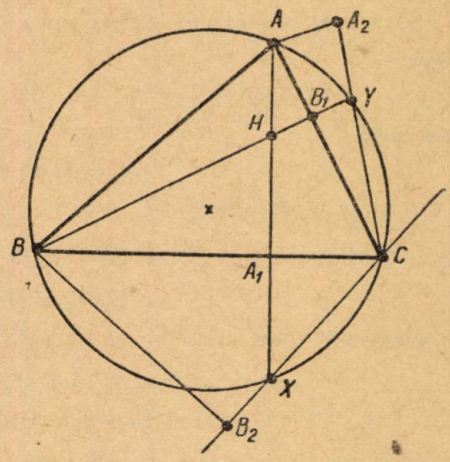
$$A_1C_1=\frac{(A+C)^2-[(A-C)\cos 2\alpha+B\sin 2\alpha]^2}{4}.$$

Prin urmare:

$$B_1^2-4A_1C_1=(C\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha-A\sin 2\alpha)^2-$$
$$-(A+C)^2+[(A-C)\cos 2\alpha+B\sin 2\alpha]^2=$$
$$=[B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha]^2-(A+C)^2+$$
$$+[(A-C)\cos 2\alpha+B\sin 2\alpha]^2=$$
$$=B^2\cos^2 2\alpha+(A-C)^2\sin^2 2\alpha-2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha-(A+C)^2+$$
$$+(A-C)^2\cos^2 2\alpha+2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha+B^2\sin^2 2\alpha=$$
$$=B^2(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)+(A-C)^2(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)-(A+C)^2=$$
$$=B^2+(A-C)^2-(A+C)^2=B^2-4AC.$$

Problema 1930

Într-un triunghi oarecare ABC, fie A_1, B_1 picioarele înălțimilor duse din A și B, iar H ortocentrul, CX și CY simetricele lui CH în raport cu AC și BC; iar A_2, B_2 proiecțiile lui A și B respectiv pe CX și CY. Să se demonstreze că punctele A_2, A_1, B_1, B_2 sînt colineare.



Șt. Musta

Soluție dată de **I. Lupuțiu,** București. După teorema «Simetricele ortocentrului față de picioarele înălțimilor se găsesc pe cercul circumscris triunghiului dat» avem că X, Y se găsesc pe cercul circumscris triunghiului ABC. Dreapta $B_2A_1B_1$ este dreapta lui Simson a punctului B față de triunghiul ACX.

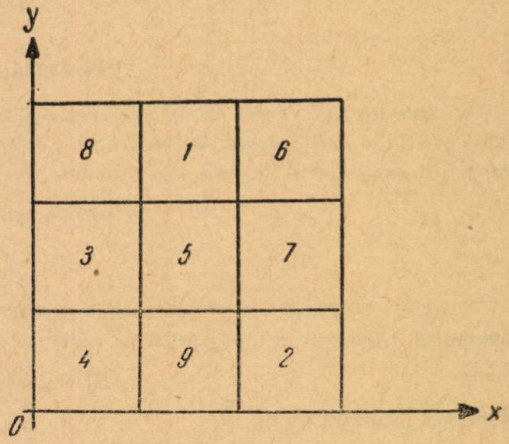
Dreapta $A_1B_1A_2$ este dreapta lui Simson a punctului A în raport cu triunghiul BCY.

Deci, punctele B_2, A_1, B_1 și A_1, B_1, A_2 fiind colineare, rezultă că A_2, A_1, B_2, B_1 sînt colineare.

Problema 1939

Pe o tavă pătrată orizontală, împărțită în nouă pătrățele egale, sînt așezate nouă greutăți de la 1 kgf *la* 9 kgf, *fiecare greutate avînd axa centrului său de greutate în mijlocul pătrățelului corespunzător. Greutățile sînt așezate astfel că suma lor pe linii, pe coloane sau pe diagonale să fie mereu* 15. *Care este centrul de greutate al sistemului?*

* * *



Soluție dată de **Gh. Stoian**, București. Fie $6a$ latura patratului. Coordonatele centrului de greutate sînt:

$$x = \frac{\sum M_{oy} F_i}{\sum F_i} \text{ și } y = \frac{\sum M_{ox} F_i}{\sum F_i},$$

deci,

$$x = \frac{8a + 3a + 30a + 3a + 15a + 35a + 4a + 27a + 10a}{8 + 1 + 6 + 3 + 5 + 7 + 4 + 9 + 2} = 3a,$$

$$y = \frac{40a + 5a + 30a + 9a + 15a + 21a + 4a + 9a + 2a}{8 + 1 + 6 + 3 + 5 + 7 + 4 + 9 + 2} = 3a.$$

Rezultă că centrul de greutate al sistemului este chiar centrul patratului.

Problema 1983

Să se arate că n fiind întreg și pozitiv avem:

$N_1 = 2^{8n+2} + 7^{4n+4}$ *este divizibil cu* 13,

$N_2 = 2^{8n+6} + 7^{8n+6}$ *nu este divizibil cu* 13,

$N_3 = 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ *este divizibil cu* 13.

* * *

Soluție. — a) $N_1 = 4 \cdot 2^{8n} + 7^4 \cdot 7^{4n}$.

Ținem seamă că $2^8 = 256 = M\,13 + 9$, iar $7^4 = 2401 = M\,13 + 9$.

Deci, $N_1 = 4\,(M\,13 + 9)^n + (M\,13 + 9)\,(M\,13 + 9)^n$,

$$N_1 = 4\,(M\,13 + 9^n) + (M\,13 + 9)\,(M\,13 + 9^n),$$

deci:

$$N_1 = M\,13 + 4 \cdot 9^n + 9 \cdot 9^n,$$

de unde:

$$N_1 = M\,13 + 13 \cdot 9^n = M\,13.$$

b) $N_2 = 2^6 \cdot 2^{8n} + 7^{8n} \cdot 7^6$.

Ținem seamă că: $2^6 = 64 = M\,13 - 1$,

$$7^6 = 117\,649 = M\,13 - 1.$$

Mai sus s-a văzut că $2^{8n} = M\,13 + 9^n$, iar $7^{4n} = M\,13 + 9^n$, deci

$$7^{8n} = M\,13 + 9^{2n} = M\,13 + 3^n, \text{ deci } N_2 = (M\,13 - 1)\,(M\,13 + 9^n) +$$
$$(M\,13 - 1)\,(M\,13 + 3^n), \text{ deci: } N_2 = M\,13 - (9^n + 3^n) \not\equiv M\,13.$$

c) O expresie de forma $3^{2p} + 3^p + 1$ e divizibilă cu 13 în cazul cînd $p = 3k \pm 1$, ceea ce s-a demonstrat în GMF, seria B, nr. 1/1956, pag. 30.

În cazul nostru $p = 3n + 1$, deci

$$N_3 = 3^{2(3n+1)} + 3^{3n+1} + 1 \text{ este divizibil cu } 13.$$

Problema 2012

Toate cercurile ce trec printr-un punct A și au centrele pe un cerc O de rază R, sînt tăiate după cîte un diametru de un cerc cu centrul într-un punct B care este simetricul punctului A în raport cu centrul O și de rază R_1, rază care este dată de relația:

$$2\,R_1^2 = 4\,R^2 + AB^2.$$

D. C. Panu, Galați

Soluție. — Fie C centrul cercurilor ce trec prin A și r raza unuia din ele, iar MN diametrul după care e tăiat cercul de centru B și rază R_1. Teorema lui Pitagora dă:

$$R_1^2 = BC^2 + r^2. \tag{1}$$

Teorema medianei ne dă:

$$BC^2 + r^2 = 2\,R^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}. \tag{2}$$

Comparînd (1) cu (2) rezultă:

$$2\,R_1^2 = 4\,R^2 + AB^2.$$

Problema 2027

Se consideră trei cercuri tangente exterioare. Fie A, B, C centrele acestor cercuri, α punctul de tangență al cercurilor cu centrele în B și C, iar β și γ punctele de tangență analoage. Să se demonstreze că punctele $A'\,(BC, \beta\gamma)$, $B'\,(AC, \alpha\gamma)$ și $C'\,(AB, \alpha\beta)$ sînt colineare.

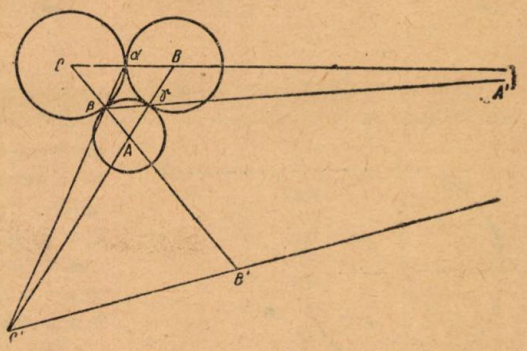
Gh. Dobrotescu, Predeal

Soluție dată de **Fl. Torjescu, Gh. I. Stoian** (București) și **Fl. Grosu** (Galați). Aplicăm teorema lui Menelaus triunghiului ABC tăiat de transversalele: $A'\gamma\beta$, $B'\gamma\alpha$ și $C'\gamma\alpha$:

$$(1)\qquad \frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{\gamma B}{\gamma A}\cdot\frac{\beta A}{\beta C}=1,$$

$$(2)\qquad \frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{\gamma B}{\gamma A}\cdot\frac{\alpha C}{\alpha B}=1,$$

$$(3)\qquad \frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{\beta A}{\beta C}\cdot\frac{\alpha C}{\alpha B}=1.$$



Înmulțim parte cu parte cele 3 relații:

$$\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{\alpha C^2}{\alpha B^2}\cdot\frac{\beta A^2}{\beta C^2}\cdot\frac{\gamma B^2}{\gamma A^2}=1.$$

Dar ținem seamă că $\beta C=\alpha C$; $\gamma B=\alpha B$ și $\beta A=\gamma A$; obținem

$$\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'B}{C'A}=1,$$

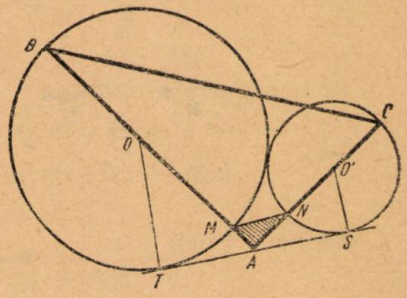
ceea ce, conform reciprocei teoremei lui Menelaus, ne arată că A', B', C' sînt colineare.

Problema 2086

Se dau 2 cercuri tangente exterioare. Unim mijlocul A al tangentei comune TS cu O și O' astfel ca dreptele formate să taie cercul O în M și B, iar cercul O' în N și C. Să se demonstreze asemănarea triunghiurilor ABC și AMN.

Radu Ionescu, elev, Turnu Severin

Soluție. Unim pe O cu T (situat pe cercul O) și pe O' cu S (situat pe cercul O'). Din triunghiurile dreptunghice AOT și $AO'S$ avem:



$$OA^2=OT^2+AT^2$$

și

$$O'A^2=O'S^2+AS^2$$

sau

$$O'A^2=O'S^2+AT^2.$$

Dar:

$$OA^2=OM^2+2OM\cdot AM+AM^2$$

și

$$O'A^2=O'N^2+2O'N\cdot AN+AN^2.$$

Înlocuim:

$$OM^2+AM(2OM+AM)=OT^2+AT^2,$$

$$O'N^2+AN(2O'N+AN)=O'S^2+AT^2.$$

Dar $OM=OT$ și $O'N=O'S$, deci:

$$AT^2=AM(2OM+AM)\quad\text{și}\quad AT^2=AN(2O'N+AN).$$

Dar $2OM+AM=AB$, iar $2O'N+AN=AC$, deci:

$$AM\cdot AB=AN\cdot AC\quad\text{sau}\quad\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}.$$

Triunghiurile având și unghiul A comun, sînt asemenea.

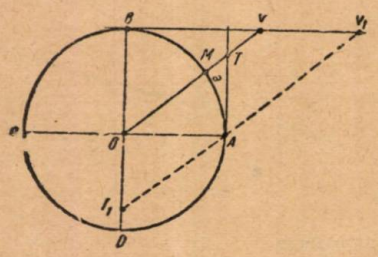
Problema 2092

Să se demonstreze geometric identitatea:

$$(1 + \operatorname{tg} a)^2 + (1 + \operatorname{ctg} a)^2 = (\sec a + \operatorname{cosec} a)^2.$$

Dinu Gheorghe, Craiova

Soluție. — Considerăm cercul trigonometric din figură, împărțit în cele patru cadrane prin punctele A, B, C, D. Luăm pe cerc punctul M și notăm arc $AM = a$. Construim funcțiile trigonometrice ale arcului a: $AT = \operatorname{tg} a$, $BV = \operatorname{ctg} a$, $OT = \sec a$, $OV = \operatorname{cosec} a$. Pe segmentul OD luăm punctul T_1 astfel ca $OT_1 = AT = \operatorname{tg} a$. Dreapta T_1A prelungită, intersectează pe BV în V_1. Se observă ușor, că patrulaterul OT_1AT este paralelogram fiindcă $OT_1 = AT$ și $OT = AT_1$. Rezultă că $T_1A = OT = \sec a$ și $OV \parallel T_1V_1$.



La fel patrulaterul OAV_1V este paralelogram deoarece $OV \parallel AV_1$ și $OA \parallel VV_1$. Rezultă imediat: $AV_1 = OV = \operatorname{cosec} a$ și $VV_1 = OA$.

Ținînd seamă de cele arătate mai sus putem scrie relațiile:

$$BT_1 = BO + OT_1 = 1 + \operatorname{tg} a, \tag{1}$$

$$BV_1 = V_1V + BV = 1 + \operatorname{ctg} a, \tag{2}$$

$$T_1V_1 = T_1A + AV_1 = \sec a + \operatorname{cosec} a. \tag{3}$$

Triunghiul T_1BV_1 fiind dreptunghic, trebuie să avem:

$$BT_1^2 + BV_1^2 = T_1V_1^2.$$

Înlocuind valorile din relațiile (1), (2) și (3) obținem:

$$(1 + \operatorname{tg} a)^2 + (1 + \operatorname{ctg} a)^2 = (\sec a + \operatorname{cosec} a)^2. \tag{4}$$

În acest fel am demonstrat identitatea trigonometrică (4) pe cale geometrică.

Problema 2094

Să se demonstreze identitatea:

$$(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3) - (a - b)^3 (b - c)^3 (c - a)^3 =$$

$$= 3(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)(a - b)(b - c)(c - a).$$

Mircea Adam

Soluție. — Avem:

$$(a - b)(b - c)(c - a) = \Sigma ab^2 - \Sigma a^2b = A - B,$$

deci:

$$\Pi (a - b)^3 + 3\Sigma a^2b \, \Sigma ab^2 \cdot \Pi (a - b) = (A - B)[(A - B)^2 + 3AB] = A^3 - B^3;$$

identitatea din enunț devine:

$$\Sigma a^3b^6 - \Sigma a^6b^3 = (\Sigma ab^2)^3 - (\Sigma a^2b)^3; \tag{1}$$

folosind o identitate cunoscută:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

rezultă:

$$(ab^2 + bc^2 + ca^2)^3 = a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3abc(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab),$$

$$(a^2b + b^2c + c^2a)^3 = a^6b^3 + b^6c^3 + c^6a^3 + 3abc(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab),$$

care scăzute una din alta conduc la relația (1).

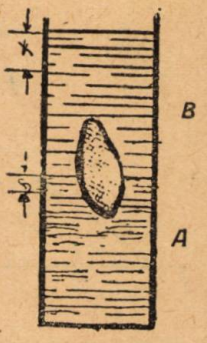
Problema 2139

O eprubetă de secțiune interioară S, divizată în patru părți egale de capacitate, conține două lichide A și B nemiscibile (nu se amestecă). Lichidul mai greu A, are densitatea D, iar lichidul mai ușor B, are densitatea d. Se introduce în eprubetă o bucată de aluminiu cu densitatea $\delta = 2{,}68$ care plutește în cele două lichide, ridicînd nivelul inițial al lichidului A cu a diviziuni. Știind că fiecare diviziune reprezintă 1 mm, se cere:

1° numărul de diviziuni x cu care se va ridica nivelul lichidului B,

2° greutatea bucății de aluminiu introdusă în eprubetă.

Aplicație. $S = 12{,}56$ cm²; $D = 13{,}6$; $d = 1$ și $a = 2$ diviziuni.



Ing. Const. Necșoiu

Soluție. 1° Volumul bucății de aluminiu se compune din volumul pe care aceasta îl deslocuiește în lichidul A și care este egal cu $V' = S \cdot a$ și din volumul V'' deslocuit de corp în lichidul B.

Pe de altă parte, volumul deslocuit de corp reprezintă volumul cu care se ridică lichidul B, adică $V' = S \cdot x$. Vom avea atunci relația:

$$V' + V'' = V$$

de unde scoatem:

$$V'' = V - V' = S(x - a).$$

Conform legii lui Arhimede putem scrie relația:

$$V'D + V''d = V \cdot \delta.$$

Făcînd înlocuirile și simplificările respective, obținem ecuația:

$$aD + d(x - a) = \delta \cdot x$$

de unde:

$$x = \frac{a(D - d)}{\delta - d}.$$

În cazul aplicației avem:

$$x = \frac{2(13{,}6 - 1)}{2{,}68 - 1} = \frac{2 \times 12{,}6}{1{,}68} = 15 \text{ diviziuni} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

2° Volumul corpului:

$$V = Sx = 12{,}56 \cdot 1{,}5 = 18{,}84 \text{ cm}^3.$$

Greutatea corpului:

$$G = V \cdot \delta = 18{,}84 \cdot 2{,}68 = 50{,}5 \text{ grame}.$$

Problema 2239

Să se construiască un triunghi cunoscînd:

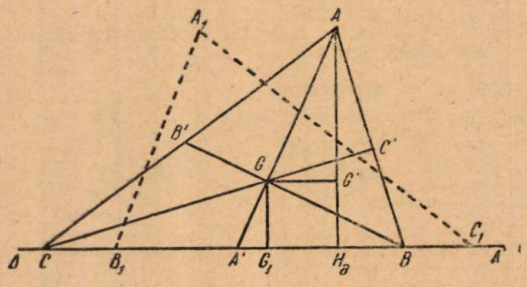
1) două mediane și o înălțime; 2) două înălțimi și o mediană.

Gh. Buicliu

Soluție. — 1) Se deosebesc două cazuri și anume:

a) *Se cunosc medianele BB', CC' și înălțimea AH_a.* Fie G punctul de întîlnire al medianelor și G', G_1 proiecțiile lui G pe AH_a și pe BC. Deoarece G împarte pe AA' în 2 segmente al căror raport este $\frac{1}{2}$ $\left(\text{sau 2 dacă se ia } \frac{AG}{GA'}\right)$, urmează că $G'H_a = \frac{AH_a}{3} = GG_1$ și atunci în triunghiul BGC se cunosc laturile $BG = \frac{2}{3} BB'$; $CG = \frac{2}{3} CC'$ și înălțimea $GG_1 =$

$= \frac{1}{3} AH_a$. Acest triunghi se construiește imediat în felul următor: în extremitatea G_1 a segmentului GG_1 se duce perpendiculara $\Delta\Delta'$ care este interceptată în C și C_1 de cercul cu centrul în G și cu raza $CG = \frac{2}{3} CC'$ și în B, B_1 de cercul cu centrul în G și raza $GB = \frac{2}{3} BB'$. Se prelungește $A'G$ cu $GA = 2\ A'G$ și se obține triunghiul ABC. Punctele



B_1, C_1 dau un al doilea triunghi $A_1B_1C_1$ egal cu precedentul simetric față de GG_1.

Singura condiție de posibilitate este ca GG_1 să fie mai mic decît cea mai mică din lungimile BG și CG, în cazul figurii BG, deci:

(1) $GG_1 = \frac{h_a}{3} \leqslant \frac{2m_b}{3}$ și $h_a < 2m_a$.

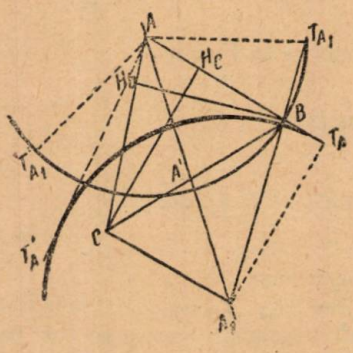
b) *Se cunosc medianele* BB', AA *și înălțimea* AH_a, care pleacă din același vîrf cu una din mediane. Se construește triunghiul dreptunghic $AH_a A'$ în care se cunoaște ipotenuza AA' și cateta AH_a, apoi se determină G după care se construiesc punctele B, B_1 ca la punctul *a*). Ca problema să fie posibilă se cere condiția (1) și $h_a < m_a$.

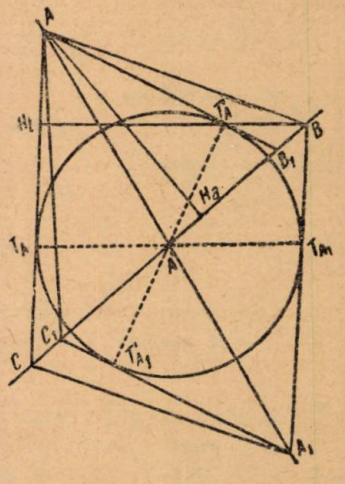
2) Și în acest caz se deosebesc două cazuri:

a) *Se cunosc înălțimile* BH_b, CH *și mediana* AA'. Fie A_1 simetricul lui A față de A', AT_{A_1} proiecția lui A pe A_1B și T_A proiecția lui A_1 pe AB. Se observă din paralelogramele $AH_b\ BT_{A_1}$ și $A_1\ CH_c\ T_A$ că

$$AT_{A_1} = BH_b \quad \text{și} \quad A_1T_A = GH_c.$$

Acum urmează construcția: pe o dreaptă dată se ia lungimea $AA_1 = 2m_a$ și cu mijlocul în A'. Se descriu cercurile A (h_b), A_1 (h_c) la care se duc tangentele $A_1T_{A_1}$ și AT_A care se taie în B. Al patrulea vîrf al paralelogramului ABA_1C este al treilea vîrf C al triunghiului căutat.





Notă. Din A_1 și A se pot duce cîte două tangente $A_1T_{A_1}$, $A_1T'_{A_1}$ și AT_A, AT'_A la cele două cercuri. Asociind de exemplu, pe T_{A_1} pe rînd cu T_A, T'_A se obțin două soluții, așa că problema are patru soluții diferite cu condiția ca lungimile date h_b, h_c să fie mai mici decît $2\ m_a$.

b) *Se cunosc înălțimile* AH_a, BH_b *și mediana* AA' care pleacă din același vîrf cu înălțimea AH_a.

Se construește triunghiul dreptunghic $AH_a A'$ ca la punctul b) și se completează paralelogramul ABA_1C în care se duce prin A' paralela $T_A T_{A_1}$ la BH_b. Se observă că $BH_b T_A T_{A_1}$ este dreptunghi și că A' este mijlocul lui $T_A T_{A_1}$. De aici rezultă următoarea construcție: se construește triunghiul dreptunghic $AH_a A'$ și cercul $A'\left(\frac{h_b}{2}\right)$. Tangentele AT_A, $A_1 T_{A_1}$ la acest cerc taie pe $A'H_a$ în vîrfurile C și B.

A doua pereche de tangente AT'_A și $A_1 T'_{A_1}$ determină un al doilea triunghi $AB_1 C_1$.

Problema este totdeauna posibilă dacă $\frac{h_b}{2} < m_a$. Cînd $h_a = m_a$, se obțin două triunghiuri isoscele cu aceiași condiție

$$\frac{h_b}{2} < m_a = h_a.$$

PROBLEME PROPUSE*)

2342. Două bare AO și BO articulate între ele în O, se mișcă într-un același plan. Se cunosc vitezele $\bar{v}_A$ și $\bar{v}_B$ ale extremităților A și B. Se cere viteza în O.

Alexandru Stoenescu

2343. Suma patratelor medianelor unui triunghi ABC este egală cu m^2, perimetrul triunghiului este egal cu $2p$, iar diametrul cercului circumscris este egal cu $2R$. Să se determine laturile triunghiului și raza cercului înscris.

R. Bernstein

2344. Să se determine minimul expresiei:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{S},$$

unde a, b, c sînt laturile, iar S este aria triunghiului.

M. Cerepnin, Karaganda

2345. Să se afle intervalele de valori ale lui x cuprinse între 0° și 360° pentru care avem simultan identitățile:

$$\operatorname{tg} 4x = \sqrt{\frac{1 - \cos 8x}{1 + \cos 8x}} \text{ și}$$

$$\sec 6x + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 6x} = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

2346. Se dă un triunghi oarecare ABC. Se duce cercul circumscris acestui triunghi Tangentele la acest cerc, paralele cu laturile triunghiului ABC, determină un triunghi. $A'B'C'$.

Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente. Să se arate că raza cercului circumscris triunghiului ABC este medie proporțională între raza cercului înscris triunghiului ABC și raza cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$.

Simon Șt. Petre

---

*) Clasa VIII-a: 2349, 2350, 2353, 2358, 2359, 2361, 2362, 2365, 2366).

Se primesc soluții pînă la apariția numărului 11, *noiembrie* 1956, *numai la problemele apărute în ultimele trei numere și la problemele*: 2215—2223, 2226—2229, 2232—2240, 2244—2245, 2249—2251, 2263—2269, 2274, 2280, 2283, 2286 *și următoarele.*

2347. Să se determine numerele de trei cifre pătrate perfecte cărora scăzîndu-le cîte o unitate din primele două cifre și adunînd două unități ultimei cifre să ne dea tot pătrate perfecte.

Istodor Valentin, student, București

2348. În ce bază de numerație numerele de cîte două cifre 17 și 71 sînt două puteri consecutive de ale lui 4 și care sînt acele puteri?

Gh. Buicliu

2349 Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd înălțimea AA_1; distanța A_1A_2 (A_2 fiind mijlocul laturii BC) și R raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Kiss Elemer

2350. O rază de lumină monocromatică aflată în secțiunea dreaptă a unei prisme cu unghiul de refringență de 26°, cade pe o față și iese normal din prismă pe fața cealaltă, unghiul de deviație al razei fiind 16°32′. Să se determine materialul din care este confecționată prisma.

M. Stănciulescu, elev, Tîrgoviște

2351. Fie A_1, B_1, C_1 proiecțiile vîrfurilor triunghiului ABC pe o dreaptă dată Δ și M, N, P respectiv mijloacele segmentelor A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1. Perpendicularele duse din punctele M, N, P pe laturile AB, BC, AC sînt concurente.

Sorin Stegărescu, elev, Iași

2352. Să se calculeze factorul de putere al unei bobine fără miez de fier avînd rezistența $R = 4{,}9$ ohmi, cînd aceasta consumă o putere de 1000 W la o tensiune de 100 V.

Gheorghe I. Stoian, student, București

2353. O navă plutește în apropierea unei coaste într-un drum dat. În momentul cînd un obiect A se află la travers, se măsoară cu sextantul înălțimea obiectivului. Unghiul citit la sextant este de 3α. Nava parcurge distanța a, apoi măsurîndu-se din nou înălțimea obiectului, unghiul citit la sextant este α. Se cere înălțimea obiectului de pe coastă.

Dan Ulea, Constanța

2354. Într-o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei a și înălțimea h, se face o secțiune ce trece printr-o diagonală a bazei și face cu planul bazei unghiul α. Să se afle volumul piramidei ce are ca bază secțiunea făcută și ca vîrf, vîrful piramidei date ($\alpha < 90°$)

Radu Stroe, elev, Ploești

2355. Dacă $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, să se arate că $\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b}$.

* * *

2356. Să se descompună în factori expresiile:

$$E_1 = x^3 - 5x^2 + 3x + 9,$$

$$E_2 = 3x^3 - x^2 + 3x - 5.$$

* * *

2357. Să se formeze ecuația de gradul II ale cărei rădăcini satisfac relațiile:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{m^2 + 1}{m^2} \quad ; \quad (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 0,$$

m fiind cunoscut.

Donea Sorin, Buhuși

2358. O bicicletă are 2 roți dințate de cîte 15 și 43 dinți, cu centrele așezate la distanța de 52 cm. Să se afle numărul zalelor lanțului care le angrenează știind că roata cea mare are diametrul exterior egal cu 20 cm.

Șt. Teodorescu, Ploești

2359. În ce triunghi există relația:

$$1 - \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului.

D. Prisadă

2360. Să se afle rădăcinile reale ale ecuației:

$$\left(3 \cdot \frac{3-x}{1+x}\right)^4 + \left(3 \cdot \frac{1+x}{3-x}\right)^4 = 6562.$$

A. Iorgulescu, elev, București

2361. Fie un triunghi oarecare ABC și cercul său circumscris. Perpendiculara din B pe diametrul AD taie acest diametru în M; mai taie latura AC în N și cercul în P. Prin punctul P se duc paralele la DC și AC, care taie pe AC și DC respectiv în Q și R.

a) Să se arate că punctele M, Q, R sînt așezate pe o paralelă la BC.

b) Să se arate că $NP \cdot BC = NB \cdot QR$.

St. D. Donescu, student, București

2362. Să se arate că aria triunghiului mărginit de înălțimea dusă din A, vîrful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC, și de bisectoarele unghiurilor ascuțite, este dată de expresia:

$$\frac{b^2c^2(b-c)^2}{2a(a+b)(a+c)(a+b+c)},$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului ABC.

M. I. Predoiescu, București

2363. Să se rezolve ecuația:

$$(x-1)(x-11)(x-21)(x-31) = 7161.$$

* * *

2364. Să se arate că dacă ecuația $x^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale, atunci și ecuația

$x^2 + bx + c + (x+a)(2x+b) = 0$ are rădăcini reale.

C. Draica, elev, București

2365. Pistonul unei mașini cu vapori execută 50 lovituri pe minut. Știind că lungimea cilindrului este de 0,8 m, iar secțiunea de 8,50 dm^2, să se calculeze presiunea în condensator pentru ca puterea mașinii să fie de 5300 W. Se consideră presiunea vaporilor în cazan de 180 cm coloană mercur.

V. Atanasiu

2366. Avem un dinam excitat în derivație. Firul derivat care bobinează electromagnetul are diametrul de 1 mm, lungimea de 1385 m și rezistivitatea de 0,017 ohmi.

Cunoscînd că f.e.m. totală este de 120 volți, intensitatea curentului în indus de 100 amperi și rezistența în indus de 0,05 ohmi, să se determine: *a)* diferența de potențial utilă; *b)* randamentul dinamului.

V. Atanasiu

2367. La pol, Soarele se găseşte o jumătate de an deasupra orizontului, iar cealaltă jumătate de an, sub orizont. Ce se întîmplă cu Luna?

(Fizica v şcole)

2368. Dacă vom merge tot timpul înspre nord-est, unde vom ajunge?

(Fizica v şcole)

2369. Avem un litru de apă fierbinte cu temperatura T şi un litru de apă rece cu temperatura t. Încălzim cu ajutorul apei fierbinţi, apa rece. Cum se poate face ca temperatura finală a litrului de apă rece să fie mai mare decît temperatura finală a apei fierbinţi? (Se pot folosi şi alte vase auxiliare).

(Fizica v şcole)

CHESTIUNI DE EXAMEN

SUBIECTE DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTĂŢI ÎN AUGUST 1956

2370. Se consideră ecuaţia de gradul al doilea, $x^2 - mx + m^2 - 3m + 2 = 0$ în care m este un parametru variabil. Se cere:

a) pentru ce valori ale lui m ecuaţia are rădăcini distincte; pentru ce valori ale lui m are o rădăcină dublă şi ce valoare are rădăcina dublă?

b) să se studieze după valorile lui m semnul rădăcinilor.

c) Să se determine m astfel ca una din rădăcini să fie dublul celeilalte. Care sînt rădăcinile acestea?

d) Se poate alege m astfel încît rădăcinile ecuaţiei date să fie sinusul şi cosinusul unui arc α? Să se determine arcul α.

(La Facultatea de Matematică şi Fizică Bucureşti, 1956)

2371. *a)* Să se rezolve şi să se discute sistemul:

$$\begin{aligned} x + (m+1)\,y + z &= 2 + m - m^2, \\ mx + y - z &= 0, \\ x - 2y - mz &= -2 + 3m - m^2, \end{aligned}$$

ştiind că m este un parametru.

b) Să se examineze cazurile particulare:

$$m = -1; \quad m = 2; \quad m = -2.$$

(La Facultatea de Matematică şi Fizică Bucureşti, 1956)

2372. Se dă trinomul:

a) $$y = mx^2 - (1 - 3m)\,x + 2m.$$

Ce valoare trebuie să aibă m pentruca rădăcinile acestui trinom să fie reale?

b) Se consideră două trinoame:

$$y_1 = m_1x^2 - (1 - 3m_1)\,x + 2m_1,$$

$$y_2 = m_2x^2 - (1 - 3m_2)\,x + 2m_2,$$

valorile parametrilor m_1 şi m_2 fiind distincte $m_1 \neq m_2$.

Să se stabilească o relaţie între m_1 şi m_2 în următoarele două cazuri:

— cînd suma rădăcinilor primului trinom este egală şi de semn contrar cu suma rădăcinilor celui de-al doilea trinom,

— cînd suma patratelor rădăcinilor este aceiaşi pentru ambele trinoame.

(La facultatea de matematică şi fizică, Bucureşti, 1956)

2373. Într-un triunghi ABC cele trei unghiuri așezate în ordinea $A < B < C$ sînt în progresie aritmetică de rație α adică $A = B - \alpha$, $C = B + \alpha$, $\alpha > 0$. Se cere:

Să se rezolve trunghiul cunoscîndu-se perimetru $2p$ și unghiul α Discuție.

Să se transforme expresiile obținute pentru laturi în formule calculabile prin logaritmi.

Dîndu-se perimetrul $2p$ și suprafața S a triunghiului ABC, să se arate că

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + 3\sqrt{3}}{2(p^2 - S\sqrt{3})}.$$

(La facultatea de matematică și fizică, București, 1956)

2374. Se dau două cercuri cu centrele în O și O' care se întîlnesc în două puncte A și B. Se consideră diametrul $MON \parallel O'A$ și diametrul $M'O'N' \parallel OA$ (punctele M_1, M_1', A_1 sînt de aceiași parte a dreptei OO').

a) Să se arate că triunghiurile MOA și $M'O'A$ sînt asemenea, iar triunghiurile NOA și $N'O'A$ sînt asemenea.

b) Să se stabilească că dreptele AM și AM' sînt confundate; AN și AN' sînt confundate.

(La facultatea de matematică și fizică, București, 1956)

2375. *a)* Fie ecuația $4x^2 - 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$.

1. Să se arate că are rădăcini reale ori care este λ.

2. Cînd sînt rădăcinile de semne contrarii?

3. Să se găsească un punct A pe axa X, de abscisă x_0 astfel ca produsul $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)$ să nu depindă de λ, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date pentru un λ oarecare. Ce reprezintă diferențele $x_1 - x_0$; $x_2 - x_0$?

4. Care este minimum distanței $(x_2 - x_1)$ luată în valoare absolută?

b) Să se adune fracțiile

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b} + \frac{2b^3 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2}.$$

c) Distanța Brăila — Galați este de 20 km. Un vapor parcurge această distanță dus și întors în 2 ore și 5 minute. Să se afle viteza vaporului știind că viteza curentului este de 4 km pe oră.

(La admiterea în Institutul Tehnic Galați, 1956)

2376. *a)* Să se rezolve un triunghi ABC în care se cunoaște unghiul A și segmentele $m = DC$ și $n = BD$ determinate pe latura BC de către înălțimea AD dusă din A.

Aplicații: $A = 120$; $m = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$; $n = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

b) Un triunghi isoscel se rotește în jurul unei laturi egale, iar α este unghiul format de cele două laturi egale.

1. Cît este volumul și suprafața corpului obținut?

2. Pentru ce valoare a lui α volumul este maxim?

c) Fie o sferă fixă de rază R la care se circumscrie un con de rotație, ale cărui generatoare sînt înclinate pe planul bazei de unghiul 2α.

1. Să se găsească suprafața totală a conului.

2. Să se găsească volumul conului.

3. Să se arate că raportul între volumul conului și suprafața totală nu depinde de mărimea conului.

4. Care este raza sferei înscrisă într-un con de revoluție avînd r ca rază a cercului de bază și h înălțimea?

(La admiterea în Institutul Tehnic, Galați, 1956)

2377. *a)* Ecuația:

$$x^2 + px + q = 0$$

are rădăcinile x_1 și x_2.

Să se formeze ecuația de gradul al doilea avînd ca rădăcini

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2} + x_2 \quad \text{și} \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1} + x_1 .$$

b) Să se verifice identitatea:

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}.$$

c) Se dă un triunghi dreptunghi de arie A și cu catetele x și y. Presupunînd $y > x$, se duce o paralelă la cateta x la distanța x_0 de vîrful corespunzător, iar trapezul format să aibă aria T. Să se determine x și y.

Aplicație: $A = 108°$; $T = 60$ m^2.

(La admiterea în Institutul tehnic, Fac. alimentară, Galați, 1956)

2378. Să se rezolve ecuația:

$$\log \sqrt[3]{10\,x^2} - 2\log(10\,x^2) = 5.$$

(La facultatea de Chimie, București, 1956)

2379. Să se rezolve ecuația:

$$\sin(x + 10°) - \sin(x - 50°) + \sin(x + 70) = 1.$$

(La facultatea de Chimie, București, 1956)

2380. Să se construiască un triunghiu ABC cînd se dă piciorul înălțimii din A, piciorul medianei din A și piciorul medianei din B. Să se justifice construcția.

(La facultatea de Chimie, București, 1956)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 874. Un avion care zboară cu o viteză de 500 km pe oră, se găsește la 120 km în urma altuia care zboară cu viteza de 350 km pe oră. După cît timp avionul cu viteza mai mare va ajunge pe celălalt?

* * *

E: 875. Două paralele sînt tăiate de o secantă în M și N. Bisectoarea unui unghi din M taie paralela din N în A, iar o paralelă oarecare la MA taie pe MN în B și pe AN în C. Dreptele AB și MC se taie în D. Să se demonstreze că dreptele DN și AM sînt perpendiculare.

Zamfirescu Tudor, elev, București

E: 876. Împărțind un număr la 9, el se micșorează cu 2000. Să se afle acel număr.

* * *

E: 877. Un aliaj de platină are titlul de 0,8 și conține 950 grame platină pură. Să se afle greutatea aliajului.

* * *

---

* V: E. 874, 876, 879, 884, VI: E. 878, 880, 881, 882, VII: 875, 877, 883.

E: 878. Să se arate că:

$$\frac{x(y^2+z^2)+y(x+z)^2+z(x^2+y^2)}{x^2(y+z)-y^2(x+z)+z^2(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}.$$

S. Dobronăuțeanu, Bacău

E: 879. Un lucrător a executat în prima zi de lucru o treime din piesele pe care le avea de executat, iar a doua zi cu 3 piese mai mult decît în prima zi. Știind că i-au mai rămas 12 piese să se afle cîte piese a executat în prima zi de lucru.

* * *

E: 880. Să se afle numărul ale cărui cinci optimi întrec sfertul lui cu 150.

B. I. Baieră

E: 881. Într-un rezervor se află 1200 litri de apă sărată în proporție de 8%. Dacă se adaugă 450 litri de apă curată, să se afle noua concentrație.

* * *

E: 882. Dacă

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}=\frac{a+b-c-d}{-a+b+c-d},$$

să se arate că:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+d}.$$

Gelu Grofșoreanu, elev, București

E: 883. Să se arate că:

$$m^2+\frac{1}{m^2}-8\left(m-\frac{1}{m}\right)+14=\left(m-\frac{1}{m}-4\right)^2.$$

Gh. Dobrotescu

E: 884. Un strungar lucrează la strung cu o viteză de tăiere de 4 mm pe secundă, 8 piese într-o oră. Cîte piese de același fel ar putea să termine pe oră dacă ar lucra cu o viteză de tăiere de 6 mm pe secundă.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pînă la 1 mai 1956 s-au evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Pleniceanu Ioan (student Petroșani), *Andricioaiei Gheorghe* (clasa IX Botoșani), *Sgăvîrdea Dumitru* (clasa X Timișoara), *Lupuțiu Ioan* (student Fac. Mecanică București), *Stepan Ionel* (absolvent Constanța), *Gherman Corneliu* (clasa IX Botoșani), *Bogdan P. Mircea* (clasa X Ploești), *Florescu Gh. Mircea* (student mecanică București), *Popescu P. Roger* (clasa X s.m. 11 « D. Cantemir » București), *Ciubotaru C. Const.* (clasa X Truseşti), *Tudor N. Constantin* (clasa X Tîrgoviște), *Pupăzan V. Nicolae* (școala de artilerie Sibiu, *Roman Barbu* (clasa X Ploești), *Voinea I. Alex.* (clasa X s.m, 1 Craiova), *Matei C. Paul* (clasa X Tg. Mureș), *Stănculescu Adrian* (clasa X s.m. 1 Craiova), *Vasiliev Lucia* (clasa IX Constanța), *Rusu Dan* (clasa IX s.m. 1 Ploești), *Roșca Valentin* (clasa X s.m. 1 Craiova), *Vasiliu Monica* (clasa X Bacău), *Bătineț M. Dumitru* (absolvent Giurgiu), *Jurcă Valeriu* (clasa X Ploești), *Zilberman Mircea* (clasa X Bacău), *Tudor M. Gheorghe* (clasa IX s.m. 13 București), *Colonati Cristian* (clasa X Cîmpina), *Rotaru Const.* (student Iași), *Bărbuică C. Nicolae* (clasa X Craiova), *Mitu S. Ioan* (clasa X Piatra Neamț), *Hulubei Valeriu* (clasa X s.m.l. Craiova), *Șarpe I. Dumitru* (clasa X Corabia), *Colulea Ioan* (student Cluj), *Rottemberg R. Martin* (clasa IX Botoșani), *Trifu Mircea* (clasa VIII Alba Iulia), *Fedorschi Dumitru* (clasa X Truşeşti), *Paulescu N. Dan* (clasa X R. Vîlcea), *Draica Const.* (clasa IX s.m. 4 « Aurel Vlaicu » București), *Ancuțoiu I. Gheorghe* (clasa IX R. Vîlcea), *Enescu Nicolae* (clasa X R. Vîlcea), *Rădu-*

lescu D. Const. (clasa IX s.m. 4 « Aurel Vlaicu » Bucureşti), *Grigorescu D. Ion* (clasa X), *Păunescu I. Lucian* (clasa X s.m. 17 Bucureşti), *Cojocaru Ion* (clasa X s.m, 2 Craiova), *Bîrzan Romanel* (clasa IX Cluj), *Aniţescu N. Nicolae* (clasa X Tg. Jiu), *Ionescu Radu* (clasa X Tr. Severin), *Turiga M. Const.* (absolvent Urziceni), *Donea Sorin* (absolvent Bacău), *Dudă Nicolae* (absolvent Călăraşi), *Gervescu M. Ioan* (clasa VIII Piatra Neamţ), *Boloran I. Petru* (absolvent Giurgiu), *Ianuş I. Stere* (clasa IX Constanţa), *Bigan Stan* (absolvent Giurgiu), *Ene I. Ion* (clasa X s.m. 20 Bucureşti), *Olteanu D. Const.* (clasa IX Piteşti), *Dănilă Marcel* (clasa X Iaşi), *Ivănică Alex.* (clasa X s.m. 4 « Aurel Vlaicu » Bucureşti), *Iordănescu R. Sorin* (clasa IX s.m. 20 Bucureşti), *Zorapapel Tiberiu* (clasa IX s.m. 20 Bucureşti), *Bulucea D. Const.* (clasa IX R. Vîlcea) şi *Grigoriu Corneliu* (clasa IX Tîrnăveni).

Pînă la 1 mai 1956 s-au primit cel puţin cîte 10 probleme bine rezolvate de la următorii colaboratori:

AIUD (Cluj). Clasa VIII-a. Scarlet A. Rodica (1970, 71, 76, E: 747, 49—52, 54, 56, 65, 66, 71, 73, 74). Clasa X-a. Suciu I. Ion (2015, 17, 20—24, 32, 41, 42, 45, 53, 54, 79, 86, 100, 04). *Şcoala medie mixtă Ocna Mureşului.* Clasa IX-a. Bucurenciu Zorin (1819, 949, 51, 58, 64, 84, 92, 97, 98, 2004,—06, 07—11, 21, 23, 24, 35, 37—39).

ALBA IULIA. Clasa VIII-a. Patzer Herbert (1954, 90, 92, 98, 2006, E: 748, 51, 54, 57, 62, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 75), Trifu Mircea (1938, 40, 49, 62—64, 70—95, 98, 2006, 11, E: 747, 54, 58, 62, 65, 72, 74—76). Clasa X-a. Voicu Virgil (1963, 64, 66, 71, 73, 90, 92, 97, 2006, 07, 09, 21, 42, 88, 100, 09, 18, 19, 21, 29, 30).

ALEXANDRIA. — Clasa IX-a. Gatu F. Ilie (1960, 67, 73—75, 77, 84, 92, 97, 98, 2003, 06, 08, 11, 15, 20, 21, 42, 48, 50, 65, 70, 88, 94, 102, 04), Ionescu Alexandru (1948, 49, 52, 54—57, 62, 76, 77, 92, 97, 2021), Ploeşteanu S. Ion (1992, 97, 98, 2003, 04, 06, 07, 10, 15, 2020, 21, 32, 34, 42, 45, 54, 59, 79, 81—83, 86, 88, 89, 100, 02, 11, 12), Stoican Ştefan (1848, 50, 55, 70, 71, 73—75, 77, 85, 92, 2007, 21, 29, 32, 34, 81, 82, 88, 89. Clasa X-a. Berceanu T. Dumitru (1992, 93, 2006, 15, 23, 42, 43, 45, 50, 53, 59, 116, 23, 25, 29, 38), absolvent Motancea N. Mihail (1948, 51, 55, 56, 60, 63, 2006, 10, 21, 50, 111).

ARAD. — Clasa VIII-a. Boşuleac Dorin (1955, 71, 74, 75; E: 735, 38, 40, 45, 49, 52, 53), Popian Lucia (2014, E: 747 49—52, 65—67, 74). Clasa X-a. Scăueru Constantin (1948, 49, 51, 55—57, 60, 61, 76, 77, 85, 90), Stoica Emilia (1948, 50, 52, 54—56, 60, 61, 63, 92, 2006, 32, 42, 49, 81).

BABENI (Piteşti). — Măriuţă D. Maria (1975, 76, 96, 98, 2001, 03 06, 20, 21, 24).

BACĂU. — *Şcoala elementară din Păuneşti, Adjud.* Clasa V-a. Chiriac Valeriu (E: 724, 27, 38, 47, 50, 58, 73, 74, 76, 77, 81). Clasa VI-a. Pintilie Florica (E: 742, 64, 70, 74, 76—78, 80 81 88), Novac Gh. Gheorghe (E: 753 64 67 74 76 77 80, 81, 88, 90), Vasilachi Zarafina (E: 743, 62, 64, 66, 74, 76, 77, 80, 81, 88). Clasa VII-a. Apostu C. Ioana (E. 733, 43, 45, 46, 54, 56, 64, 66, 71, 81, 88, 90), Bostan Costică (E: 737, 38, 46, 66, 73, 74, 76, 81, 90, Ignat Maria (E: 743, 45, 46, 54, 56, 64—66, 71, 76, 81, 90), Popa Neculai (E: 738, 43, 46, 64, 66, 67, 73, 76, 80, 81, 88, 90), Stoica Neculai (E: 742, 43, 46, 52, 56, 64, 66, 71, 73, 74, 76, 80, 81, 88, 90), Şerban Ligia (E: 742, 45, 46, 56, 64, 66, 67, 71, 76, 81, 88, 90), Şerbănescu Cornelia (E: 743, 46, 56, 73, 76, 80, 81, 88, 90). *Şcoala medie din Adjud.* Clasa VII-a. Vasilache Ion (E: 750, 62, 64, 67, 71, 76, 80, 82, 90, 96, 98). Clasa IX-a. Chiorcea N. Nicolae (1948, 51, 64, 67, 71, 74—77, 97, 2000, 02). *Şcoala medie din Bacău.* Clasa VIII-a. Dobronăuţeanu Silviu (1947, 48, 51, 54, 61, 63, 95, 2011, 21, 22, 24, 86, 100, 04, 05, 11, E: 745, 84, 89, 94, 97), Tiţaru Ion (1951, 96, 97, 2010, 22, 42, 82, 86, 102, 11, 18, 20, 24, E: 784, 97). Clasa X-a. Popa Ion (1992—94, 96—98, 2001—11, 15, 17, 20—24, 32), *Vasiliu Monica* (1914, 28, 31, 90, 92, 93, 95—97, 2003—08, 11, 20—23, 32, 42, 81—83, 89, 100, 02, 11—13, 16, 18, 19, 22—27, 35, 38, 42, P.), *Zilbermann Mircea* (1926, 36, 56, 66, 76, 86, 2001, 03, 06—11, 16—18, 24, 41,43, 45, 48, 50, 52, 54, 56, 59, 60, 63, 65, 74, 78, 79, 86, 89, 90, 92, 100, 02, 04, 05, P). *Şcoala pedagogică mixtă,* an I. Cucoş Constantin (E: 747, 49, 50, 52, 53, 62, 65, 68, 72, 84).

BAIA MARE. Clasa X-a. Conţiu A. Ioan (1915, 17, 20, 21, 23—27, 30, 40, 42—45, 47—51, 53—55, 57—63, 67, 71, 74, 75, 90, 92, 97, P).

BALŞ (Craiova). — Clasa VIII-a. Croitoru D. Constantin (1971, 76, E: 747, 49, 50, 52, 53, 58, 65, 71, 74)

BEIUŞ. Clasa IX-a. Bulzan Nicolae (2042, 43, 45, 48, 50, 53, 78, 81, 86, 92, 100, 02, 07), Partenie Valeriu (1947—52, 54—58, 60, 62, 77, 90).

BISTRIŢA. — Clasa X-a. Axelrad Martin (1946—58, 61—64, 76, 77).

BOTOŞANI (Suceava). — Clasa IX-a. *Gherman Corneliu* (1837, 74—80, 84, 98, 908, 11, 14, 15, 19, 23, 24, 30, 31, 40, 43—45, 47—52, 54—62, 64, 71, 76, 77, 81—83, 92—94, 92, 94, 95, 97, 98, 2000, 01, 03, 05—11.P), *Rottemberg R. Martin* (1924, 44, 47—52, 54—58, 60—63 76, 77, 82, 83, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 2000, 01, 04, 05—08, 10, 11, 15, 17, 19—24, P), Rusu Dan (1948—57, 59—65, 76, 77, 82, 83, 88, 90), Rusu Sergiu (1948, 49, 55—57, 62, 98,

2006, 21, 42, 54, 102), *Andricioaiei Gheorghe* (1930—32, 35, 46—57, 60—64, 71, 76, 77, 81, 82, 88, 90, 92—95, 98, 2000, 03, 05—08, 10—12, 14, 16, 17, 19—21, 23, 24, 27, 42, 45, 48, 53, 54, 60, 76, 86, 94, 100, 02, 04, 09—14, 18, 20, 23—26, 29, 32, 42, P).

BRĂILA. — Clasa IX-a. Velicu Cezar (1948, 51, 55, 56, 58, 71, 92, 2004, 42, 54); clasa X-a. Bușcă Mihai (1943, 47, 48, 51, 54—56, 62, 63, 71, 74—76, 97, 2020, 21), Doifig Raul (1947, 48, 51, 54, 55, 60, 61, 71, 92, 97, 2020, 42, 43, 45, 54, 78, 104), Georgescu Laurian (1949, 57, 72, 73, 92, 96, 97, 98, 2001, 05—10, 15, 20, 21, 23, 42, 43, 51, 54, 78, 83, 88, 89, 90, 100, 04). Lungu Octavian (1859, 954, 55, 72, 73, 97, 2008, 23, 42, 88), Razelman Gh. (1947—49, 51, 52, 54—56, 60, 63, 71, 73—77, 90, 92, 93, 97, 98, 2005—07, 10, 17, 20, 21), *absolvent* Țonea Dumitru (1947, 48, 51, 54—56, 58, 60, 63, 98, 2004).

BREAZA (raion Cîmpina). — Clasa IX-a. Bohățel A. Dumitru (1992, 97, 2006, 10, 17, 21, 23, 24, 42, 48, 50, 84, 86, 102), Bulz I. Viorel (1948—51, 55—57, 60, 76, 77, 98, 2006, 10, 42, 104, 24, 25), Lache Florica (1992, 97, 2006, 11, 12, 21, 24), Văcariu Gheorghe (1946, 54, 62—64, 92, 97, 98, 2001, 04—06, 08—11, 17, 21, 23, 24, 42, 48—50, 53, 54, 59, 100, 02, 04).

BUCUREȘTI. — *Studenți*: *Florescu Gh. Mircea* (Fac. Mecanică) (1938, 92, 93, 97, 2001—04, 05—11, 15, 21, 23, 24, 41—43, 48, 50, 53, 54, 59, 60, 63, 65, 70, 79, 86, 100, 02, 04, 09, 11—32, P), Leonte Aristide (Inst. Pedagogic) (1966, 2042, 43, 45, 53, 88, 89, 102, 04, 11, P), *Lupuțiu Ioan* (Fac. Mecanică) (1946—51, 53—64, 68, 70—74, 76, 77, 83—85, 90, 92, 92—94, 94, 96, 96 — 98, 2000, 01—03, 05, 06, 08, 09, 11, 15, 19—21, 24, 32, 33, 41—43, 45, 50, 54, 56, 59, 63, 65, 70, 74, 78, 79, 86, 102, 04), *Parepa C. Grigore* (Inst. Politehnic) (1991—93, 95—99, 2001, 02, 03, 100, 02, 04—07, 09—16, 18—21, 25, 42, 43, 47, 50, 53, 54), Popovici I. Radu (Fac, Mecanică) (2004, 06, 10, 20, 21, 42, 43, 88, 102, 04, 11, 25), Trister Avram (Fac. Matem) (1992, 93, 98, 2001, 02, 15, 21, 23, 42, 43, 102, 04, 09, P). Absolvenți: Aleșincu N. Vasile (1915, 20, 24, 47, 50, 54—56, 60, 63, 92, 95, 98, 2001, 06, 09, 24), Budan C— (1946—49, 51—76, 84, —2, —3, 95—97, 2002—06, 08, 15—17, 20, 21, 26), Mavrogheorghe Vanghele (1994, 98, 2011, 24, 41—43, 49, 50, 53, 54, 59, 78, 79, 86, 100, 04, 09, 11, 13, 16, 20, 29—31), Pachtinger N. Simion (1949 ,50, 58, 64, 67, 74, 75, 92, 96—98, 2004, 07, 10, 11, 17, 21), Tudor Mihai (1938, 47, 52, 58, 61, 62, 92, 94, 96, 97, 2001, 03, 05—11, 17, 20, 21, 23).

Școala medie nr. 1 « *N. Bălcescu* ». Clasa VI-a. Popescu Valeriu (E: 747, 49, 51, 54—56, 58, 59, 64). Clasa VII-a. Ghelmeziu N. Nicolae (1955, 2064, E: 750, 52, 55, 66, 72, 74, 83, 86, 89). Clasa VIII-a. Ionescu C. Traian (2006, 10, 21, 23, 42, 48, 92, 104, 11, E: 772). Clasa IX-a. Boldea Vasile (2010, 21, 51, 109, 11, 12, 14, 18, 20, 25, 32), Doniga Nicolae (1880,951, 63, 83, 90, 92, 93, 97, 98, 2002, 05, 07), Lupescu Mihai (1960, 92, 93, 95, 97, 98, 2004, 05, 06, 12), Pătrășcioiu I. Adrian (1946—49, 51, 52, 54—58, 77), Popescu Victor (1948, 51, 55, 56, 58, 62, 64, 71, 76, 77), Răuț Constantin (1948—51, 54—58, 60, 62, 63, 76, 2042, 50, 54, 59, 92, 100, 02), Samborski Valentin (1879, 80, 914, 22, 48—51, 55—57, 93), Sdreiu Tudor (1948, 51, 54—56, 60, 62, 76, 77, 83, 93, 2011). Clasa X-a. Ionescu Serban (1946—58, 60—64, 67 68, 71, 73—77, 90, 92, 94, 2000, 02), Moraru Florentin (1953, 70, 71, 73, 77, 88, 92, 93, 96, 97, 2001, 07, 09, 10, 15, 20, 21, 24, 50, 89).

Școala medie nr. 2. Clasa IX-a. Teodorescu N. (1992, 94, 2005—07, 11, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 41—43, 47, 48, 50, 54, 59), Tureanu Aurel (1924, 48, 49, 51, 55—57, 60, 61, 71, P).

Școala medie nr. 3. Clasa IX-a. Moroșan Victor (1915, 21, 24, 25, 31, 40, 43, 48, 54—57). Clasa X-a. Dobrescu Alexandru (1992, 93, 97, 2004—08,10, 11, 15, 21, 22).

Școala medie de băieți nr. 4 « *Aurel Vlaicu* ». Clasa VIII-a. Castris Eugen (1997, 2006, 08, 09, 23, 24, E: 742, 66, 71, 73, 74), Feldman David (1997, 2006, 23, 42, 104, E: 765, 66, 71, 74, 86, 90), Ionescu Petru (1993, 95, 97, 2006, 08, 10, 21, 23), Mihăescu T. Ion (2109, 15, 18, 25, 27, E: 789, 98, 801, 03, 04), Nicolau Cornel (2049, 53, 60, 100, 04, E: 776—81,83, 84, 89). Clasa IX-a. Albu Aurel (1924, 40, 48, 54—56, 60, 62, 68, 76), *Draica Const.* (1916—19, 21, 22, 26, 27, 30, 45—47, 52—54, 59, 61, 64, 66—68, 82, 84, 88, 90, 94, 97, 2023, 24, 42, 43, 48, 50, 54, 59, 104), Ionescu Mircea (1945, 64, 70, 71, 93, 94, 97, 2009, 11, 15, 22), Laurențiu Dumitru (1946—56, 58, *Rădulescu D. Constantin* (1938, 49, 52, 60, 77, 92—95, 97, 98, 2001, 02, 06—11, 15, 17, 21—23, 42, 43,53, 54, 62, 64, 100, 02, 04, P), Schwartz Arnold (1963, 77, 90, 92—95, 97, 98, 2004—06, 09—11, 15, 21—24), *Stamatoiu Petre* (1949, 77, 92—95, 97, 98, 2001, 02, 06, 08—11, 21—23, 42, 43, 53, 54, 94, 100, 02, 04), Teodorescu Ion (1954, 61, 70, 71, 77, 90, 2004, 06, 23, 24), Zamfirescu Gheorghe (1949—51, 54—57, 60, 61, 70, 71, 76, 77, 90, 2006). Clasa X-a. Armășelu D. Dumitru (1946, 47, 49, 50, 52—57, 61—63), Giurgea Cornel (1949, 55, 57, 58, 63, 71, 73—76, 92, 93), Ioan Gheorghe (1947—49, 51, 55—57, 60, 61, 90), *Ivănică Alex.* (1949, 50, 58, 60, 62—64, 73, 92, 92, 93, 96, 97, 2001—03, 05—10, 15, 20—23, 30, 32—35, 37, 39), Marin Const. (1947—49, 51, 54,—58, 60, 61, 73—76, 93), Oblenenco Gabriel (1946—64, 67, 71—77, 90, 92, 96), Pătrașcu Sorin (1967, 73, 2032, 42, 57, 83, 88, 90, 109, 11, 16, 20, 32, 38), Popa Mircea (1948, 76, 2008, 10, 23 45, 21), Vlad N. Ștefan (1948, 51, 55—58, 60, 62, 73—75, 77), Zgreabăn Ion (1949, 61—64, 73, 75, 2003, 06, 07).

Şcoala medie nr. 7 « I.L. Caragiale ». Clasa VII-a. Grofşoreanu T. Gelu (1984, 2003, 06, 32, E: 762, 65—68, 50, 71—74). Clasa X-a. Stroe Gh. Victor (1982, 90, 92—97, 93, 98, 2003, 05, 06, 08, 10, 11, 14, 15, 18, 20, 21, 27, 32, 33), Eremia Mircea (1948, 51, 55, 56, 63, 70, 71, 76, 77, 2004, 21).

Şcoala medie nr. 8 de fete.— Clasa IX-a. Andreescu Sofia (1997, 2004—06, 10, 11, 21, 41, 42, 102, 12, 13, 20), Ciobodaru Lucia (1940, 47, 48, 50, 51, 54—56, 60, 62—64, 76, 77, 92, 97, 2004—06, 10, 21).

Şcoala medie de fete nr. 10. —Clasa VII-a. Melitescu Luminiţa (E: 747, 50—52, 54, 56, 58, 66—68, 71, 83), Predoiescu Marieta (2005, 21, E: 764, 76, 80, 83, 85—88). Clasa VIII-a. Nicoară Elena (1915, 38, 55, 57, 63, 76, E: 738, 47, 50, 52, 53, 57, 70), Repciuc Rodica (1955, 57, 60, 63, 76, 2006, 53, 100, 04). Clasa IX-a. Drăgan Alexandra (1851, 948, 54—57, 60, 62, 76, 77, 2021, 23).

Şcoala medie de băieţi nr. 11 « D. Cantemir ». Clasa VIII-a. Schiopulescu Dan (1956, 60, 2006, E: 682, 98, 703, 07, 48, 51, 54, 59, 64, 67, 70, 72, 73). Clasa IX-a. Nicolae M. Valentin (1960, 63, 76, 92, 2006, 08, 09, 23, 42,53, 55, 104). Clasa X-a. Corhu Ion (1992, 93, 95—98, 2002—11, 15, 21—23, 32, 40, 41, 43, 48, 50, 53, 54), Hogaş V. Mihai (1949, 49, 51, 55—57, 60, 62, 72—75), Mircea Paul (1947, 48, 50, 54—56, 58, 60, 2001, 06, 10), *Popescu P. Roger* (1967, 72, 84, 96 2002, 15, 16, 18, 23—24, 26, 27, 32, 33, 41—43, 45, 48, 50—54, 59, 60, 65, 78, 79, 81—83, 86, 88—90, 92, 98, 100, 02, 04, 05, 11, 13, 15, 16, 18, 20—26, 28—32, 36, 38), Sandu Valeriu (1948, 51, 52, 55, 56, 58, 60—64, 76, 77), Schiketanz I. Iosif (2003, 05, 07, 09—11, 15, 17, 20, 21, 21, 32, 42, 43, 45, 48, 50, 59), Stoica I. Dan (1946—49, 51, 54—57, 60, 61, 63, 67, 71—75, 771, 90).

Şcoala medie serală nr. 11. Clasa VIII-a. Bicu Dan (E: 747, 49, 50, 52, 53, 55, 58, 62, 63, 65, 68, 71—74, 76, 77).

Şcoala medie de băieţi nr. 12. Clasa VII-a. Vasilescu Florin (E: 747, 49—52, 58). Clasa VIII-a. Dragomirescu Mihai (1947, 49, 54, 55, 57, 62, 64, 70, 71, 75, 76, E: 747—52, 54—58), Glasberg Vladimir (1997, 2006, 08, 11, 22—24, 32). Clasa IX-a. Cserveny Ştefan (2006, 07, 09—11, 17, 21, 22, 27, 42, 48).

Şcoala medie de băieţi nr. 13. Clasa VII-a. Chiriac Dumitru (E: 765, 67, 71, 72, 74, 76, 78, 80, 84, 89—92, 801, 02, 04), Petrică Nicolae (E: 742, 48, 50—52, 54, 56, 57, 65, 67, 68, 71, 72). Clasa VIII-a. Ţugulea Mircea (2082, 86, 100, 02, 04, 08, 20, 26, 29, 46, E: 776, 80, 84, 99, 801). Clasa IX-a. *Tudor M Gheorghe* (1952, 58, 61, 64, 71, 90,92 —95, 97, 98, 2000, 01, 05, 06, 08, 10, 18, 21—24, 29, 42,43, 47, 48, 50, 53, 54, 56, 59, 65, 79, 86, 100, 02—05 P). Clasa X-a. Caragea V. Dimitrie (1946, 48—58, 60—64, 66, 75—77, 90, 92—98), Ionescu Dan (1947, 60, 67, 71—77, 84, 90, 92), Misdolea Tudor (1966, 72—75, 77, 90, 2086,88, 89, 100, 02), Şaganai Nusfet (1946—48, 50—55, 57,—64, 66, 67, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 81 84, 90).

Şcoala medie nr. 15. Clasa VII-a. Popa Doina. (2032, E: 748, 53, 57, 62—67, 71) Clasa IX-a. Enescu Cornelia (1879, 931, 44, 57, 64, 92, 95, 97, 2002, 06, 08, 10, 21, 22).

Şcoala medie nr. 17. Clasa VIII-a. Etinger Rudolf (2004, 06, E: 762, 65—69, 72, 73). Georgescu Vladimir (E: 747, 48, 50—54, 58, 65), Petreanu Dan (1997, 2006, 23, E: 762—67, 71—74). Clasa IX-a. Ceapîru D. Mihai (1946, 48, 50, 51, 54—58, 60, 62—64, 71, 76, 77, 90, 92, 93, 2004), Coconea M. (1948, 51, 92, 93, 2004, 06, 10, 11, 21, 59, 104), Elianu Dinu (1992, 95, 97, 2005, 06, 10, 15, 21, 24, 42, 54). Clasa X-a. Fischman Vladimir (1947—52, 54—58, 60—62, 76, 92, 93, 96), *Păunescu I. Lucian* (1973, 77, 92—98, 2000—11, 15, 18, 20—24, 32, 34, 42, 43, 45, 48, 50, 53, 54, 59), *Ţudic M.* (1947—49, 51, 52, 54—58, 60—62, 64, 74, 75, 77).

Şcoala medie nr. 18. Clasa VII-a. Enişteanu N. Nicolae (E: 749, 52, 53, 55, 60, 67, 72, 76, 80, 82—84, 86, 87, 89). Clasa IX-a. Enache Corneliu (1954, 60, 63, 70, 97, 2006, 16, 17, 21, 23 32, 42), Zamfirescu N. Martin (1951, 54, 60—63, 70, 92, 97, 2005, 06, 10, 21, 23, 42). Clasa X-a. Antoniu Mircea (1819, 72, 938, 43, 48, 51, 54—56, 67, 71, 74), Dumitrescu Vasile (1992, 2001, 21, 32, 35, 42, 43, 48, 86, 104, 09, 11), Enescu Mihail (1947, 48, 51, 56, 60, 61, 64, 97, 2004, 06, 07, 10), Kaufman A. Ivan (1947, 49, 50, 54, 56, 69, 78, 79, 93, 95, 97, 98, 2001, 03, 06, 40—43, 45, 65), Moldoveanu N. Alex. (1948, 49, 51, 53, 56, 57, 60, 61, 74, 77, 92, 98).

Şcoala medie de fete nr. 19. Clasa X-a. Nicolau Ileana (1992, 93, 97, 98, 2000—04, 15, 21).

Şcoala medie nr. 20. Clasa VII-a. Bogdan Alecu (1971, 2109, 18, 20, E: 776, 78, 80, 83, 87, 90, 9 ,98, 801, 05), Berceanu Tedi (E: 762, 63, 65, 66, 71, 73, 74, 76, 77, 80, 85—87, 90), Enulescu C. Alexandru (1947,49, 54, 55, 57, 60, 62, 63, 71, 74, 76, E: 747—50, 52—54, 56, 58). Clasa IX-a. *Iordănescu R. Sorin* (1976, 92, 93, 95, 2004—06, 09—11, 17, 21, 41—43, 48, 51, 53, 54, 56, 58, 82, 97, 100, 02, 04, 05, 11, 18—20, 24, 26, 29), Mihăilă Cornel (1948, 51—55. 57, 62, 71, 92, 2023, P), *Zorapapel Tiberiu* (1762, 819, 25, 70, 71, 92—94, 97, 98, 2001, 02, 06, 08, 10, 17, 21, 23, 41—43, 48, 50, 53—56, 59, 81, 82, 92, 94, 97, 100). Clasa X-a. *Ene I. Ion.* (1992, 93, 95, 96—98, 2000, 01, 03—11, 17, 18, 20—22, 24, 27, 32, 35, 36, 38, 40—43, 47—51), Necula Aurel (1948, 50, 51, 54—56, 60, 62, 2006, 10, 41, 42, 43, 47, 48), Băbeanu Traian (1948, 50, 51, 55—57, 60, 61, 63, 64, 2024, 41—43, 45, 50, 54).

Şcoala medie nr. 21. Clasa X-a. Zverca Zoe (1993, 2010—12, 18, 21, 24, 48, 86, 102).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa IX a. Butoi Mihaela (1762, 915, 24, 47—49, 54—57, 60, 62, 63, 70, 71, 76, 77, 92, 97, 2004, 0[illegible], 09—11, 21).

Şcoala elementară de fete nr. 37. Clasa VI-a. Enescu M. Anca (E: 743, 47, 52, 58, 62, 66, 76, 80, 81, 84, 86, 89, 9[illegible], 99, 804, 05), Muşetescu Ileana (E: 766, 67, 72, 76, 80, 81, 83, 84, 86, 89, 804, 05)

Şcoala elementară mixtă nr. 55. Clasa VI-a. Scafeş Valentina (E: 738, 42, 47, 49—51, 58, 65, 67, 71, 76).

Şcoala elementară nr. 119. Clasa VI-a. Mirea Eugen (1946, 57, 62, 64, 93, 2016, E: 748 51, 53—57, 65, 67, 71, 72, 74, 75).

Şcoala elementară nr. 145. Clasa VI-a. Mircea Ecaterina (E: 735, 37, 38, 47—51, 54, 58, 67, 71).

BUHUŞI (Bacău). Clasa IX-a. Hărăbor Ioan (1992, 95, 2001, 06, 10, 21, 97, 102, 11, 12, 20, 25, 26), absolvent *Donea Sorin* (1762, 962, 92, 94, 95, 97, 98, 2003, 05—10, 15, 17, 21, 23, 24, 28, 40, 41—43, 50—52, 54, 62, 63, 65, 66, 79, 81, 82, 88, 89, 92, 104).

BUZĂU. Clasa VII-a. Blăgoi Olimpia (E: 749, 53, 65, 68, 72, 76, 94, 804, 05), Gheorghe A. Cezar (1974, 76, (: 747—58, 60). Clasa IX-a. Boacă C. Ilinca(1948, 51, 55, 60, 71, 76, 98, 2004—06, 21, 42, 45), Florea Nicolae (1948—51, 55, 57, 58, 60—62), Popescu Valentina (1948, 50, 51, 55, 56, 60, 71, 76, 98, 2004—07, 42, 45), Suciu A. Tita (2001, 24, 40—43, 45, 59, 66, 81, 82, 104, 09, 11—13, 20, 24—26, 31, 32). Clasa X-a. Cucu Paul (1973, 90, 92, 93, 96—98, 2001—03, 05, 24, 32, 41—43, 45, 50, 78, 102, 04, 06—11, 15, 18, 20—22), Petreanu Aristide (1919—21, 43, 45, 48, 50, 51, 55, 56).

CALAFAT. Clasa VII-a. Jiloviu F. Ştefan (E: 74 , 48, 50, 52, 55, 56, 6[illegible], 65—67, 72, 73). Clasa VIII-a. Dîrvăreanu Ilie (E: 747, 49, 50, 52, 62, 64—67, 71, 72, 76, 78, 89, 90), Eva Geltz (E: 766, 73, 74, 76, 78, 80, 81, 84, 87, 89, 90), Meleca Eugenia (2086, 100, E: 747, 49—52, 54, 64, 65, 67, 71, 76), Mititelu M. Ştefan (2109, 11, 29, E: 776, 80, 82, 92, 94, 98, 99, 804, 05), Parapancea Marin (1948, 54, 57, 60, 63, 77, 2006, 23, 42, 45, 48, 102, E: 783, 84). Popa Georgeta (1997, 2023, 82, E: 747, 49—52, 54, 65, 76), Clasa IX-a. Ciurezu C. Radu (2008, 24, 42, 43, 45, 48, 50, 54, 65, 78, 79, 92, 102, 04, P), Diaconescu C. Gheorghe (1949, 54, 57, 60, 63, 92, 97, 2005, 06, 08, 10, 11, 15, 21, 42, 43, 48, 45, 50, 5 78, 102, 11, 18, 20, 31, 33), Ghinea Petre (1992, 97, 2005, 06, 08, 10, 15, 21, 42, 45, 54, 102).

CĂLĂRAŞI. Clasa IX-a. Rădăcină Nicolae (1948, 51, 56, 57, 60, 76, 77, 92, 2006, 42, 102), absolvent *Dudă Nicolae* (1992, 93, 95—98, 2001, 03, 06—11, 20, 21, 23, 40, 41—43, 45, 48, 50—54, 56, 65, 78, 79, 88—90, 100, 02, 04, 05).

CARACAL. Clasa V-a. Păunescu Doru (E: 757, 63, 64, 71, 73, 76, 80, 81, 90, 98, 801, 03). Clasa IX-a. Rădulescu N. Victor (1992, 95, 97, 2002, 05, 06, 08, 09, 43, 42), absolvent *Maleescu Teodor* (1825, 79, 80, 903, 17, 19, 20, 23, 25, 30, 36, 43, 47—51, 54—58, 60—64, 71—75, 77, 78, 82, 90, 92, 93, 97, 98, 2001, 02, 04—06, 09, 20, 21, 23, 24).

CAREI. Clasa IX-a. Streza Tiberiu (1948, 49, 54, 55, 57, 60, 63, 76, 92, 2006, 86).

CHITILA. Clasa IX-a. Moroşan Victor (1949, 51, 60—63, 70, 71, 74, 76).

CÎMPINA. Clasa VIII-a. Palaghiţă I. Iordache (1949, 55, 57, 60, 2006, 23, 42, 86. E: 766, 71, 78, 84, 86). Clasa X-a. Angheluş M. Ion (1952, 61, 66, 70—72, 77, 80, 92, 96, 98, 2001, 03, 05—11, 15, 20—22, 24, 45, 53, 70, 100, 28), Brebeanu S. Ion (1947, 48, 51, 54—57, 60—62, 74, 97, 2003,06, 10, 21), *Colonati Cristian* (1947—58, 60—64, 66, 67, 70—77, 85, 86, 90, 92, 93, 96—98, 2001, 03—09, 18, 20, 21, 32), Handrea Adrian (1947, 48, 54—56, 60, 71, 74, 75, 97, 2004, 06, 07, 10, 15, 21, 40, 42, 51, 74, 89, 104), Mirel Gh. Ion (1947, 48, 51, 54—57, 60—62, 97, 2003, 06, 10, 21). Tudor Ion (1902, 56, 60, 71, 73—75, 97, 2004, 08, 42, 89, 90, P).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa X-a. Enăchescu I. Victor (1915, 17, 18, 20, 24, 26,27, 39—41, 44, 47—49, 52[illegible], Ivaşcu Ion (1878, 81 - 83, 917, 20, 7, 48, 55, 60, 61, 74, 75, P).

CLUJ. Clasa VI-a. Cordaş Octavian (E: 747, 49, 50, 68, 71, 73, 76, 78, 80, 81), clasa VII-a. Man Traian (2102, E: 747, 50, 55, 56, 60, 71, 73, 74, 76, 80, 83, 86, 89, 90, 98, 99, 801, 04). Clasa VIII-a. Chisăliţă Adrian (2006, 110, 11, 23, E: 767, 72, 74, 97). Clasa IX-a. *Birzan Romanel* (1998, 2002, 09, 13, 17, 41, 42, 45, 48, 50, 51, 53, 54, 62, 56, 64, 65, 78, 86, 92, 94, 100, 02, 04, 11, 13, 18—20, 22—25, 27, 29, 30, 32, 34). Clasa X-a. Vuşcan Teodor (1948, 51—58, 60, 71, 74, 75, 77, 2033). An I. Grindian Maria (E: 747—52, 55, 56, 60, 67). Student *Cotulea Ioan* (1940, 41, 43, 47—57, 60—63, 71, 73—77, 82, 90, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 2000, 0 , 06, 08, 10, 15. 21, 23, 53, 54, 06).

CONSTANŢA. Clasa VIII-a. Ciochină Cornel (2017, E: 762—67, 71—74, 76). Clasa IX-a. Anghel Const. (1948, 50, 51, 54—57, 60, 62—64, 71, 76, 77, 85, 90, 92, 97, 98, 2006—08, 10, 17, 20, 21, 23, 42, 100, 02), *Ianuş I. Stere* (1783, 958 ,96, 92, 93, 95, 97, 98, 2001, 05—11, 15, 20, 21, 42, 43, 48, 50, 53, 54, 59, 64, 65, 78, 79, 92, 100, 02, 04), *Vasiliev Lucia* (1947—58, 60—68, 71—77, 86, 90, 92, 93, 95—2001, 02—04, 05, 06, 08, 10, 11, 15, 21, 23, 24). Clasa X-a Encica Traian (1947, 52, 58, 61, 63, 71, 74—76, 92, 95, 97, 2003, 05, 07, 10, 16, 17, 21), Ionescu Ion (1926, 64, 67, 70—75, 92, 98, 2003, 05, 10, 42, 43, 50, 100, 04),

Tănase V. Vasile (1966, 92, 93, 95, 97, 98, 2001, 02, 06, 07, 10, 14, 15, 21, 23, 43, 48, 50, 102).

CORABIA. Clasa X-a. Florescu Mihai (1992, 93, 97, 2003, 06, 10, 15, 21, 23, 32, 41—43, 45, 50, 55, 63, 89, 90, 100), *Şarpe I. Dumitru* (1950, 72, 73, 95, 2000, 15, 18, 24, 41—45, 47, 48, 50—52, 54, 55, 63, 64, 66, 68, 78, 79, 83, 84, 86, 88—90, 92, 100, 02, 04, 05, 09, 11, 23, 25, 29).

CRAIOVA. *Şcoala medie de băieţi nr.* 1. Clasa IX-a. Cuculescu Mihai (1948, 51, 55, 56, 60, 62, 64, 97, 98, 2006), Săşeanu C. Vasile (1992, 95, 97, 2001, 04, 06, 10, 21, 23). Clasa X-a. Bădele Const. (1918, 51, 52, 55—57, 60—62, 71, 73—76), *Bărbuică C. Nicolae* (1900, 08, 11, 13, 15, 17, 19—21, 30, 45—58, 60—63, 67, 70, 72—77, 84, 90, 92—94, 96), Bardan I. Virgil (1921, 95—98, 2001, 03—08, 10, 15, 21, 23, 32, P), Căluţoiu Ion (1970, 72, 73, 76, 86, 92—98, 2000—03, 05—08, 10, 11, 15, 22, 23, 32, 33, 41—43, 45), Cîrjoescu Lucian (1947—49, 51—58, 60, 64, 76, 90, 92, 98), *Hulubei T. Valeriu* (1658, 947, 64, 67, 68, 70—77 81, 84, 86, 89, 90, 92, 97), Ioncică Tudor (1948, 51, 52, 55—57, 60—62, 71, 73—76), *Roşca Valentin* (1879, 47—57, 60—64, 67, 73—78, 80, 92, 97, 98, 2001, 03, 06—11, 21, 23, 32, 33, 42—43, 45, 48, 51, 52, 63, 65, 68, 81, 88—90, 100, 02). *Stănculescu Adrian* (1944, 92—99, 2001—11, 15, 20—23, 41—44, 47, 49—54, 63, 65, 78, 79, 82, 83, 88, 89, 90, 92, 100, 04, 09, 13, 20—26, 28, 29, 31), Tăriţă Ion (2003, 06, 07, 10, 11, 15, 21, 23, 40, 41—43, 45, 50—54, 62, 86, 88, 89, 100, 02—05, 20), *Voinea I. Alex.* (1879. 80, 947—58, 60—63, 66, 67, 71, 74, 75, 84, 92, 93, 95—98, 2003, 09, 10, 21, 23, 28, 40—43, 45, 50—52, 54, 59, 63, 79, 88, 89, 100, 04, 05, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 2. Clasa VIII-a. Vasile Florin (1949, 54, 55, 57, 62, 63, 76, E: 747, 50, 68, 72, 74). Clasa X-a. Dinuţ Tudor (2008, 10, 15, 21, 41, 43, 50, 04, 86, 92): absolvenţi: *Cojocaru Ion* (1938, 90, 96—99, 2001, 03, 04, 06, 08—10, 20, 21, 23, 32, 41—43, 50, 54, 62, 64, 109, 11—13, 18, 19, 20, 23, 25—31, P), Cumpănaşu Vasile (1947, 49, 92, 97, 98, 2003, 04, 06, 10, 21, 42, 45, 79,, 104), Iftodi L. Leon (1762, 914, 27, 40, 44, 45, 66, 67, 71, 74—76, 90, 2015, 17, 21).

CRICOV (Ploeşti). Absolvent Iancu Vasile (1948, 51, 56, 60, 63, 64, 69, 71, 77, 92, 95, 97, 98, 2004—06, 08, 10, 11, 21, 23, 81, 86).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VIII-a. Băcăuanu Mihai (2082, 102, 04, E: 764, 65, 71, 73, 76, 78, 80, 81, 87, 88, 90). Clasa IX- a, Murărei Fănica (1948, 49, 51, 54—57, 60, 71, 76, 77, 92, 2004, 05, 06, 10, 21, 23). Clasa X-a. Manea Sabina (1943, 48, 51, 55, 56, 60—62, 67, 71, 74, 75, 2031), Neagoe Laurenţiu (1992, 93, 97, 2006, 10, 11, 15, 21, 23, 32), Priviceanu Marga (1947—51, 55, 56, 60, 93), Teodorescu Dorin (1993, 95, 97, 98, 2004, 06, 15, 21, 23, 32).

DEJ. Ilu Stelian (1955, 61, 67, 70, 72, 81 88, 97, 98, 2021, 42), absolvent Pîrvu Petru (1947—57, 60—64, 77). Clasa VIII-a. Bivolaru Tudor (2006, 23, 104, 11, 20, E: 767, 72, 76, 84). Clasa IX-a. Certejan Tiberiu (1943, 55, 56, 76, 92, 97, 2004, 21, 23, 42, 1914, 48, 86, 92), Pîrvu Ion (1948, 51, 55—57, 60, 77, 97, 2006, 21, 102). Clasa X-a. Olariu Voicu 47, 51, 54, 56, 60, 63, 67, 71, 73—75, 77), Pordea Mihai (1951, 54, 56, 60, 61, 71, 73—7 2006, 43, 45, 100).

DOROHOI. Clasa VIII-a. Haivas Mihai (2023, E. 735, 37, 38, 45, 47, 49, 50, 52, 58, 62, 65, 71, 73, 74, 76, 80). Clasa X-a. Ilioaia Brînduşa (2008, 15, 2 —22, 92, 102, 04, 16, 17), absolvent Viorel Grigore (1940, 48, 49, 51, 54, 56, 57, 60—64, 73—76).

FĂLTICENI. Clasa IX-a. Croitoru Florica (1992, 2004, 06, 09, 11, 12, 14, 17, 21, 23, 26, 29, 33). Clasa X-a. Mazilu Lucica (2008. 15, 20, 21, 92, 190, 02, 16, 17).

FOCŞANI. Şcoala medie « Unirea ». Clasa VIII-a. Dinulescu Horia (1949, 54, 57, 60, 63, 64, 97, 98, 2006, 09, 53, 64, 82, 94, 102, 04, E: 771, 73, 74, 76, 78—81, 83—90, P), Munteanu Valeriu (1924, 2006, E: 735, 38—40, 45, 47—49, 51, 62, 64—66, 71—74), Rădescu Eugen (1944, 49, 64, 97, 2042, 86, 102, 11, 24—27, 29, 31, E: 751, 66, 72, 76, 78, 84, 86). Clasa X-a. Celan Romulus (1947, 51, 54, 58, 61, 62, 93, 2001, 03, 04, 09, 10, 15, 21, P), Idelovici Aurel (1915, 17—25, 31, 37, 40—45), Stoica D. Constantin (1915, 47, 54, 58, 61, 64, 73, 92, 93, 95—98, 2003, 04—10, 15, 20, 21, 42, 43, 50, 53, 54, 102).

GĂEŞTI. Clasa IX-a. Tîrtan Gabriel (2005, 06, 11, 21, 24, 42, 43, 54, 109, 13, 18).

GALAŢI. Şcoala medie nr. 1. Clasa VI-a. Moscalenco Eugen (E: 764, 66, 71—73). Clasa IX-a. Chirilă Costică (1995, 2006, 10, 21, 42, 48, 50, 78, 86, 94, 97, 100, 04). Clasa X-a. Hozoc Florinel (1947, 48, 50, 51, 54—58, 60, 62, 63, 71—77, 92, 93 , 95, 97, 2004—06, 19, 10, 20, 21) *Şcoala de marină.* Clasa X-a. Cùhiş Mihai (1948, 51, 55—57, 60—64 67, 74—76), Neagu Ştefan (1941—43, 50, 53, 56, 58, 60, 62, 63, 73—77, 84, 92, 93, 97, 2006, 21, P). *Şcoala de 7 ani, Gălăţeni.* Clasa VII-a. Buduru C. Ion (E: 766, 71—74, 76, 80, 81, 83, 86—90). absolvent Costin P. Vasile (1947, 48, 50, 51, 54—58, 60—64, 67, 71—75, 84).

GHEORGHENI. Clasa IX-a. Grigoraş Guţă (1949, 57, 71, 76, 2042, 48, 64, 81, 82), Lupaş C. Gheorghe (1949, 52, 57, 64, 71, 76, 2042, 59, 64, 81, 102). Clasa X-a. Mîndru Traian (1949, 50, 52, 53, 57, 63, 64, 66, 71, 73, 76, 90, 92, 2045, 59).

GIURGIU. Clasa VII-a. Popescu Cristian (E: 747, 49—53, 58, 64, 66, 74, 76, 90). Clasa VIII-a. Căpitanu Florea (E: 735, 38, 42, 45, 49, 50, 52, 65, 66, 71, 72, 74, 76, 77, 86, 89), Grama M. Marin (1970, 71, 76, E: 747, 49, 50, 52, 65—67, 71, 72, 74, 76, 78, 80, 88, 90), Mîrlăgeanu Florea (1970, 71, 76, 2104, E: 747, 49—52, 55—67, 73—77, 80, 90), Vasilescu Florian (1954, 57, 70, 71, 74, 92, 97, 2000, 21, 42, 79, 81, 82, 94, 104, E: 747, 49—52, 65—67, 71, 72, 74—76, 88, P), Zamfir I. Alexandru (E: 747, 49—52, 58, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 76, 78). Clasa X-a. Irescu I. Ecaterina (1958, 63, 64, 71, 73, 76, 92, 94, 95, 97, 2001, 04, 06—11, 24), Stăncescu N. Emil (1970, 90, 92, 93, 97, 98, 2003—10, 12, 15—17, 20, 24, 32, 41—43, 48, 81, 83, 89, 102). *Şcoala de 7 ani Cacaleţi.* Clasa VII-a. Drăgan I. Petre (E: 747, 49—52, 55, 64, 66, 67, 71—76, 80, 90), Mătrăcaru Clement (1995, E: 751, 57, 58, 62, 64—68, 70—74, 76, 85), absolvenţi *Bigan Stan* (1762, 69, 819, 59, 61, 72, 900, 56, 61, 66, 70, 81, 92—97, 98, 2001—04, 05—11, 16, 17, 20, 21, 23, 32), Bilcu C. Petre 42, 43, (1947—49, 51, 55, 56 60, 83, 88—90, 2104, E: 747, 50, 64, 76), *Botoran I. Petre* (2004—12, 15—30, 36, 40—45, 48, 56, 63, 65, 92, 101).

HÎRLĂU (Iaşi). Clasa IX-a. Ciobanu Leon (1948, 51, 55, 56, 60, 76, 92, 98, 2004—06).

HOREZU (Piteşti). Clasa VIII-a. Rădulescu Ion (1871, 74, E: 751, 52, 58, 62, 65, 67, 71, 72, 76).

IANCA (Galaţi).— Clasa IX-a. Bănibă Radu (1992, 97, 2005, 06, 08, 10, 21, 23, 63, 64, 86, 92, 94, 100, 02, 04, 11),, Caraman M. Gheorghe (1995, 2010, 42, 48, 86, 92, 94, 100, 02, 04, 11, 24).

IAŞI. *Student Rotaru Const.* (1700, 842, 74, 77, 79, 83 86, 92, 901, 05, 13, 15, 17, 19—22, 24, 25, 31, 41—43, 45, 47—67, 71, P). *Şcoala medie de băieţi « M. Sadoveanu ».* Clasa IX-a Copel Iosif (1977, 98, 2021, 42, 45, 50, 54, 55, 59, 111—13, 18, 29), Cuşmaru Ilie (1954, 64, 81, 92, 93, 2001, 08, 09, 11, 41—43, 48, 50, 62, 100, 04), Cuza Cons⁴. (1963, 71, 76, 77, 92, 93, 97, 2005, 08, 14—17, 19, 21, 23, 27, 43), Feldman Milu 1963, 72, 92, 93, 97, 2001, 08, 09, 10, 21, 53), Grişaru Iancu (2042, 43, 111—13, 18, 20, 22, 25, 29, 31), Ţibuleac Florin (1880, 992, 97, 2003, 05, 06, 10, 15, 35). *Şcoala medie nr.* 2. Clasa VII-a. Nuţu Const. (E: 747, 48, 50, 51, 54, 57, 58, 63, 65, 66, 71, 92); clasa VIII-a. Nanu Gheorghe (1914, 38, 49, 55, 57, 70 76, 90, 93, 2005, 17, 22—24, 92, 105, E: 716, 47—49, 52, 56, 60, 69, 72, 74, 74, 84). Clasa IX-a. Boiţă Mihai (1948, 49, 51, 55—57, 62—64, 77, 92, 97, 2006, 11, 21, 24), Costin Petru (1915, 43, 48—51, 55—57, 60, 62—64, 76, 77, 92, 95, 97, 2005, 06, 10, 21, 23, 24), Creţu Mihai (1992, 94, 95, 97, 98‘ 2001, 04—06, 08—11, 15, 17, 21—24), Homutescu C. Adrian (1948, 51, 54—57, 60—62, 71, 77, 92, 93, 94, 2004, 05, 10, 21), Mihalache Adrian (1960, 2041—43, 45, 48, 50, 54, 57, 59, 62, 64, 65, 71, 79, 86, 92, 94, 97, 100, 02, 04), Popescu Claudiu (1827, 992, 97, 98, 2001, 04—06, 09, 10, 15, 21, 23, 24), Sor Liber (1992, 93, 97, 98, 2001, 02, 04, 05, 08—11, 15, 21, 23); clasa X-a Cărăuşu I. (1947—49, 51, 52, 54—56, 62, 66, 72—76, 92, 95, 97, 98, 2003, 04, 06—11, 15, 23, 24, 42, 43, 78, 79, 102), Circiu Vasile (1915, 18—20, 24—28, 40, 43, 47—58, 60—64, 66, 70—77, 82 90), *Dănilă Marcel* (1920, 23, 24, 26, 40, 44, 47—49, 51, 52, 54—58, 60—63, 71, 73—77, 90, 92, 95, 2003, 06—08, 10, 21, 24), Măgureanu Răzvan (1947—51, 54—587). Şcoala medie militară « Ştefan cel Mare». Clasa IX-a. Ivan V. Costică (2006, 10, 42, 43, 48, 54, 81, 82, 102, 04). Clasa X-a. Păuna I. Marin (1924, 37, 45, 47, 48, 51, 55, 56, 60, 63, 67, 71, 74, 75).

LUGOJ. Clasa VI-a. Florea Doina (2024, E: 748, 53, 56, 57, 65, 68, 71, 72, 74—76, 84). Clasa VII-a. Roman Romulus (E: 747—52, 54, 56—68, 60, 63, 68, 71): clasa IX-a. Boroancă Ion (1995, 98, 2003, 10, 17, 21, 23, 42, 43,45, 48, 54, 56, 86, 97, 102), Daba Dumitru (1992, 95—98, 2003, 06, 07, 10, 21, 23, 24), Florea Dorel (1961, 63, 92, 95—98, 2003, 06, 07, 10, 18), Negru Simion (1951, 55, 60, 92, 2003, 06, 10, 21, 23, 24), Păpişoiu Gh. (1952, 54, 64, 71, 77, 90, 92, 93, 95—97, 2003, 06—08, 10, 16, 18, 24); absolvent Nemeş Alexandru (1915, 20, 24, 32, 36, 38, 40, 42, 43, 45).

MEDGIDIA (Constanţa). Clasa IX-a. Preda Ion (1948, 51, 55, 56, 60, 71, 2021, 22, 34, 36, 48, 54, 64, 100, 03), absolvent *Stepan Ionel* (1946—58, 60—67, 71—77, 84, 86, 90, 92—99, 2001—11, 15, 20—24, 43, 53, 79, 88, 89, 94, 104).

MOINEŞTI. Perlman Maier (1947—58, 60—64, 67, 71, 73, 74—77, 90, P).

NĂSĂUD (Cluj). Roman V. Fabian (1917, 47, 51, 54—77, 60, 61, 67, 71, 74, 76, 2020).

NEGREŞTI (Oaş-Baia Mare). Clasa X-a. Berinde Gheorghe (1961, 67, 73—75, 86, 92, 96, 97, 2002, 08, 23, 32, 43, 83, 88, 89, 102, N, P).

OCNA MUREŞ (AIUD). Clasa IX-a. Rusu Mihai (1947—51, 54—58, 60, 62, 63, 64, 70, 71, 76, 77, 84, 92, 93, 95, 97, 2004, 06, 07, 10, P).

ORADEA. Clasa VII-a. Gal Iuliana (1955, 71, E: 693, 95, 98, 99, 924, 27, 29, 30, 33 35—39, 47, 49—51, 53, 58). Clasa IX-a. Cristina Gh. (1956, 60, 92, 2015, 16, 21, 23, 42, 43, 48, 54, 2086, 102), Enescu Cornelia (1952, 92, 2004, 42, 45, 53, 54, 59, 78, 100, 02, 04, 111—14), absolvent Bobe Nicolae (1948, 49, 51, 52, 55—57, 62, 64, 92, 98, 2001, 05, 06, 08—10).

ORAŞUL STALIN. Student Ioniţă Tudor (1783, 807, 08, 59, 61, 72, 920, 37, 80, 89, 92—99, 92—94, 2001, 03—12, 14, 15, 17, 18—24, 32, P), absolvent Teutsch U. (1947—64). Clasa VIII-a. Tarţa Mircea (1956, 70, 2006, E: 750, 52, 64—66, 71, 76, 80, 86). Clasa IX-a. Ciurea Vlad (1922, 25, 47, 50, 52, 57, 54, 58, 62, 64), Corbu Lucia (1948—51, 55—58, 60, 62, 76), Giurgiu Dan (1948, 51, 52, 54,55, 56, 58, 60, 71, 70, 77), Jinga Gheorghe (1994, 2014, 42, 43, 45, 54, 81, 94, 97, 102, 04). Clasa X-a. Budin Pavel (1994, 96, 97, 2003, 05, 08, 10, 11, 20, 21, 32, 41—43, 45, 48, 50, 56, 65, 79, 92), Cojocaru Ilie (1948, 51, 54, 56, 57, 61—63, 71, 74, 75), Drăgulinescu Marin (1946—62, 64, 71, 74—76, 84, 92, 2006), Munteanu Petre (1948, 49, 51, 54—57, 60, 70, 71, 77), Neamţu Tudor (1917, 37, 40, 47, 51, 55, 57, 60, 62, 67, 71, 74, 75), Nedelescu Stelian (1948, 51, 54, 56, 58, 60—62, 67, 74—77).

ORAVIŢA. Şcoala elementară Răgăjdia. Clasa VII-a. Pela Petru (E: 747, 50, 66, 71, 73, 74, 76, 80, 87, 90).

PATÎRLAGELE (Ploeşti). Clasa X-a. Olaru Elefterie (1960, 2041, 42, 45, 53, 100, 11, 16, 21, 23, 29).

PIATRA NEAMŢ. Clasa VIII-a. *Gervescu M. Ioan* (1931, 40, 44, 70, 71, 76, 2014, 16, 19, 23, E: 747—60, 62, 63, 65—75), Tătaru Petrică 1926, 31, 38, 41, 45, 47, 53, 54, 56, 58, 61, 66, 74, 84, 93, 96, 2009, 23) Clasa X-a.. Apopei Rodica (1973, 93, 96, 97, 2007, 09, 10, 15, 20, 41—43, 45, 48, 50, 51, 63, 66, 88, 104), Cimpoeşu Teodor (2040—43, 45, 48—54, 63, 66, 73, 100, 15, 16, 25, 31), Fediuc Adriana (1948, 51, 53, 56—58, 2021, 41, 43, 44, 48, 50, 51, 63, 66), Galu Florin (1880, 955, 63, 72—77, 90, 92, 93, 93, 97, 98, 2010, 15, 21, 23) Gavril V. Vasile (1875, 76, 77, 79 81, 84, 91, 914, 31, 40, 55, 57, 61, 72—74, 77, 90, 92, 93, 97, 98, 2007, 08, 10, 11, 15, 17, 21, 23), Guţu Gheorghe (1948, 55, 56, 60—64, 72—74, 97, 2006, 08, 15, 20, 21, 43, 45, 52, 54, 62, 88), *Mitu S. Ion* (1859, 966, 67, 71—77, 80, 84, 86, 90, 92—98, 2001—11, 15, 20, 21, 23, 24, 40—45), Murguleţ Dumitru (1880, 955, 61, 73—77, 90, 92, 92, 93, 97, 98, 2006, 08, 10, 11,

PETROŞANI (Hunedoara). Student *Pleniceanu Ioan* (1947, 50—57, 61—64, 67, 68, 70—76, 80, 85, 90—98, 2002—04, 06—10, 15, 16, 21, 23, 30, 39, 41—47, 49—51, 54, 56, 59, 60, 62—65, 67, 70, 71, 73, 75, 77—83, 88—90, 92, 94, 97, 100, 11, 13, 15—18, 24, 25, 28, 29, 31, 44). Clasa VIII Panaitescu Virgil (1971, 74, 76, 90 E: 747—56, 58, 60). 1

PITEŞTI. Clasa VIII-a. Vlăducă Gheorghe (1940, 70, 71, 74, E: 735, 47—50, 76, 97, 98, 802, 07). Clasa IX-a. Andrei Gh. Ion (1947—52, 54—57, 60, 62, 63, 71, 76, 77, 90, 92, 97, 98, 2005, 11, 17, 23, 42, 48, 81), Neculce Silvia (1950—52, 54—56, 60, 62, 63, 71, 74—77), Nica Gh. Emilian (1915, 48, 56, 60, 71, 76, 77, 92, 2021, 42, 81, 82, 102, 04), *Olteanu D. Const.* (1948—51, 53, 55—58, 60, 62,—64, 70, 71, 76, 77, 79, 88, 90, 97, 98, 2006, 09, 10, 21, 23, 24, 34, 42, 45, 48, 49, 53, 54, 81, 82, 100), *Rădulescu D. Marin* (1946—52, 54—57, 60, 62,64, 71, 76, 77, 90, 92, 95, 97, 98, 2004—06, 09—11, 17, 21, 23, 42, 48, 49, 53, 54, 81, 82, 102, 04), Sofron Gavril (1876, 915, 23, 25, 30, 38, 43, 44, 48, 49, 51, 52, 54, 56, 57, 60—63, 71, 76, 77, 85, 90, 95, 97, 98, 2006, 08, 10, 15, 21, 23). Clasa X-a. Marin Ion (ş946—94, 51, 53—58, 60, 62—64, 70—77, 81, 82, 90, 92, 95, 96, P), Sîrbulescu Paula (1946, 47, 48, 50, 55—57, 63, 76, 93, 96, 2006, 07, 21, 41, 43, 49, 53), absolvent Ghiţulescu Iulian (1970, 80, 93, 97, 2004—08, 10, 21, 23, 31, 32, 42, 43, 50—52, 55).

PLOEŞTI. Şcoala mede de băieţi « I.L. Caragiale ». Clasa VIII-a. Crăciun Gh. Nicolae (2023, 106, 11, 25, 36, E: 772, 74, 802, 04, 05), Leonte D. Dinu (2109—11, 18, 24—26, 29, 47, E: 798, 99, 801, 04, 05). Clasa IX-a. Apostolescu I. Mihai (1988, 65, 75, 77, 81, 90, 92, 97, 2001, 05—07, 10, 11, 21, 23, 26, 29, 100, 04), *Ballag Vasile* (1982, 94, 2002, 04, 41—45, 48, 50, 51, 54, 56, 57, 59, 60, 63, 65, 78, 79, 81, 82, 86,92, 94, 100, 04 , 07, P), Bărbieru Pană (992, 93, 97, 98, 2005, 06, 10, 21, 23, 42, 43, 50, 81, 86, 104, 18, 20, 24, 28, 29), Boiangiu Nicolae (1965, 77, 92, 94, 97, 98, 2001, 04—08, 10, 11, 21, 23, 41—43, 45, 48,—51, 62, 64, 81, 86, 92, 102), Căsăndoiu Tudor (1992, 94, 96—98, 2001, 03—06, 10, 11, 20—24,4 1—43, 48, 50, 53—55, 59, 64, 66, 81, 86, 92, 100, 02, 04, 07), Constantin Nicolae (1947, 48, 50, 51, 54—58, 60, 62, 64, 77, 92, 2006), Delibaş Constantin (1965, 92, 97, 98, 2003, 05—07, 10, 11, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 27, 41, 43, 47, 48, 50, 53, 54, 63, 65, 79, 06, 94, 98, 100, 02, 04), Dincă Nicolae (1947—52, 54—58, 60—63), 76, 81, 92, 97, 2005, 06, 10, 21, 36, 42, 43, 45, 50, 54, 59, 65, 86, 104, 07, P), Drăgan Radu (1947, 49, 50, 54, 55, 57, 58, 60, 63, 92), Georgescu P. Adrian (1948—57, 60, 62, 64, 77, 90, 92), Mălăroiu Ion (1951, 55—57, 60, 62, 77, 92, 2006, 21, 42, 43, 86, 102), Marinoiu Ion (1948, 51, 55, 57, 60, 77, 92—94, 97, 98 2006, 21, 42, 43, 50, 59, 102), Moroianu George (1942, 48, 55, 60, 77, 93, 98, 2006, 21, 43, 102), Niţă Mircea (1948, 51, 55—57, 60-62, 77, 92, 97, 98, 2006—08, 11, 23, 42, 43, 45, 48, 62, 81, 86, 192), *Rusu Dan* (1915, 24, 31, 40, 49, 51, 52, 54, 56—58, 61—64, 71, 76, 77, 90, 92, 93, 94, 97, 98, 2001, 04—10, 15, 17, 21—24), Sibalis Dan (1947, 48, 51, 54—56, 60—62, 64, 71, 76, 77, 79, 2005, 06, 10, 11, 21, 45, 48, 51, 62, 86, 92). Clasa X-a. Arion I. Dan (1947—51, 53—57, 60, 61), Bădescu Adrian (1947, 84, 51, 54—58, 60, 62, 76, 77), *Bogdan P. Mircea* (1907, 19, 28, 31, 45, 53, 66, 67, 72, 92—98, 2000—08, 10, 11, 15, 17, 18, 21, 22, 24, 40—43, 47, 48, 50, 52, 56, 59, 62, 64, 65, 78, 79, 82, 88, 89, 92, 94, 98, 100, 02, 04, 05, P), Cernat I. Traian (1960, 97, 2006

10, 11, 15, 21, 41, 42, 98), Costeanu I. Sorin 1(915, 16, 20, 24, 40, 41, 43, 48, 50, 51, 54—56, 60, 73—77, 92, 97, 98, 2006, 10, 21), Damian Şerban (1928, 40, 42—48, 51, 54—58, 60, 61, 70, 74—76, 2010, 18), Dinu Const. (1952—57, 60—63, 71—77, 86, 2006, 24), Dodun Ioan (1944 47, 48, 50—57, 60—64, 66, 67, 70, 75, 86), Ene V. Gheorghe (1949, 52—54, 55, 61, 68, 71—73 92, 93, 2006—08), Enescu S. Mihai (1992,—98, 2002, 05—12, 20, 23, 24), Georgescu Sorin (1762, 915, 23—28, 30, 31, 39—45, 47—49, 51, 54—58, 61, 62, 84), Grecul Viorica (1953—64, 77, 78, 80, 90, 96), Heindrich Paul (1928, 40, 42, 45, 48, 51, 55, 56, 73—75), Ionescu Al. Vladimir (1947—51,54—57, 60—64, 71—77), *Jurcă Valeriu* (1901, 04, 08, 11, 13, 15—28, 30, 31, 35, 37, 39—41, 4349, 51—58, 60, 62, 64), *Lăzărescu Emil* (1938, 52, 64, 65, 81, 92, 97, 2001, 04, 05—08, 10, 11, 21, 26, 53, 59, 100, 04, 09, 11—14, 18, 20, 24—29), Lipcan Sergiu (1933, 47—49, 51—58, 60—63, 66, 67, 71, 73—77, 86, 92, 97, 2004, 09, 21—23, 29, 32), Mateescu Mihail (1948—52, 54—57, 70, 62—64, 71, 73—77, 90), Mirică Ion (1972, 92, 93, 97, 2003, 06, 07, 10, 15, 21, 23, 42, 43, 98, 90, 102, 04), Nicolaescu Mihai (1950, 53, 58, 72, 73,77, 92, 92, 97, 98, 2001, 05—10, 15, 18, 20, 21, 41, 43, 45, 48, 50, 56, 79, 83, 100, 04), Petre Cristea (1947, 48, 51, 54, 56, 60, 64, 71—73, 75, 2042, 43, 45), Petrescu M. Răzvan (1904, 06—08, 10, 15, 17—28, 30, 31, 35, 37, 38—45, 49), *Roman Barbu* (1904, 05, 08, 14, 15, 17, 20, 24,2 35—37, 40, 43, 45, 46, 48, 49, 51—58, 60, 62, (3, 66, 67, 70—77, 86, 90, 92, 96, 2000, 02, 10, 21—24, 26, 32), Ştefănescu C. Ion (1967, 71—77, 92, 98), Văgăunescu George (1925—27, 43, 45, 47—58, 60—64, 66, 67, 70—77, 86, 92—94, 96, P). *Şcoala medie de fete nr.* 3 «*A. Toma*». Clasa VI-a. Pampu M. Virginia (E: 74—951, 53, 58, 65, 67, 71, 76, 805); clasa X-a. Mezincescu Anca (1783, 819, 972, 74, 75, 77, 92, 98, 2003, 07, 08, 10, 11, 15, 21, 23, 24, 42, 43, 54), Nicolaescu Teodorina (1960, 90, 92, 98, 2003, 10, 15, 21, 42, 43), Pîrvulescu Camelia (1948, 56, 60, 62, 72, 73, 75, 2006, 08 10, 20, 21, 59, 89), Stănescu Elena (1948, 51, 54—56, 58, 60, 61, 63, 97, 2006, 43). Absolvenţi: Bănică Emilian (1946—58, 60—64, 92—2004, 05—11), *Bătineţu M. Dumitru* (1947—52, 54—58, 60—64, 67, 70—75, 77, 81, 90, 92, 92, 93, 96, 97, 98, 2003, 04, 05—11, 20, 21, 32, P), Gorea Aristide (1807, 17, 25, 2059, 68), Macrea Ion (1859, 61, 900, 15, 21, 23, 24, 100, 04).

RARĂU (Sebeş, Hunedoara). Absolvent Stanciu I. Zaharia (2006—08, 10, 21, 23, 32, 41—43, 45, 49, 50, 81, 102, 04).

REGHIN. Absolvent Frîncu M. Liviu (1951, 55, 60, 74, 2006 P)

REŞIŢA. Clasa X-a. Marchiş F. Ionel (1947, 49, 50, 52, 54, 55, 63, 64, 66, 71, 73—77, 84, 90, 92, 95—97, 2003, 05, 06, 09—11, 15, 18), Schweinert St. Ioan (1966, 67,70—75, 90, 97, 98, 2003, 06).

RÎMNICU SĂRAT. Clasa VI-a. Asanache Horia (E: 758, 62, 65, 71, 78, 87, 99, 801. 04, 05). Clasa VIII-a. Drăguţan Valerian (E: 763, 64, 67, 68, 71, 74, 76, 80, 90); clasa IX-a, Ciobănaş Filaret (1947—49, 51, 52, 54—64, 68, 70, 71, 76, 77, 80, 92).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa IX-a. *Ancuţoiu I. Gheorghe* (1949, 50, 57, 59, 63, 83, 90. 92, 92, 93, 95, 97, 98, 2001, 02, 04—06, 10, 11, 17, 21, 23, 26, 34, 39, 42, 43, 48, 50, 56, 63, 81, 82, 86, 92, 102, 04, P), *Bulucea Constantin* (1990, 92, 94—98, 2001, 04—06, 08, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 23, 24, 34, 42, 43, 48, 50, 54—55, 81, 82, 92, 100, 02, 04, 05, P), Mărgăritescu Gh. Corneliu (1950, 90, 92, 95, 97, 98, 2005, 06, 10, 17, 21, 23, 24, 42, 43, 45, 48, 59, 64, 81, 100, P), Smărăndescu C. Petre (1992, 95, 98, 20066, 24, 81, 97, 112, 18, 24,25, 34), Tudor D. Dumitru (1948—51, 54—57, 60—62, 64, 70, 76, 77, 90, 92, 95, 97, 2004, 06, 17, 24), Văcărescu Nicolae (1948, 49, 51, 55—57, 60, 62, 64, 76, 77, 90, 92, 92, 95, 97, 98, 2006, 10, 11, 21, 24), Vlăsceanu Gh. (1948, 51, 54—57, 60, 71, 76, 77, 2006, 23), Clasa X-a. Boiangiu I. Ilie (1950, 93, 2005, 10, 24, 31, 33, 42, 52, 54, 55, 59, 60, 83, 88, 89, 101), Biboacă C. Mihai (1947—58, 60, 2043, 54, 104), Buricescu I. Gh. (1950, 60, 93, 2001, 05—07, 24, 33, 42, 47, 52, 55, 59, 60, 62, 83, 88, 89, P), Chiriţă Silvestru (1993, 2010. 15, 41—43, 45, 50, 54, 59, 62, 79, 83, 100, 02), Cosma S. Aron (1948, 51, 54—56, 60. 73, 74, 2041—43, 47, 50, 54, 59, 104), Drosu Petre (1947—51, 54—57, 60—63, 70—77, 90, 92, 97, 98, 2005, 06, 10, 21), *Enescu Nicolae* (1972, 86, 92, 95, 97, 98, 2001, 03, 06, 08, 10, 11, 15, 17, 18, 20—23, 26, 32—34, 42, 43, 45, 47, 50—52, 56, 59, 64, 81, 82, 88—90, 101, 04), *Grigorescu D. Ion* (1982, 92, 93, 96—98, 2000—11, 18, 21—24, 41—43, 45, 50, 53, 54, 59, 62, 65, 78, 89, 100, 04, 27, P), Lazăr Gheorghe (1859, 955, 73, 96, 2003, 41—43, 45, 50, 54, 59, 62, 86, 94, 98, 100, 03, 04), Moacă A. Dorin (1947—52, 54—57, 60, 62—63, 2042, 43), *Paulescu N. Dan* (1946, 51, 53, 59, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 2003, 04, 07—11, 17, 18, 21, 22, 27, 40—43, 45, 47, 50, 52, 54, 59, 62, 65, 79, 86, 88, 102, 04, P), Piţigoi I. Gheorghe (1947—49, 51. 54—57. 60—63, 70—77, 90, 92, 93, 97, 98, 2005, 06, 21, 42, 62). Poajgă C. Const. (1994—97), 2000—06, 08, 09, 17, 18, 20, 23, 32, 34, 43, 47, 48, 50, 51, 53, 59, 62, 81, 90, 102, 04), Ţîrei C. Gheorghe (1920, 40, 43, 48, 51, 55—57, 60, 71—77, 92, 98, 2006, 21, 24). *Şcoala medie de fete.* Clasa VIII-a. Andrei C. Gheorghiţă (1955, 60, 63, 71. 74, 2006, E: 725, 37, 38, 45, 47, 49, 50, 52, 53, 72, 76), Despoiu Marinela (1960, 70, 71, E, 725, 27, 30, 31, 35, 45, 47, 49, 50, 54, 65, 66, 72), Clasa IX-a. Gheorghe Gheorgiţă (1924, 38, 48, 51, 54—56, 60, 71, 76, 98, 2024), Rotaru Paul (2000, 05, 08, 21, 24, 41, 43, 45, 100,

04, 12—14, 16, 23, 45, 37), Săndulescu Lia (1915, 40, 48, 50, 55—57, 60, 62, 63, 71, 76, 97, 98, 2004, 06, 21), Soimu Marioara (1915, 40, 48, 50, 55—57, 63, 71, 76, 92, 97, 98, 2004—06, 21).

ROMAN. Clasa VIII-a. Ilioi C. Constantin (1960, 2004, 06, 09, 11, 23, E: 765, 67, 71, 72, 75), Ricinski Cezar (1962, 76, 2006, 11, 23, 42, 82, 102, E: 767, 76, 84). Clasa X-a. Russo Gheorghe (1947, 48, 55, 56, 60, 61, 71, 74, 75, 97, 2005, 06, 32), Tîrnăcop Constantin (1844, 80—83 920, 23, 24, 27, 40, 47, 48, 51, 55, 56, 61, P).

ROȘIORII DE VEDE. Clasa X-a. Mitroi Valeriu (1911, 47, 48, 71, 54—56, 60, 62, 67, 74—76, 82, 92, 04, 32).

SATU MARE. Școala tehnică de exploatare c.f.r. an III. Pop Ioan (1948, 49, 51, 55—57, 60, 62, 64, 97, 2006, 07, 10, 21, 24, 41—43, 47, 48, 52, 54). Școala medie de băieți. Clasa X-a. Benea Aurel (1874, 75, 77, 82, 83, 84, 915, 17, 18, 20—22, 24, 26, 41, 48, 51, 54—56, 60, 61, 63, 67, 70, 71—76, 86).

SIBIU. Școala de 7 ani. Clasa VII-a. Dordea Nicolae (E: 727, 29, 31, 62, 66, 67, 71—74). *Pupăzan V. Nicolae* (1992 98, 2000—11, 14—18, 20—24, 40, 42, 43, 45, 47—56, 59, 60, 62, 63, 65, 78), Tulai Gheorghe (1948, 49, 51, 55—57, 70, 71, 74—77), absolvent Pârvău Marius (1992, 95, 97, 98, 2002, 03, 06—08, 10).

SIGHET Clasa VII-a. Tomoiagă Doru (2024, E: 762, 64, 67, 68, 74, 76, 80, 81, 87, 88, P).

SUCEAVA. Clasa IX-a Hopulele Ion (1972, 97, 2001, 06, 10, 21, 24, 41—43, 50, 54, 63, 81, 92, 100, 02).

TECUCI. Clasa VIII-a. Martin Liviu (1970, 71, 76, 2042, E: 747, 50—53, 62—64, 76, 78, 81), Vidrașcu Traian (1992, 2082, 104, E: 749, 53, 62, 66, 71). Clasa IX-a. Tudose Traian (1948, 55, 56, 58, 60, 76, 77, 92, 95, 2004, 05, 06, 81, 105), Vasiclă Constantin (1948, 55—57, 60, 63, 71, 74, 76, 92, 97, 2024, 34, 81); clasa X-a. Dănilă Silviu (1992, 2006, 07, 09, 10, 20, 21, 23, 83, 109, 12, 13, 25, 29), Golovanov Nicolae (1947—58, 60—62, 66, 75, 82, 90), Ilea Valeriu (1916—63, 73—75, 77, 92, 93, 97, 98, 2003, 06, 07, 09, 10, 20, 23)), Rudich Sebastian (1948, 49, 51, 56, 57, 60, 61, 74, 2006, 10, 11, 21). absolvent Stoica Radu (1947, 49, 52, 53, 55, 57, 62, 64, 2006, 10, 21, 48—50).

TIMIȘOARA. Studenți: Melencu Dumitru (1948, 51, 54—56, 60, 61, 82, 93, 2006, 15, 16, 41—43, 59, 60, 102, 04,)*Sgăvîrdea Dumitru* (1825, 903, 16, 17, 19, 20, 23, 25, 30, 43, 47, 49—51, 54—58, 60—63, 71, 73—78, 82, 83, 90, 92, 92, 93, 93, 98, 98, 2001, 02, 05—07, 09, 10, 20—22, 24, 45, 53, 55, 60, 62, 71, 74, 78, 94, 97, 100, 02, 04, 11—13, 15, 16, 20, 23, 25, 26, 29—32, 51), absolvent Brancu Petre (1947, 48, 50, 51, 54, 56, 61, 73—75, 77, 92). Școala medie nr. 1. Clasa X-a, Arsenovici Tiberiu (1947—58, 60—64, 67' 70—77, 84, 92, 93, 96, 2002), Popa Laurențiu (1949, 73, 80, 93, 2001—06, 08, 10). *Școala medie de fete Nr.* 2. Clasa VIII-a. Coșereanu R. (1957, 60, 62, 98, E: 747, 49—51, 53, 58, 65, 66). Clasa IX-a. Rein Erika (1948, 51, 51—56, 60, 76, 77, 92, 2001, 06, 10, 10, 21). *Școala medie nr.*3. Clasa VI-a Coșereanu Sanda (E: 47, 49—51, 53, 58, 64, 65, 72, 76, 89). Clasa VII-a. Popescu Dorina (E: 747—52, 54, 65, 67, 68, 71). Clasa VIII-a. Burlacu Mihai (E: 708, 09, 14—16, 18, 20, 22, 27, 31). Clasa X-a. Cișmimariu Ionica (1946—48, 55—57, 63, 67, 75, 76, 97, 2089). *Școala medie nr.* 5 Clasa X-a. Nerodea Tiberiu (1984, 92, 98, 2004, 08, 09, 32, 33, 53, 54, 81, 88, 102), Vasilievici Alexandru (1998, 2033, 42, 43, 50, 51, 54, 65, 81—83,88, 90). *Școala medie nr.* 7. Clasa X-a. Junger Agata (1950, 51, 54, 62, 63, 77, 92, 2005, 15, 42).

TITU (București). Clasa IX-a. Ghinea P. Ion (1951, 54, 51, 70, 76, 77, 90, 92, 97, 2005, 06, 10, 21, 111—13, 18, 20, 24, 29).

TÎRGOVIȘTE. Școala medie de fete nr. 1 Clasa X-a. Georgescu Adriana (1992—98, 2000—02, 04). *Școala medie de băieți nr.* 3. Clasa VIII-a. Baranache D. Petru (2012, 16, 17, 82, 84, E. 749, 50, 52, 53, 55, 57), Comănescu Laurențiu (1954, 55, 57, 60, E: 747—65, 52, 57, 58), Dumitru I. Gheorghe (1947, 54, 55, 60, 76, 92, 93, 2104, E: 747—50, 52, 54, 57, 58, 62, 64, 65, 76, 80, 87), Grigorescu A. Valentin (E: 747, 49, 50, 52, 53, 55, 57, 64, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 76), Neamțu Const. (2104, E: 747, 49, 52, 53, 57, 64, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 76), Niță I. Stan (1955, 60, 71, 76, 2002, 06, 104, E: 747, 48, 50, 75,) Popescu G. Corneliu (E:747, 49, 52, 53, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 76, 89,) Popescu S. Dan (E: 747, 49, 50, 52, 54, 55, 60, 71, 74, 76), Tătuleanu D. Marius (1955, 60, 71, 76, 2006, 23, 102, 04, E: 747, 48, 50, 57, 65—67, 71, 72, 80, 84). Clasa X-a. Cărbunaru M. Constantin (1879, 80, 83, 91, 94, 900, 14, 17, 45, 48, 50, 51, 54, 55, 57, 58, 60—64, 90), Latcu Gh. Dumitru (1954, 97, 98, 2006, 07, 10, 11, 21, 23, 24, 50, 64), Mihăescu Cristian (1837, 943, 47, 49, 51, 54, 56, 57, 59—61, 63, 70, 71, 74, 77, 92, 93, 2006, 10, 20, 21, P), Popovici C. Alexandrescu (1992, 97, 99, 2001, 06, 08, 10, 20, 21, 23, 24, 42, 43, 45, 50, 51, 54, 78, 88, 92, 104, P), *Tudor N. Constantin* (1819, 25, 910, 91—93, 93, 94, 95, 96, 96, 98, 2001—11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 32—34, 41—43, 53, 54, 60, 65, 78, 81, 83, 88—90, 94, 97, 100, 02, 04, P).

TÎRGU—JIU. — Clasa VIII-a. *Aniţescu N. Nicolae* (1876, 914—18, 24, 40, 44, 47—50, 52—54, 76, 77, 90, E: 729—31, 42, 47—52, 54—56, 58—60, 65, 68), Bozdog Ion

(E: 776, 78, 80, 81, 89, 90, 96—99, 801, 04). Clasa X-a. Brandabura Sabin (1948, 51, 55, 56, 74, 2006, 07, 21, 41, 42, 45, 48, 83, 88, 90), Cătălina D. Ion (20011, 22, 23, 32, 41, 43, 45, 50, 52, 54, 63, 65, 78, 79, 88, 90, Mărgineanu Const (1992, 93, 95—98, 2001, 03, 04, 06—08, 10, 20, 21, 23, 32), Neagoe Petre (1948, 51, 55—58, 60, 61, 74, 76, 77), Popescu A. Iulian (1953, 72, 73, 85, 86, 2023, 42, 88, 89, P), absolvent Popeangă V. Ion (1783, 804, 19, 72, 960, 82, 90, 97, 98, 2003, 04, 06, 07, 09, 10, 24, 26, 33, 43, 50, 54, 60, 62, 81—83, 86, 88, 92, 100, 04).

TÎRGU MUREŞ. — Clasa VIII-a. Blaga Eugenia (1960, 70, 71, 2028, 102, E: 747—50, 52, 57, 62, 64, 65, 71, 76, 80, 84, Burlacu Galina (1954, 60, 70, 71, 2023, 102, E: 747, 49—52, 64, 65, 68, 71, 76, 80, 84), Curtifan Petru (1949, 54, 55, 57, 60, 71, 93, E: 747—58), Fleşeriu Călin (1946, 48, 49, 54—57, 59, 60, 62—64, 70, 71, 76, 81, 92, 93, E: 747—53), Harsan Laurenţiu (1949, 54, 55, 57, 59, 60, 62, 63, 70, 73, 81, 90, 92, 93, 95, E: 747—58, 60), Motronea Nicolae (1955, 57, 60, 62, 64, 76, E: 747, 48, 50, 52, 57), Nichescu Elena (1948, 50, 51, 55, 56, 60, 63, 74, 92, 2004, 06, 10, 21, 23, 43, 50, 54), Ranisan Ştefan (1954, 55, 63, 71, 90, 93, E: 747—52, 54, 56, 58, 60), Sabău Liviu (1954, 55, 71, E: 747—52, 54, 56, 58), Talpalaru Alexandru (1956, 60, 62—64, 72, 77, 90, 93, 95, E: 755, 56, 58, 60), Vecerdi Teodor (1955—57, 59, 60, 62, 69—71, 73, 74, 76, 77, 90, 92, 93, 95, 2104, E: 747—58, 60). Clasa X-a *Matei C. Paul* (1946—58, 60—64, 67, 71—77, 84, 90, 92, 93, 96—98, 2001, 03, 06—11), Moraru Octavian (1947—49, 51, 54, 55—58, 60, 62, 63, 67, 71—74), Paşa Magdalena (1973, 97, 2001, 04, 07, 54, 88, 100, 04, 11, 13, 16, 17, 23, 29), Si dan Nina (1880, 947, 48, 50, 51, 54—57, 60, 62, 63, 67, 71, 74, 75, 92), Stoica Teodor (1948, 50, 51, 54—58, 60, 61), Tîru Gavril (1947—51, 54—58, 60, 61, 74—76).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa X-a. Iocşeneanu Ion (1992, 93—98, 2001, 03, 05—08, 10, 11, 15, 20, 21, 32, 34, 41—43, 45, 54). Răileanu Mihai (1980, 86, 92—98, 94, 96, 2003, 04, 05—08, 10, 11, 15, 21, 23, 32, 42, 43, 45, 54, 88—90).

TÎRGU-OCNA. — Absolvent Mironescu Dan (1878, 79, 914, 47, 48, 51, 54, 56, 58, 60—62, 71, 74, 75, 77, 88, 98, 2003, 05—07, 32, 42, 43, 89, 100).

TÎRNAVENI. Clasa IX-a. *Grigoriu Corneliu* (1923, 43, 44, 47, 51, 54, 58, 64, 76, 92, 93, 97, 2001, 04—06, 10, 15, 21, 24, 42, 43, 45, 50, 54, 63, 65, 86, 92, 100, 04, 11, 14, 23).

TRUSEŞTI (Suceava). — Clasa VII-a. Neghină Gh. Traian (E: 758, 67, 73, 76, 84, 89, 92, 801—05). Clasa IX-a. Bejenaru Gh. Ioan (1948, 51, 56, 76, 2042, 48, 111, 18, 24, 29, 34), Ciobotaru C. Ioan (1948, 51, 56, 71, 92, 2006, 42 , 50, 53, 59, 82, 100, 11, 21, 24, 27), Creţu C. Ioan (1948, 51, 56, 71, 92, 2100, 11, 21, 24, 27, 94), Mocanu H. Ovidiu (1948, 51, 56, 63, 76, 77, 92, 97, 2006, 10, 21, 23, 42, 48, 112, 13, 18, 24, 25, 28, 29), Volintiru C. Radu (2042, 59, 100, 11, 13, 14, 25, 27, 34, 94). Clasa X-a. Achiţei I. Constantin (1948, 51, 56, 71, 73, 74, 2006, 42, 45, 83, 88, 109, 11, 28), Alexa Gh. Claudiu (1951, 56, 71, 73—75, 2008, 10, 21, 42, 88, 89, 102, 11, 18, 26, 29), Burlacu C. Gheorghe (1948, 49 51, 53—56, 61, 73—75, 97, 2032, 41, 42, 82, 83, 111—13, 23, 29), *Ciubotaru C. Constantin* (2040—53, 55, 56, 59, 62, 66, 79, 81—83, 86, 88, 89, 92, 100, 02, 04, 09—29, 31), Creţu Gheorghe (1971, 73, 93, 95, 96, 2006, 42, 43 45, 54, 83, 88, 109, 11, 13, 16—18, 20, 23—25, 28, 29), *Ferdoschi Dumitru* (1948, 51, 53—56, 60, 61, 62, 71, 73—75, 77, 8 , 92, 2006, 10, 21, 23, 24, 41—43, 45, 48, 56, 62, 66, 83, 88, 109, 11—13, 17, 18, 24, 25, 28, 29, 94), Gherman D. Mihai (1948, 51, 62, 71, 73—75, 2006, 42, 45, 50, 88, 111—18), Slabu N. Vasile (2003, 08, 24, 41, 43, 48, 54, 88, 102, 09, 11—13, 18, 19, 23—25, 27—29, 25).

TURDA. — Clasa X-a. Racoviţan Dorin (1954, 72, 73, 2006, 32, 42, 43, 54, 81, 83, 88, Reich Toma (1949, 52, 54, 57, 60, 61, 6 , 71—76, 90), Simpăleanu L. Paul (1948—52, 54, 55, 57, 70, 76—78).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Cojocaru Napoleon (1915, 48—51, 54, 56, 57, 60, 62, 70, 71, 76, 77, 92, 97, 2005, 08, 10, 42, 81, 102, 04), Miloş I. Florea (1949, 52, 55, 57, 58, 61. 64, 76, 77, 93, 96). Clasa X-a. Lizeanu Stelian (2041—43, 48, 50, 53, 54, 59, 65, 81, 83, 88—90, 100, 04, 05, 09, 11, 12, 18, 21—23, 25, 27, 29, 61).

TURNU SEVERIN. — Clasa VIII-a. Suici Gheorghe (2006, E: 755, 66, 71—76, 80, 90). Clasa IX-a. Gălătuşe Stelian (1819, 951, 56, 61, 77, 90, 2010, 21, 35, 37, 38, 42, 43, 81, 109, 12, 13). Clasa X-a. *Ionescu Radu* (1938, 60, 73, 92, 92, 95, 97, 98, 2001, 03, 08, 10, 11, 17, 20, 21, 42, 43, 45, 48, 50, 52—54, 62, 65, 88, 89, 94, 100, 04, 05, P).

URLAŢI. — Clasa V-a. Antonescu Dan (E: 747, 49, 50, 58, 64, 70, 71, 77) Clasa IX-a Dedu Liviu (1948, 51, 56, 60, 62—64, 71, 77, 92, 95, 97, 98, 2004—06, 08, 10, 11, 12, 23, 81, 86, P), Enache S. Ion (1948, 51, 56, 57, 60, 62, 63, 71, 77, 97, 2006, 08, 21, 23, 81, 86), Georgescu C. Sebastian (1877, 948, 51, 56, 57, 60, 62, 63, 71, 98, 2006, 08, 11, 21, 86). Clasa X-a. Petcu Diamanta (1958, 63, 97, 2006, 09, 10, 17, 21, 23, 42, 111, 16, 23, 29).

URZICENI (Bucureşti). — Absolvent *Turiga M. Constantin* (1993, 2009, 18, 22, 24, 41—45, 48, 50, 53, 54, 65, 82, 90, 97, 100, 02, 04, 05, 11—13, 18, 21, 23, 25, 27,—29, 31, 33, 34, 44, 51).

ZALĂU. — Clasa VIII-a. Popp Florica (1866, 915—18, 23—27, 31, 37, 40, 41, 43). Clasa IX-a. Moroti Cornel (1951, 60, 61, 71, 77, 93, 94, 2004, 06, 21). Clasa X-a Farcaş V. Beniamin (1960, 72, 77, 2023, 45, 81—83, 88—90).

OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1956 — 1957

În atenţia tineretului din şcoli

— Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează « Olimpiadele de matematică şi de fizică 1956—1957» la care pot participa elevii şcolilor medii de zi şi serale, ai şcolilor pedagogice şi de învăţători, profesionale şi tehnice.

— Olimpiadele se vor desfăşura în patru etape:

— etapa I organizată pe şcoli, va avea loc pentru matematică şi pentru fizică, între 20 noiembrie şi 15 decembrie 1956;

— etapa II locală, va avea loc pentru matematică la 17 februarie şi pentru fizică la 24 februarie 1957;

— etapa III regională, va avea loc pentru matematică şi pentru fizică la 31 martie—1 aprilie 1957;

— etapa IV finală de ţară, va avea loc în Bucureşti, elevii admişi se pot prezenta fie numai la matematică, fie numai la fizică, la probele scrise (eliminatorii) şi orale care au loc între 29 aprilie şi 2 mai 1957,

— Elevii evidenţiaţi la ultimele două etape vor primi diplome, premii în cărţi etc.

ELEVI ŞI ELEVE PARTICIPAŢI CU TOT ENTUZIASMUL VOSTRU LA ACESTE OLIMPIADE DE MATEMATICĂ ŞI DE FIZICĂ!

ABONAMENTUL PE ANUL 1957 ESTE DE LEI 10 (12 NUMERE), IAR CU EXEMPLARUL CU PREŢUL LEI 1 EXEMPLARUL

Volumul VII, Nr. 10 (Gazeta Matematică şi Fizică seria B) octombrie 1956

C. 1058 — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 **Preţul Lei 1 exemplarul**

E 1426

ΔΑΓ

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

TRĂIASCĂ ÎN VECI PRIETENIA ROMÎNO-SOVIETICĂ

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
CMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Anul VII — noiembrie 1956

11

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII, Nr. 11 — noiembrie 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie — deschizătoare de drumuri pentru avîntul ştiinţelor matematice şi fizice* 561
2. *100 ani de la moartea lui Farkaş Bolyai de I. Maurer* 563
3. *Omografie (urmare) de Gh. D. Simionescu* . . 566
4. *Numărul „e" în natură de Emeric Toth* . . . 571
5. *Planeta Marte de Călin Popovici* 575
6. *Note matematice (15, 16)* 581
7. *Rezultatul întrecerii pe ţară între cercurile de matematică şi fizică ale şcolilor medii pe anul 1956* . . 585
8. *Caleidoscop matematic de Gh. Bazacov* 586
9. *Noutăţi din ştiinţă şi tehnică* 589
10. *Olimpiada de matematică şi fizică 1956—1957* . . 590
11. *Probleme rezolvate (1854); 1952; 1953* 594
12. *Probleme propuse (2381—2403)* 597
13. *Chestiuni de examen (2404—2417)* 600
14. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoale de 7 ani (E: 885—898)* 602
15. *Olimpiada tinerilor matematicieni şi fizicieni 1957* . 604
16. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 607

ANUL VII 11 NOIEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolangiu A.**, asistentă univ.; **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53. — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VII • Nr. 11 Noiembrie 1956

MAREA REVOLUŢIE SOCIALISTĂ DIN OCTOMBRIE DESCHIZĂTOARE DE DRUMURI PENTRU AVÎNTUL ŞTIINŢELOR MATEMATICE ŞI FIZICE

Popoarele Uniunii Sovietice — şi alături de ele, popoarele întregii lumi — sărbătoresc în acest an a 39-a aniversare a Marii Revoluţii Socialiste din Octombrie.

Pentru lupta de eliberare a oamenilor muncii de pretutindeni, Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie a însemnat prima verificare practică a măreţei învăţături marxist-leniniste, dovada concretă a necesităţii şi posibilităţii ca prin lupta sa revoluţionară proletariatul să se elibereze pe sine şi — prin aceasta — să elibereze întreaga societate de orice formă de exploatare şi asuprire. În octombrie 1917, condus de partidul său comunist întemeiat de V. I. Lenin, proletariatul din fosta Rusie ţaristă, în fruntea întregului popor, a dat o lovitură nimicitoare teoriilor reacţionare despre « veşnicia » capitalismului, dovedind în modul cel mai evident posibil că cei ce muncesc îşi pot crea societatea lor, statul lor, în care la un loc de cinste se află munca creatoare şi în care nu mai este posibil huzurul trîntorilor şi paraziţilor, care trăiesc pe spinarea şi din sudoarea truditorilor. În felul acesta, Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie a desecătuşat energiile creatoare ale maselor şi a dat un avînt încă neîntîlnit ştiinţei legată de popor şi pusă în slujba poporului. Astfel au fost posibile toate măreţele realizări în domeniul ştiinţei şi tehnicii, al artei şi culturii, ceea ce a ridicat prestigiul fostei Rusii ţariste — o ţară agrară înapoiată — pînă la nivelul unanim recunoscut astăzi, de mare putere industrială. U.R.S.S. este astăzi ţara tuturor posibilităţilor de realizare a celor mai îndrăzneţe visuri ale oamenilor de ştiinţă, care-şi îndreaptă ţelurile lor în direcţia creării condiţiilor pentru o viaţă din ce în ce mai bună şi mai frumoasă pentru toţi cei ce muncesc.

Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie a creat largi posibilităţi de dezvoltare şi pentru ştiinţele matematice şi fizice. Pornind de la principiul leninist al necesităţii legăturii organice a ştiinţei cu practica construirii socialismului şi comunismului, matematicienii şi fizicienii sovietici au rezolvat o serie întreagă de probleme teoretice care au ajutat şi vor ajuta la construirea vieţii noi. Pentru a ilustra cele spuse mai sus este suficient să arătăm numai unele dintre realizările savanţilor sovietici.

Astfel în dezvoltarea matematicii savanţii sovietici au obţinut succese considerabile în domeniul teoriei ecuaţiilor diferenţiale şi integrale care au o deosebit de mare importanţă nu numai teoretică — dar şi practică. Această teorie are largi aplicaţii în fizică, mecanică, tehnică şi în alte domenii. Savanţii sovietici au obţinut succese deosebite în elaborarea teoriei problemelor de limită ale sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale, a metodelor de rezolvare a ecuaţiilor de tip hiper-

bolic, au obținut rezultate strălucite privind aplicarea teoriei în practică. Legat de aceasta, savanții sovietici au obținut succese însemnate și în teoria funcțiilor de o variabilă complexă, în special în ceea ce privește reprezentarea funcțiilor de o variabilă complexă prin serii de polinoame și teoria generală a reprezentărilor quasi-conforme care sînt importante și prin aplicațiile lor în hidro- și aerodinamică. În ultimul timp s-au obținut mari succese în rezolvarea teoretică a unor probleme ale aerodinamicii care au permis astfel de realizări ale tehnicii sovietice cum este marele avion supersonic pentru pasageri TU 104, adevărată minune a tehnicii moderne.

Acestea sînt numai cîteva exemple. Matematicienii sovietici au obținut succese importante și în alte numeroase domenii.

În domeniul fizicii, savanții sovietici au adus de asemenea o contribuție deosebit de importantă la îmbogățirea tezaurului științei.

Astfel în anii puterii sovietice a fost creată aproape în întregime fizica tehnică ale cărei concluzii sînt folosite în mai toate ramurile economiei naționale a URSS. Largi aplicații practice au găsit fizica metalelor și studiul transformărilor ce au loc în aliaje și oțeluri speciale, pe baza lor descoperindu-se procedee de obținere a unor noi aliaje rezistente la temperaturi mari; s-au fabricat oțeluri cu înalte calități magnetice, blindaje excelente, s-a obținut folosirea fierului pentru dinamuri, s-au preparat aliaje ușoare pentru avioane etc.

Savanții sovietici au făcut studii rodnice în domeniul fluidelor, sticlelor, polimerilor și dielectricilor care au dus la descoperirea guarei rezistente la frig, escaponului rezistent la căldură, stironului un izolant perfect, a elegazului care are o rezistență electrică de 2,5 ori mai mare ca a aerului.

Fizicienii sovietici au adus un aport însemnat la progresul impetuos al industriei URSS. Sînt cunoscute lucrările lor care au contribuit din plin la progres în industria vidului, radioelectricității, petrolului, produselor chimice, cît și la folosirea pașnică a energiei atomice. La rezolvarea problemelor teoretice de care era legată darea în folosință a primei centrale electrice pe bază de energie atomică și-au dat contribuția și savanți fizicieni. De asemenea ei au contribuit și la progresele însemnate ale astronomiei, meteorologiei și seismometriei.

Toate aceste mari succese ale savanților sovietici, dintre care noi nu am pomenit decît foarte puține, se datoresc în principal condițiilor pe care le-a creat Marea Revoluție Socialistă din Octombrie pentru dezvoltarea științei, plasării hotărîte a savanților sovietici pe pozițiile metodologice ale materialismului dialectic ale îndrumării permanente și ajutorului dat de către PCUS și Statul sovietic. Toate acestea au fost posibile datorită legăturii strînse a științei de practică, a transformării științei dintr-un apanagiu al cîtorva « aleși » într-un bun accesibil pentru cele mai largi mase populare.

Creșterea în URSS a unei noi generații de tineri cercetători se datorește și orientării date școlii de către PCUS și de guvernul sovietic. Congresul al XX-lea al PCUS, a accentuat din nou asupra sarcinii pe care o are școala de a da o asemenea educație, care să apropie de știință tînăra generație. Măsurile luate de școala sovietică pe baza indicațiilor Congresului al XX-lea al PCUS, în direcția politehnizării învățămîntului, dezvoltării predării matematicilor, fizicii, și chimiei în școala medie, precum și a lucrărilor practice legate de însușirea acestor discipline, vor duce la un nou avînt al dezvoltării acestor științe, la ridicarea științei sovietice pe noi culmi.

Urmînd învățăturile Marelui Octombrie, Partidul Muncitoresc Romîn a pus și în fața școlii noastre sarcina de a dezvolta cunoștințele de matematică și de fizică printre elevii noștri. La Congresul al II-lea al PMR, s-a arătat că în

anii regimului democrat-popular s-au obținut în țara noastră succese mari în diferite ramuri ale științei. Raportul CC al PMR la Congresul al II-lea al Partidului subliniază că, pentru ca știința noastră să obțină în viitor succese și mai mari, și mai multe, succese care să sporească contribuția științei la dezvoltarea economiei naționale și a culturii și să ridice prestigiul ei internațional este necesar ca « oamenii de știință, ridicînd continuu nivelul teoretic al activității științifice,... să combată totodată unele tendințe de rupere a științei de preocupările practice ». De asemenea s-a arătat că, cu toate succesele pe care le-a obținut învățămîntul nostru de cultură generală în urma Reformei învățămîntului din 1949, există încă o rămînere în urmă în ceea ce privește pregătirea tineretului nostru școlar în domeniul științelor matematice, a științelor fizico-chimice, a științelor naturale, a științelor sociale. Considerînd că însușirea acestor științe are o deosebit de mare importanță în rezolvarea sarcinilor construcției socialismului în țara noastră, Congresul a trasat sarcina remedierii imediate a acestui neajuns. Recenta Hotărîre a C.C. al P.M.R. și a Guvernului R.P.R. privind îmbunătățirea învățămîntului de cultură generală, pune un mare accent pe dezvoltarea studiului acestor discipline și pe legarea lui de practică și crează condițiile pentru obținerea unui nou avînt în această direcție. Depinde acum de cadrele noastre didactice și de tineretul nostru școlar folosirea din plin a condițiilor create pentru a obține rezultate din ce în ce mai bune. Societății de matematică și fizică și « Gazetei matematice » le revine de asemenea un rol important în sprijinirea școlii pentru a atrage cît mai mult tineretul spre studierea acestor discipline.

Urmînd în mod creator exemplul URSS, și folosind din plin indicațiile partidului nostru, să depunem eforturi sporite pentru a obține noi și mari succese, pentru a contribui la îmbogățirea tezaurului universal al științelor matematice și fizice!

Pe drumul luminos deschis de Marele Octombrie înainte spre noi succese în legarea strînsă a teoriei cu practica!

Să folosim din plin în mod creator marile succese ale URSS în domeniul științei și al învățămîntului!

Trăiască a 39-a aniversare a Marii Revoluții Socialiste din Octombrie!

---

100 DE ANI DE LA MOARTEA LUI FARKAS BOLYAI

I. MAURER, lector, Cluj

ÎNTR-O dimineață de noiembrie, ninsă de primii fulgi de zăpadă, cele două clopote ale vechiului colegiu din Tîrgu-Mureș anunțau că în cursul nopții spre 20 noiembrie 1856, s-a stins din viață bătrînul profesor Farkas Boylai. Nu putem privi fără emoție craniul lui, păstrat în muzeul « Bolyai » din Tg. Mureș; cîte idei profunde s-au născut în acest craniu și cîte s-ar fi putut naște dacă condițiile vieții sale ar fi fost mai favorabile ! Cît de trist este faptul că el însuși a văzut clar tragedia sa, iar spre sfîrșitul vieții a încetat să creadă că generațiile următoare îi vor aprecia opera. « Mă mulțumesc cu gîndul că după ce clopotul, însoțitorul credincios al soartei noastre, va fi sunat ultima dată, nici piatra nu va mai vorbi despre mine », scrie Farkas Bolyai cu modestie amară într-una din ultimele sale scrisori adresate prietenului său F. Gauss. Deși tîrziu, valoarea operei sale a fost totuși descoperită și recunoscută. Acum, la a suta aniversare a morții sale, să ne oprim pentru o clipă cu memoria, la mormîntul acestui mare gînditor ardelean.

Farkas Bolyai s-a născut la 9 februarie 1775 în comuna Bolya din apropierea Sibiului. Primele lecţii le-a primit de la tatăl său, Gaspar Bolyai; în anul 1781 îl găsim la colegiul din Aiud. Aici se distinge imediat prin aptitudinile sale extraordinare şi multilaterale. Din nefericire învăţătorii săi n-au ales calea potrivită în educaţia unui copil atît de talentat. În loc de a-i orienta şi cultiva just talentul, ei îl tratau ca pe un copil minune, care între altele, era şi un excelent calculator mintal. Această educaţie eronată a avut o influenţă dăunătoare asupra dezvoltării lui F. Bolyai şi a contribuit, fără îndoială, la formarea caracterului său neliniştit. Aşa fiind lucrurile, putem considera drept un noroc pentru el faptul că la vîrsta de 12 ani ajunge în familia baronului Kemeny, unde învaţă împreună cu tînărul baron Simon Kemeny. În jurul anului 1790 îi vedem împreună la colegiul din Cluj, iar în 1796 la Jena.

La Jena, tînărul Bolyai, talentat în multe domenii şi dotat cu fantezie capricioasă, începe să se ocupe mai temeinic cu matematica; aici începe să se dezvolte pasiunea lui pentru geometrie şi aritmetică, pasiune care-l stăpîneşte pînă la mormînt. Tot în anul 1796 Bolyai se înscrie la Universitatea din Göttingen unde face cunoştinţă şi leagă prietenie pe viaţă cu titanul descoperirilor matematice F. Gauss. Încă în cursul studiilor sale universitare, Bolyai este atras de problema milenară a paralelelor. El crede ferm în posibilitatea demonstrării renumitului postulat V al lui Euclid. Cînd Bolyai comunică lui F. Gauss, care ajunsese deja un colos în domeniile matematicilor superioare şi mai ales în teoria numerelor, speranţa lui de a rezolva această problemă, marele matematician exclamă încîntat: « dumneata eşti un geniu! dumneata eşti prietenul meu!»

Mulţi ani mai tîrziu, fiul său, Ianos Bolyai realizează previziunea lui, punînd bazele raţionamentului modern în geometrie prin geniala rezolvare a problemei paralelelor. Întors în ţară încă din 1799, F. Bolyai este invitat să ocupe în 1804, catedra de matematică, fizică şi chimie la colegiul din Tîrgul Mureş. El funcţionează ca profesor la acest colegiu pînă la pensionare, adică pînă în anul 1851. Timp de 47 de ani F. Bolyai lucrează stăruitor, izolat într-un mediu lipsit de tradiţie matematică şi chiar de bază în matematică, unde nimeni nu-l putea aprecia şi înţelege. Aceasta constituie, fără îndoială, una din cauzele principale ale tragediei vieţii sale. Multe lucruri au mai contribuit la agravarea acestei situaţii nefericite: boala soţiei sale, neînţelegerile cu fiul său Ianos, greutăţile materiale etc. Eşecul încercărilor sale de a rezolva problema paralelelor constituia însă « nefericirea » vieţii sale. Nu este de mirare că în aceste împrejurări F. Bolyai a risipit multă energie pentru probleme diferite de cele matematice. Picta tablouri, scria piese de teatru, a construit o sobă cu consum redus de combustibil şi care s-a răspîndit în întreaga Transilvanie, a elaborat un manuscris pentru o carte de silvicultură etc. Iată cum îl caracterizează P. Stäckel, care a ridicat un monument etern în cartea sa « Viaţa şi cercetările geometrice ale lui Farkas Bolyai şi Janos Bolyai » (1914): « . . . în loc să creeze maximum posibil într-un singur domeniu de activitate el şi-a dispersat activitatea ». Pasiunea pentru matematică îl stăpîneşte pe F. Bolyai mereu. El rămîne un cercetător în diferitele domenii ale matematicii şi opera sa este o moştenire ştiinţifică remarcabilă. Înşelat în aşteptările sale, F. Bolyai subapreciază valoarea operii sale renunţînd în amurgul vieţii chiar la speranţa de a fi recunoscut de posteritate.

Să aruncăm o privire asupra activităţii matematice a lui F. Bolyai. În primul rînd trebuie să amintim eşecul său, care a avut o influenţă deosebită asupra vieţii sale. Postulatul V al lui Euclid se poate formula în felul următor: dacă suma celor două unghiuri interne formate de o dreaptă a şi de dreptele

b şi *c* intersectate de *a* pe aceiaşi parte a lui *a* este mai mică decît două drept-unghiuri, atunci dreptele *b* şi *c* se intersectează, şi anume pe partea unde se află cele două unghiuri interne. În legătură cu această admisie a lui Euclid au fost aduse multe obiecţii încă din antichitate, deoarece nu este de loc evident faptul că cele două drepte nu se intersectează, şi în majoritatea cazurilor faptul că ele se taie nu se poate controla în practică. Geometrii au vrut să înlăture acest postulat, demonstrînd că el este o consecinţă logică a celorlalte postulate ale lui Euclid, deci de prisos. Este bine cunoscută istoria acestor încercări: toate « demonstraţiile » s-au dovedit false, deoarece conţineau fie o deducţie greşită, fie cîte o ipoteză echivalentă cu ipoteza conţinută în acest postulat.

F. Bolyai a crezut în posibilitatea demonstrării postulatului V nu numai în timpul studiilor sale universitare dar şi în anii următori. Folosindu-se de ideile sale din Göttingen, el a scris o lucrare în această direcţie « Teoria paralelelor din Göttingen » şi a trimis-o în 1804 prietenului său F. Gauss. Raţionamentul expus în această lucrare nu s-a dovedit însă inatacabil. Aceiaşi soartă a avut în 1808 şi încercarea sa de a înlătura lipsurile primei lucrări « Adaus la teoria paralelelor din Göttingen ». F. Bolyai s-a angajat în aceste încercări nu ca un începător, ci ca un matematician care cunoaşte bine greutăţile problemei şi care cunoaşte metode de cercetare profunde. Cu toate acestea încercarea lui a eşuat, ceea ce explică faptul că de aici în colo considera problema paralelelor « nenorocirea » vieţii sale.

F. Bolyai nu a ajuns la măreaţa idee pe baza căreia geniul fiului său, Janos Bolyai, a rezolvat dificila problemă a paralelelor. Cercetările lui F. Bolyai în legătură cu paralelele au o deosebită valoare istorică, deoarece au influenţat pe fiul său, deci prin această influenţă au contribuit implicit la rezolvarea problemei. Aceste cercetări fac parte din materialul vast al capodoperei lui F. Bolyai, intitulată « Tentamen ». Această operă a fost începută de F. Bolyai încă în anul 1804 şi a apărut în 1832 (vol. I) şi în 1839 (vol. II). În 1851 F. Bolyai a publicat o lucrare scurtă în limba germană « Kurzer Grundriss eines Versuchs » în care a rezumat ideile sale de bază, dezvoltate în « Tentamen ». Această scurtă lucrare poate fi considerată oarecum, testamentul ştiinţific al lui F. Bolyai. Analizînd structura acestor opere, ne convingem de faptul că F. Bolyai nu s-a ocupat din întîmplare cu problema paralelelor: preocuparea sa principală se concentrează la studiul bazelor matematicii.

Este de remarcat încercarea lui F. Bolyai de a stabili bazele aritmeticii şi ale geometriei separat una de alta. Această idee este originală şi s-a realizat complet numai la sfîrşitul secolului al XIX-lea. Aceasta nu înseamnă că aritmetica şi geometria trebuie despărţite, ca discipline matematice, una de alta: « în loc de a le despărţi forţat, cele două surori, — aritmetica şi geometria — trebuie lăsate să se îmbrăţişeze şi să se completeze », scria F. Bolyai în prefaţa ediţiei a II-a a cărţii sale « Începutul aritmeticii » (ed. I a apărut în 1830).

În cadrul studiului bazelor aritmeticii F. Bolyai a elaborat cu multă precizie — care satisface chiar cerinţele axiomaticii moderne — teoria numerelor raţionale (pozitive şi negative). El elaborează o teorie a numerelor iraţionale, încercînd să pună bazele teoriei numerelor imaginare pe un fundament mai sigur decît cel precedent. (Observăm că această din urmă teorie conţine şi multe părţi obscure). Este însemnat faptul că tratînd operaţiile în domeniul numerelor imaginare, el ajunge foarte aproape de formularea precisă a principiului de permanenţă, numit şi principiul lui Hankel (1867).

În tratarea lui F. Bolyai despre bazele geometriei ne surprinde definiţia foarte clară a unui sistem geometric. Tot aici se formulează pentru prima dată, după cît ştim, în formă generală, cerinţa de independenţă faţă de un sistem de axiome: «... nici una din axiome nu poate fi dedusă din celelalte» scrie F. Bolyai. Dealtfel în această parte a operei sale el se ocupă mai ales cu problema paralelelor. Formulează între altele o serie de axiome echivalente cu postulatul V al lui Euclid. Dintre acestea citǎm următoarea: «Prin trei puncte oarecare ce nu sînt situate pe aceiaşi dreaptă poate fi dus un cerc». Menţionăm că această axiomă constituie moştenirea ştiinţifică cea mai cunoscută a lui F. Bolyai, ceea ce se datoreşte faptului că această axiomă este una dintre cele mai întrebuinţate axiome echivalente cu postulatul V al lui Euclid.

Opera lui F. Bolyai se completează cu încă trei manuale şi o teză separată despre numerele imaginare, în afară de cele amintite mai sus. Capodopera lui însă este «Tentamen», care conţine pe lîngă o vastă materie de aritmetcă şi geometrie multe cercetări noi şi multe idei — am vorbit numai despre unele — cu care F. Bolyai a depăşit epoca sa. «Tentamen» prezintă pe F. Bolyai ca pe un cercetător al bazelor matematicii, ca pe un precursor al multor probleme dificile ale secolului al XIX-lea. Aceasta este trăsătura caracteristică a activităţii matematice a lui Farkas Bolyai.

OMOGRAFIA

(urmare)

Conf. univ. GH. D. SIMIONESCU

Fascicule omografice

19. Fiind date într-un plan două puncte fixe O, O', toate dreptele care trec prin O formează un fascicol, iar cele care trec prin O' un alt fascicul. Dreptele unui fascic l se mai numesc şi razele fasciculului. Spunem că între dreptele celor două fascicule există o corespondenţă omografică, dacă între coeficienţii unghiulari (pantele) m şi m' a două drepte omoloage avem relaţia

$$Amm' + Bm + Cm' + D = 0, \tag{23}$$

deci unei drepte dintr-un fascicul îi corespunde o singură dreaptă în celălalt fascicul şi reciproc.

Nu mai este nevoie să punem în evidenţă relaţia (23) dacă pentru a construi dreapta din fascic lul (O'), omoloagă unei drepte din fasciculul (O), ne servim numai de linii drepte, cercuri, plane şi sfere.

Fasciculele omografice se bucură de proprietăţi asemănătoare diviziunilor omografice, care se demonstrează prin metode asemănătoare. Aci le vom enunţa, dar nu vom da demonstraţia decît acolo unde va fi nevoie. Astfel:

— *două fascicule omografice sînt perfect definite dacă se dau trei perechi de raze omoloage*;

— *fiind date trei fascicule* (O), (O'), (O''), *dacă de la* (O) *la* (O') *se trece printr-o transformare omografică* Ω', *iar de la* (O') *la* (O'') *se trece printr-o transformare omografică* Ω'', *atunci se poate trece direct de la* (O) *la* (O'') *printr-o transformare omografică* Ω.

Aceasta se enunţă mai simplu spunînd că produsul a două transformări omografice este tot o transformare omografică: $\Omega = \Omega' \Omega''$.

— *În două fascicule omografice raportul anarmonic a patru drepte dintr-un fascicul este egal cu raportul anarmonic al dreptelor omoloage din celălalt fascicul.*

Condiţia este necesară şi suficientă ca cele două fascicule să fie în corespondenţă omografică.

Se deduce imediat că două fascicule omografice (O) şi (O') determină pe două drepte oarecare ce nu trec prin O sau O' diviziuni omografice. Reciproc, dacă se uneşte un punct O cu punctele unei drepte (Δ) şi alt punct (O') cu punctele unei drepte (Δ'), iar între punctele celor două drepte există o corespondenţă omografică, se obţin două fascicule omografice.

20. Dreapta care uneşte cele două vîrfuri O, O', considerată pe rînd ca aparţinînd fiecărui fascicul, are drept omoloage două drepte distincte (δ), (δ').

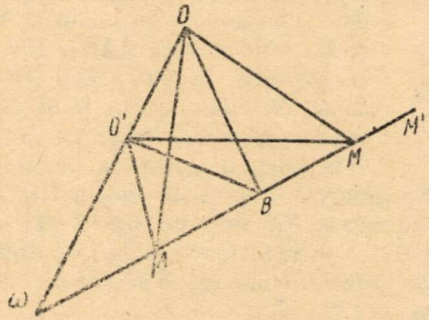


Fig. 19

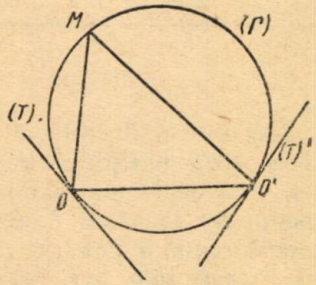


Fig. 20

Dacă (δ) şi (δ') coincid, ele coincid cu dreapta OO', căci (δ) trece prin O, iar (δ') prin (O'). Se spune atunci că fasciculele au două raze omoloage care coincid.

Teoremă. Dacă în două fascicule omografice două raze omoloage coincid, atunci punctele de intersecţie ale celorlalte perechi de raze omoloage sînt pe o dreaptă.

Pentru aceasta să ducem dreapta OO' (fig. 19), apoi razele omoloage (a), (a') care se întîlnesc în A, şi (b), (b') care se întîlnesc în B; dreapta AB taie pe OO' în ω. Să mai ducem acum altă pereche de raze omoloage şi să presupunem că ele taie dreapta AB în două puncte distincte M, M'. Conform proprietăţilor enunţate mai sus, rapoartele anarmonice ale dreptelor $O\omega$, OA, OB, OM şi $O'\omega$, $O'A$, $O'B$, $O'M'$ trebuie să fie egale, ceea ce se scrie $(O \cdot \omega\, ABM) = (O' \cdot \omega ABM')$ de unde rezultă că $(\omega\, ABM) = (\omega ABM')$ şi deci $M \equiv M'$; toate perechile de raze omoloage se întîlnesc deci pe dreapta AB, determinată de două perechi.

Exemple. I. *Se dă o dreaptă (Δ) şi două puncte O, O' exterioare dreptei. Dacă M este un punct variabil pe (Δ), atunci OM, $O'M$ sînt razele a două fascicole omografice.*

În adevăr, luînd patru poziţii oarecare M_1, M_2, M_3, M_4 a lui M, avem $(O \cdot M_1M_2M_3M_4) = (O' \cdot M_1M_2M_3M_4)$ şi fasciculele sînt omografice. Fie ω intersecţia lui OO' cu (Δ); cînd M vine în ω cele două raze OM, $O'M$ coincid cu OO'.

II. *Pe un cerc dat (Γ) se iau două puncte fixe O, O' (fig. 20) şi un punct variabil M. Fasciculele care au ca raze OM, $O'M$ sînt omografice,* căci unei raze OM îi corespunde o singură rază $O'M$ şi reciproc, iar construcţia se face numai

cu drepte și cu cercul dat. Cînd M vine în O, OM devine tangenta (T) în O la cerc, iar $O'M$ devine OO'; în mod asemănător cînd M vine în O', OM devine OO' iar $O'M$ tangenta (T') în O' la cerc. Așadar, moloagele dreptei OO', considerată succesiv în fiecare fascicul, sînt tangentele în O și O' la cerc.

21. *Aplicații.* a) *Fie Ox, Oy, Oz trei drepte, A și B (fig. 21) două puncte fixe pe Ox și P un punct fix din plan, nesituat pe dreptele date. O dreaptă variabilă ce trece prin P taie pe Oy și Oz respectiv în M și N. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor AM, BN.*

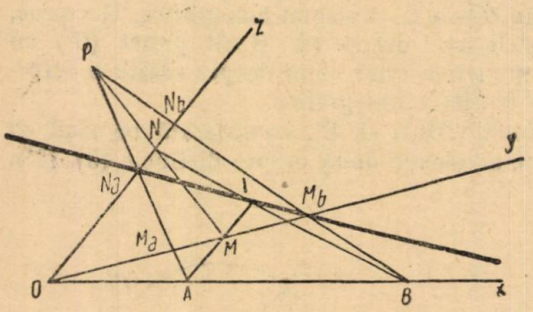


Fig. 21.

Fie M un punct oarecare pe Oy; dreapta MP taie pe Oz într-un singur punct N, deci unei drepte AM îi corespunde o singură dreaptă BN. Fasciculele cu vîrfurile în A și B avînd ca raze AM și BN sînt omografice. În plus, cînd M vine în O, N vine tot în O și razele omoloage se confundă cu dreapta AB. Locul geometric al intersecției (AM, BN) este o dreaptă. Pentru determinarea dreptei loc geometric vom considera două poziții particulare: *a)* dreapta PA taie pe Oy în M_a și pe Oz în N_a, iar cele două raze omoloage AM_a, BN_a se întîlnesc în N_a; *b)* dreapta PB taie pe Oy în M_b și pe Oz în N_b, iar razele omoloage AM_b, BN_b au pe M_b ca punct comun. Dreapta căutată este deci $M_b N_a$.

b) *Pe o dreaptă (Δ) se iau două puncte fixe A, B (fig. 22) și un punct variabil M. Pe perpendiculara în M pe (Δ) se iau segmentele constante $MP = p$, $MQ = q$. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor AP, BQ cînd M se mișcă pe dreapta (Δ),*

Să ducem prin P și Q paralelele la (Δ); acestea vor întîlni perpendicularele în A și B pe (Δ) respectiv în P_a, Q_a și P_b, Q_b. Ducem prin A o dreaptă arbitrară care taie pe $P_a P_b$ în P; perpendiculara din P pe (Δ) taie pe $Q_a Q_b$ în Q, deci unei raze AP îi corespunde o singură rază BQ; fasciculele cu vîrfurile în A și B care au aceste raze sînt omografice. În plus cînd $M \to \infty$ cele două raze omoloage AP, BQ coincid cu AB. Locul geometric al intersecției dreptelor AP, BQ este dreapta $Q_a P_b$, căci atunci cînd M vine în A și B punctele comune ale razelor omoloage sînt Q_a și P.

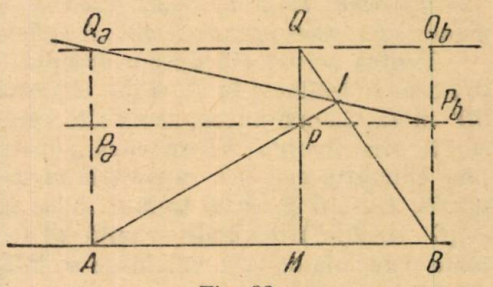


Fig. 22.

Fascicule omografice cu același vîrf

22. Relația omografică (23) poate stabili o corespondență între dreptele aceluiași fascicol (O). În acest caz mulțimea dreptelor din fascicul se transformă în ea însăși, dreptele fiind însă luate în altă ordine se spune că avem două fascicule omografice cu același vîrf. Toate proprietățile enunțate mai înainte se mențin cu observarea că cele spuse la paragraful 20 nu sînt apli-

cabile la aceste fascicule, deoarece vîrfurile O, O' nu mai sînt distincte. Dacă relaţia omografică (23) se reduce la $m = m'$, atunci avem transformarea identică.

Două fascicule cu acelaşi vîrf au două raze omoloage duble, reale şi distincte, confundate sau imaginare; se mai numesc şi dreptele *unite* ale transformării. Ele se capătă din relaţia (23) făcînd $m = m'$, deci sînt date de ecuaţia

$$Am^2 + (B + C)\, m + D = 0. \tag{24}$$

Discuţia rezultă imediat şi este asemănătoare cu aceea a punctelor duble din diviziunile omografice de aceiaşi bază.

Este evident că cele două fascicole omografice cu acelaşi vîrf determină pe o dreaptă oarecare două diviziuni omografice de aceiaşi bază, avînd ca puncte duble intersecţia dreptelor cu razele duble.

23. *Dacă un unghi de mărime constantă, orientat, se roteşte în jurul vîrfului său O (fig. 23), cele două laturi sînt razele a două fascicule omografice cu acelaşi vîrf, ale căror raze duble sînt imaginare.*

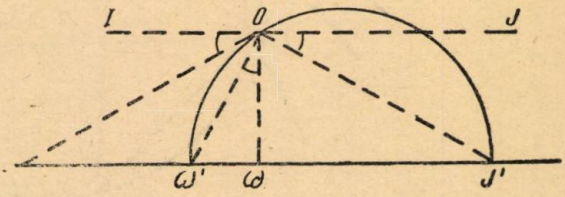


Fig. 23.

În adevăr, considerînd patru poziţii ale unei laturi şi patru poziţii corespunzătoare ale celorlalte laturi, *unghiurile coerspunzătoare ale celor două fascicule sînt egale*, şi deci ele au acelaşi raport anarmonic. Razele duble sînt evident imaginare, fiindcă unghiul care se roteşte fiind de mărime constantă, laturile nu pot coincide.

Pe orice dreaptă care nu trece prin O cele două laturi ale unghiului determină deci două diviziuni omografice de aceiaşi bază, cu puncte duble imaginare.

Reciproc, *dacă două diviziuni omografice de aceiaşi bază au punctele duble imaginare, ele pot fi considerate ca determinate de laturile unui unghi constant, care se roteşte în jurul vîrfului său fix.*

În adevăr, fie I, J' punctele limită ale diviziunilor omografice, ω mijlocul segmentului $\overline{IJ'}$ şi ω' omologul lui ω considerat în prima diviziune. Cercul cu diametrul $\omega' J'$ (fig. 23) întîlneşte perpendiculara în ω pe IJ', în punctul O. Ducem prin O paralela la IJ', anume $I'OJ$. Din cauza simetriei avem evident $\sphericalangle I'OI = \sphericalangle J'OJ$, apoi $\sphericalangle \omega' \omega = \sphericalangle J'OJ$ ca avînd laturile perpendiculare. Prin urmare, un unghi constant egal cu unghiurile precedente şi care se roteşte în jurul lui O va determina pe dreapta IJ' două diviziuni omografice, care coincid cu cele date prin enunţ deoarece au trei perechi de puncte omoloage comune: (I', I), (ω', ω) şi (J', J) sau cum se mai obişnuieşte să se scrie (∞, I), (ω', ω) şi (J', ∞).

24. *Construcţia razelor duble a două fascicule omografice cu acelaşi vîrf, cînd se cunosc trei perechi de raze omoloage.*

Presupunem problema rezolvată şi ducem un cerc arbitrar prin O (fig. 24) care taie cele trei perechi de raze omoloage (a, a'), (b, b'), (c, c') respectiv în (A, A'), (B, B'), (C, C') şi razele duble în P şi Q. Avem $(O.PQAB) = (O \cdot PQA'B')$, apoi $(O \cdot PQAB) = (A' \cdot PQAB)$ deoarece cele două fascicole au unghiurile respectiv egale. În mod asemănător $(O \cdot PQA'B') = (A \cdot PQA'B')$. Din aceste trei egalităţi se deduce că $(A \cdot PQA'B') = (A'.\ PQAB)$, însă cele două

fascicule au raza comună AA', deci perechile de drepte $(AP, A'P)$, $(AQ, A'Q)$, $(AB', A'B)$ se taie în trei puncte coliniare, adică notînd cu H intersecția $(AB', A'B)$, punctul H se află pe dreapta PQ. La fel se demonstrează că $K \equiv (AC', A'C)$ și $L \equiv (BC', B'C)$ se află pe PQ.

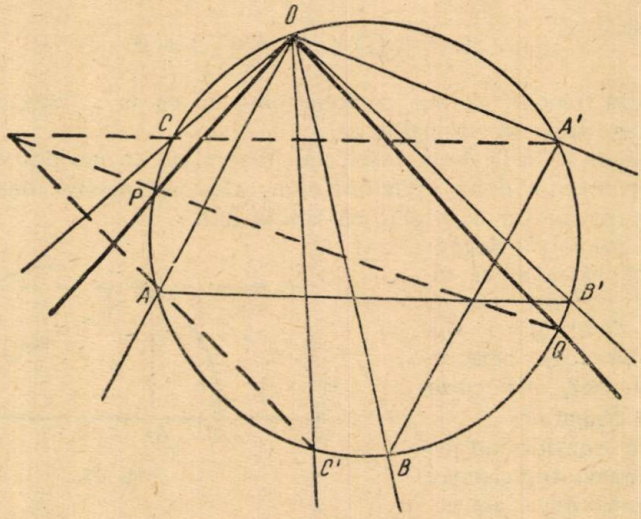


Fig. 24

De aci construcția: se duce un cerc arbitrar prin O, care taie cele trei perechi de raze omoloage respectiv în (A, A'), (B,B'), (C,C'). Se construesc intersecțiile $H \equiv (AB', A'B)$, $K \equiv (AC', A'C)$; dreapta HK taie cercul în P și Q, iar OP, OQ s nt razele duble. Dacă HK este tangentă la cerc, razele duble sînt confundate, iar dacă nu taie cercul, razele duble sînt imaginare.

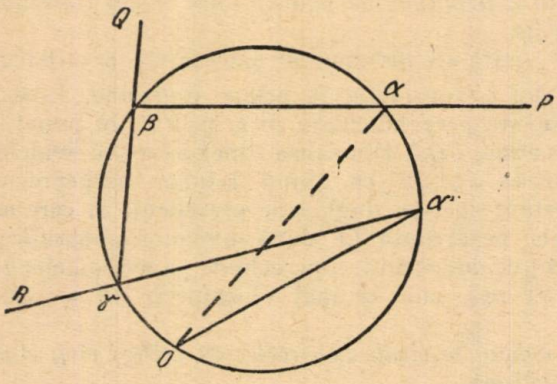


Fig. 25

Observare. Construcția poate servi la determinarea punctelor duble a două diviziuni omografice de aceiași bază. În adevăr, luînd un punct arbitrar O și unind cu trei perechi de puncte omoloage, se capătă razele a două fascicule cu același vîrf. Se construesc razele duble care taie dreapta de bază a celor două diviziuni în punctele duble.

Aplicație. Să se înscrie într-un cerc un triunghi ABC știind că laturile sale trec prin trei puncte fixe P, Q, R (fig. 25).

Luăm un punct α la întîmplare pe cerc; dreapta $P\alpha$ mai taie cercul într-un singur punct β. Ducem dreapta $Q\beta$, care mai taie cercul într-un singur punct γ, iar $R\gamma$ taie din nou cercul într-un singur punct α'. Deci la un punct α pe cerc corespunde un singur punct α' și reciproc. Dacă se ia un punct O arbitrar pe

cerc, atunci $O\alpha$, $O\alpha'$ sînt razele omoloage a două fascicule omografice cu același vîrf. Deoarece în general α' nu coincide cu α (dacă acest lucru se întîmplă de la prima încercare atunci triunghiul $\alpha\beta\gamma$ satisface condițiile și este chiar ABC), atunci se caută razele duble ale celor două fascicule cu vîrful O și acestea ne dau punctul A; PA taie cercul din nou în B, QB în C, iar RC în A și triunghiul este ABC. Deoarece sînt două raze duble rezultă că mai există o soluție $A_1B_1C_1$, corespunzătoare celorlalte raze duble.

NUMĂRUL «*e*» ÎN NATURĂ

E. TOTH

Conferențiar la Universitatea C. I. Parhon, București

Finanțe. Messer Corbaccio, cămătarul zgîrcit, i-a împrumutat lui Volpone un sechin de aur pe timp de un an cu o dobîndă de 100 %. Peste un an Volpone i-a restituit lui Corbaccio, doi sechini în locul celui împrumutat.

Dar pofta vine mîncînd! La următoarea ocazie, cînd Messer Volpone i-a cerut împrumut un sechin cămătarului Corbaccio, acesta i-a răspuns: «dragul meu Volpone, eu îți împrumut și mai departe banii, cu dragă inimă, cu aceiași dobîndă de 100 %. Dar cred că n-ai vrea să mă păgubești. Tu vei învîrti în afaceri acest sechin tot anul și nu o singură dată. În mîinile tale acest sechin va da naștere în fiecare clipă, altor sechini al căror număr se va ridica pînă la sfîrșitul anului la mai multe zeci de sechini. Ar fi nedrept să nu primesc ceea ce mi se cuvine de pe urma afacerilor tale. Dacă ți-ași cere peste o lună suma împrumutată tu ar trebui să-mi plătești ca dobîndă $\frac{1}{12}$ sechini și n-ai mai avea capitalul necesar pentru afaceri tot restul anului. Eu îți las banii, dar după o lună mi se vor cuveni $\frac{1}{12}$ sechini pe care te rog să-i adaugi la primul sechin. În acest moment tu vei învîrti în afaceri de fapt, $1+\frac{1}{12}$ sechini de-ai mei și este firesc ca dobînda ce mi se cuvine pentru luna viitoare să fie calculată după capitalul de $1+\frac{1}{12}$ sechini pe care îi am la tine. Această dobîndă este într-o lună de $\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)$. Voi avea deci la tine, $\left(1+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)$, adică $\left(1+\frac{1}{12}\right)^2$ sechini la sfîrșitul lunii a doua. La sfîrșitul lunii a treia va trebui să adaugi la această sumă, dobînda scadentă raportată la acest capital, adică $\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)^2$. Voi avea deci la tine $\left(1+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)^2$, adică $\left(1+\frac{1}{12}\right)^3$ sechini. Mergînd așa din lună în lună, la sfîrșitul anului voi avea la tine suma de $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$ sechini. Așa este drept Messer Volpone, nu-i așa?»

Şi Messer Volpone n-avea ce face. A înghiţit în sec, a iscălit angajamentul, a luat banii şi a plecat. Peste un an a restituit lui Messer Corbaccio, suma de 2,612 sechini, care corespunde expresiei $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$. « Cam puţin », se gîndea Messer Corbaccio, şi cu ocazia următoare cerea ca dobînda să se adauge după fiecare zi. La sfîrşitul anului îi revenea deci, suma de $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ sechini, adică 2,718 sechini. « Diferenţa nu e prea mare. Ce-ar fi dacă i-aşi impune lui Messer Volpone să-mi achite şi să adauge dobînda în fiecare oră? Cît aşi putea cîştiga atunci? » Răspunsul era nemilos: abia cu 2/10.000 sechini mai mult, adică practic, cu aproape nimic. Messer Corbaccio a fost dezamăgit. Volpone a rîs cu poftă. « Nici copacii nu cresc pînă la cer, Messer Corbaccio. Poate că pofta dumitale nu cunoaşte limite, dar natura îi impune limite, vrînd, nevrînd ».

Dar care este cîştigul maxim ce se poate obţine prin acest procedeu? La cît ar creşte peste un an 1 sechin de aur dacă dobînda s-ar adăuga în mod continuu, în fiecare clipă? Dacă împărţim anul în n părţi atunci la sfîrşit suma se va ridica la

$$N=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Dacă n creşte peste orice limită, oare valoarea $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nu creşte şi ea peste orice limită? Exemplele de mai sus ne arată că atunci cînd numărul diviziunilor anului, no at cu n, a crescut de la 365 la 8760, valoarea capitalului N nu a crescut decît cu 0,0002 unităţi, deci cu două zecimi de miimi. Aceasta este desigur foarte puţin, dar de crescut tot a crescut. Se poate însă demonstra că oricît de mare ar fi numărul diviziunilor n valoarea capitalului N — la care se adaugă mereu dobînda momentană — nu poate creşte peste o anumită limită bine determinată. Euler, într-un articol celebru publicat în volumul din anul 1739 al revistei Commentarii Academiae Petropolitanae, a notat valoarea acestei limite cu litera e şi a calculat-o pînă la 23 zecimale exacte:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 028\ldots$$

Tot el a a rătat că valoarea acestui număr poate fi determinată cu exactitatea dorită, cu ajutorul seriei infinite:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Alături de numărul π, numărul e joacă rolul cel mai important în matematică. Nenumărate cercetări au fost consacrate clarificării naturii sale. Tot de numele lui Euler se leagă descoperirea legăturii dintre cele trei numere fundamentale care au dominat matematica ultimelor două secole: π, e, i:

$$e^{i\pi}=1,$$

o formulă care uneşte în sine simplitatea, eleganţa, profunzimea şi bogăţia uluitoare a conţinutului. Se ştia mai de mult că e nu poate fi un număr raţional. În 1873, Hermite a arătat că numărul e nu poate fi rădăcina nici unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi. Asemenea numere se numes transcendente. Şi numărul π este transcendent.

Aşa dar, o sumă de 1 sechin supusă la o dobîndă anuală de 100 % nu va putea da mai mult de 2,71828... chiar dacă dobînda se adaugă la capital în mod continuu.

Dacă prelungim termenul de împrumut dar menţinem aceleaşi condiţii, la sfîşitul primului an am avea un capital în valoare de e, şi împărţind pe cel de-al doilea an din nou în n intervale egale, după primul interval $\frac{1}{n}$ vom avea suma de $e + \frac{e}{n} = e\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Raţionamentul se reproduce analog ca pentru primul an. După două intervale de $\frac{1}{n}$ vom avea suma: $e\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{e}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ ş.a.m.d. După al n-lea interval vom avea suma de $e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dacă n creşte din nou peste orice valoare atunci $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tinde către e, aşadar, după doi ani capitalul de 1 sechin va creşte la e^2. În mod asemănător se poate arăta că după t ani capitalul de valoarea 1 va creşte la suma de e.

Problemele vieţii financiare din secolul al XVI-lea şi al XVII-lea au dus la problema de mai sus. Ea a fost formulată din punct de vedere matematic, pentru prima oară de Jakob Bernoulli, în numărul din mai 1690 al revistei Acta Eruditorum. El pune problema cu totul general. Dacă a este capitalul şi b dobînda anuală, atunci peste un an valoarea sumei datorate va fi identică cu suma seriei infinite:

$$a + b + \frac{b^2}{1 \cdot 2a} + \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3a^2} + \ldots$$

Bernoulli nu dă însă, nici o demonstraţie. Seria sa, precum ne putem convinge uşor, este identică cu $a \cdot e^{b/a}$.

Numărul e a răsărit în viaţa financiară ca numărul care domină tranzacţiile de credit.

Populaţie. Dar numărul e a apărut şi în alte fenomene. El domină şi procesul de creştere al oricărei populaţii.

Să studiem de exemplu, cum creşte o cultură de celule. Să presupunem că la momentul t_0 numărul celulelor este de $N(t_0)$, iar la momentul t sînt $N(t)$ celule. Să notăm intervalul de timp dintre t' şi t'' cu $t'' - t' = \Delta t$. Numărul celulelor va creşte de la $N' = N(t')$ la $N'' = N(t'')$. Să notăm numărul celulelor excedentare cu $N'' - N' = \Delta N$. În mod evident creşterea ΔN este o funcţie a timpului, ea însăşi creşte cu timpul. Deci: $\Delta N = \Delta N(t)$. Dacă în intervalul de timp Δt numărul celulelor creşte cu ΔN atunci în unitatea de timp numărul celulelor va creşte cu $\frac{\Delta N}{\Delta t}$. Ei bine, din însăşi natura biologică a populaţiei celulare rezultă că numărul celulelor excedentare este proporţional cu numărul celulelor din momentul dat. Aşa dar: $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N(t)$, unde λ este un factor de proporţionalitate care depinde de natura populaţiei şi nu poate fi determinat decît prin măsurări directe. E clar că $\lambda > 0$ dacă populaţia creşte, $\lambda < 0$ dacă populaţia descreşte. Ne putem convinge acum uşor că numărul e este ascuns

şi în interiorul relaţiei $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda\ N(t)$. Pentru aceasta să împărţim intervalul de timp dintre t_0 şi t în n părţi egale, şi să notăm $\frac{t - t_0}{n} = \Delta t$. Să notăm mai departe cu $N_0 = N(t_0)$, $N_1 = N(t_1), \ldots, N_h = N(t_h) \ldots$ şi în fine $N = N(t_n)$ unde $t_n \equiv t$. Să notăm mai departe, $N_1 - N_0 = \Delta_0 N$, respectiv $N_2 - N_1 = \Delta_1 N$, etc. $N_{k+1} - N_k = \Delta_k N$. În virtutea relaţiei de mai sus putem scrie, atunci:

$$\frac{\Delta_0 N}{\Delta t} = \lambda N_0,$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N_1,$$

. . . . . .

$$\frac{\Delta_h N}{\Delta t} = \lambda N_h,$$

. . . . . .

În mod evident:

$$N_1 = N_0 + \Delta_0 N = N_0 + \lambda N_0 \Delta t = N_0(1 + \lambda \Delta t),$$

$$N_2 = N_1 + \Delta_1 N = N_1 + \lambda N_1 \Delta t = N_0 (1 + \lambda\ \Delta t)^2,$$

. . . . . .

$$N_{h+1} = N_h + \Delta_h N = N_h + \lambda N_h \Delta t = N_0 (1 + \lambda \Delta t)^{h+1},$$

. . . . . .

$$N = N_{n-1} + \Delta_{n-1}\ N = N_0 (1 + \lambda \Delta t)^n.$$

Dacă punem acum $t_0 = 0$ atunci $\Delta t = \frac{t}{n}$ şi $N = N_0 \left(1 + \lambda\, t \cdot \frac{1}{n}\right)^n$. Se vede imediat că dacă $\lambda = 1$ şi $t = 1$, atunci $N = N_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ceea ce, dacă n creşte peste orice limită, tinde către $N_0 e$. Se poate arăta, că dacă λ şi t iau valori oarecari, atunci $N = N_0 e^{+\lambda t}$.

Radioactivitate. Dacă în locul celulelor avem atomi radioactivi, atunci « populaţia » atomilor va descreşte cu timpul deoarece în fiecare secundă explodează un număr determinat de atomi transformîndu-se în atomi ai unui alt element. Creşterea va fi deci în acest caz, negativă. Dacă la momentul t_0 au fost N_0 atomi, atunci peste t secunde vor fi $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

În cazul substanţelor radioactive factorul de proporţionalitate joacă un rol foarte important.

Din relaţia $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda\ N(t)$ scoatem valoarea absolută a lui $\lambda = \left| \frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta t} \right|$. Dacă punem $t = 1$s atunci $\lambda = \left| \frac{\Delta N}{N} \right|$. Valoarea lui λ este caracteristică pentru substanţa respectivă. Valoarea ei se stabileşte pe calea măsurării. Astfel, încă Rutherford şi Geiger au măsurat că într-un gram de radiu 226 explo-

dează în fiecare secundă $3{,}7 \cdot 10^{10}$ atomi. Aşa dar $\frac{\Delta N}{\Delta t} = 3{,}7 \cdot 10^{10}$. Pe de altă parte un gram de radiu conţine $N = 2{,}7 \cdot 10^{21}$ atomi, de unde $\lambda = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10}}{2{,}7 \cdot 10^{21}} = 1{,}37 \cdot 10^{-11}\,s^{-1}$.

Continuu — discontinuu. Aş vrea să atrag atenţia asupra unei controverse remarcabile. Relaţia $N = N_0 e^{-\lambda t}$ a fost obţinută pe baza condiţiei că λ este un număr constant, pentru orice valoare a lui N şi ΔN. În mod special am presupus că atunci cînd Δt descreşte peste orice limită şi tinde către zero, va tinde către zero şi ΔN; am presupus aşa dar, că N variază continuu. Aceasta însă nu corespunde realităţii. Dacă N şi Δt sînt suficient de mari, ca în cazul citat al radiului, atunci λ are într-adevăr valoare constantă. Dacă însă, numărul atomilor N este mic atunci numărul atomilor care explodează într-o secundă va fi cu totul neregulat. Într-o secundă poate nu va exploda nici un atom, în cealaltă secundă cîteva sute, apoi unu-doi, etc. Raportul $\frac{\Delta N}{N}$ nu va fi deci constant ci va varia cu timpul în mod cu totul neregulat, la voia întîmplării. Acelaşi lucru se poate spune şi în cazul cînd N este suficient de mare, însă intervalul de timp Δt este mic. În mod evident însă, nici ΔN şi deci nici Δt nu pot descreşte peste orice limită. De exemplu, ΔN nu poate fi mai mic decît 1, adică N nu poate descreşte cu mai puţin de 1 atom şi aceasta atrage după sine, fireşte, şi o limitare în descreşterea intervalului Δt.

Controversa semnalată aparţine — nu este greu de văzut — opoziţiei dintre continuu şi discontinuu. Fenomenul dezintegrării radioactive este un fenomen discontinuu, numărul e a fost definit bazîndu-se pe continuitate. Numărul e domină şi procesul dezintegrării radioactive, dar numai dacă numărul atomilor şi intervalul de timp considerat la care raportăm fenomenul dezintegrării sînt amîndouă suficient de mari. Cît de mari anume? Atît de mari încît λ să rămînă constant.

«e» caracteristica creşterii organice. Numărul e apare în mod analog şi în multe alte fenomene naturale. Astfel, intensitatea luminii care străbate un strat gros de sticlă, presiunea atmosferii cu înălţimea scad amîndouă după o lege în care numărul e joacă rolul central. Numărul e are o semnificaţie fizică la fel de plastică ca şi numărul π. Numărul π apare pretutindeni unde avem de a face cu fenomene periodice. Ei bine, numărul e apare pretutindeni unde avem a face cu un fenomen de creştere sau descreştere organică caracterizată prin aceea că incrementul este totdeauna proporţional cu valoarea momentană a variabilei.

PLANETA MARTE

Prof. univ. CĂLIN POPOVICI

DACĂ în frumoasele nopţi de vară, contemplînd cerul înstelat, îndreptam ochii spre răsărit, privirea noastră era atrasă de un astru cu o lumină calmă şi roşiatică, întrecînd în strălucire toate stelele cerului. Astrul acesta este planeta Marte, cea mai interesantă planetă a sistemului nostru solar, singura planetă — în afară de Pămînt — care ar putea fi locuită. Strălucirea mare a planetei se datoreşte apropierii ei excepţionale de Pămînt. În acest an, la 7

septembrie planeta a trecut la o distanţă de 57 milioane kilometri de noi, distanţă la care ea n-a mai trecut decît în anii 1939, 1924, 1909 etc., adică o dată la 15 — 17 ani. Apropierea planetei Marte, sau conform terminologiei astronomice, « marea opoziţie » a lui Marte, a fost cel mai însemnat fenomen astronomic al anului. Distanţa minimă a lui Marte pînă la Pămînt este totuşi de 150 ori mai mare decît aceea a Lunii. Sute şi mii de lunete şi telescoape echipate cu cele mai diverse şi mai perfecţionate aparate auxiliare sînt îndreptate lunile acestea către planeta Marte, în speranţa de a rezolva marea controversă a lumii astronomice: este sau nu locuită planeta Marte?

Cel mai mare instrument actual, pus în funcţie în anul 1948, telescopul de 5 m deschidere, lucrînd în condiţii atmosferice ideale nici o dată încă atinse, ar putea să ne arate detalii pe suprafaţa planetei de 5 — 6 km diametru. Aceasta ar corespunde la o apropiere a planetei de 3000 de ori. De fapt cu instrumentele folosite pînă de curînd, în cele mai bune condiţii atmosferice realizabile, s-au putut vedea pe Marte doar detalii avînd 50—60 km mărime. Se înţelege aşa dar, că nu ne putem aştepta să vedem pe Marte fiinţe, chiar dacă ele ar exista.

La sfîrşitul veacului trecut, mulţi astronomi au susţinut că planeta Marte este locuită, plecînd de la asemănarea care există între Marte şi Pămînt, singurele probe concrete pe care le aduceau fiind schimbările sezoniere ale formei şi culorii petelor întunecate de pe suprafaţa planetei. Diametrul planetei Marte este jumătate din acel al Pămîntului, ziua pe suprafaţa ei fiind numai cu 41 min mai lungă decît cea terestră. Înclinarea axei de rotaţie a lui Marte pe planul orbitei este aproape egală cu cea a Pămîntului pe planul orbitei sale, aşa încît anul marţian, de 687 zile, este împărţit în anotimpuri analoge celor terestre. Depărtarea lui Marte de Soare este o dată şi jumătate cît aceea a Pămîntului. Datorită marii turtiri a orbitei sale, Marte nu revine la « opoziţie » (opusă Soarelui pe bolta cerească) la aceeaşi distanţă de Pămînt, ceea ce explică « opoziţiile » favorabile şi defavorabile.

Trei sferturi din suprafaţa planetei are o culoare roşiatică asemănătoare aceleia a nisipurilor de deşerturi; de aceea încă primii observatori le-au identificat cu întinse pustiuri. Regiunile mai întunecate au fost denumite « mări »; această denumire convenţională s-a păstrat şi mai tîrziu, deşi s-a demonstrat că pe Marte nu există apă pe mari întinderi, adică sub formă de lacuri, mări sau oceane. Aceste regiuni întunecate prezintă, în afară de unele schimbări în ceea ce priveşte forma şi aspectul de lungă durată, şi variaţii sezoniere de culoare, în general de la albastru-verzui la brun-cafeniu. Încă acum 80 de ani, unii astronomi explicau aceste schimbări de culoare prin evoluţia cu anotimpul a unei vegetaţii, care ar acoperi acele regiuni ale planetei. Observarea unor calote polare albe, care se topesc cu venirea verii şi care au fost interpretate drept depozite de zăpadă, precum şi a unor nori a făcut să se creadă că există atmosferă şi apă abundentă pe suprafaţa planetei. La « marea opoziţie » a lui Marte din anul 1877 astronomul italian Schiaparelli a observat pe suprafaţa mai luminoasă a planetei o reţea de fîşii înguste, care se întinde pe o suprafaţă de mii de kilometri, legînd regiunile mai întunecate ale suprafeţii planetei şi întretăindu-se în puncte difuze, de culori mai închise. Fîşiile îşi schimbau oarecum aspectul cu anotimpul, iar uneori se dedublau. Acestea sînt faimoasele « canale » şi « oaze » care ar acoperi suprafaţa planetei. « Canalele » erau considerate de unii astronomi de la începutul secolului trecut, drept probe ale unei civilizaţii înaintate, ele fiind construcţii inginereşti menite să aducă apă de la poli în regiunile aride ale planetei. Multe discuţii aprinse

şi contradictorii au fost purtate în jurul existenţei şi semnificaţiei acestor «canale», discuţii care au creat în jurul planetei Marte un nimb de mister. Unii scriitori au exploatat din plin acest subiect fantastic, povestind întîmplări imaginare despre marţieni şi chiar despre invazia lor pe Pămînt. Astfel, în loc să răspîndească ştiinţa în mase ei au provocat numeroase confuzii şi au pus într-o lumină de basm diferitele probleme în legătură cu planeta Marte. Observatorii de la sfîrşitul secolului trecut şi începutul secolului nostru îşi bazau toate deducţiile pe observarea directă cu luneta a suprafeţei planetei, fără a utiliza o tehnică ştiinţifică mai perfecţionată. Această metodă uşoară de observare a determinat pe numeroşi amatori să se ocupe de Marte, făcînd zeci de mii de desene în credinţa că aceasta este suficient pentru a rezolva probleme ştiinţifice atît de grele. De-abia după marea opoziţie din 1909, şi în special după aceea din 1924 s-au introdus metode mai riguroase de lucru, cărora le datorăm cunoştinţele actuale asupra condiţiilor fizice de pe Marte.

Astfel, la opoziţia din 1909, veteranul cercetărilor despre Marte astronomul rus G. A. Tihov, actualmente membru corespondent al Academiei de ştiinţe din U.R.S.S., a realizat printre primii fotografii ale lui Marte. Folosind diferite filtre colorate el a pus în evidenţă atmosfera planetei şi a reuşit să obţină astfel şi primele fotografii ale unor canale. La opoziţia din 1924 şi mai tîrziu, s-a examinat spectroscopic, cu o tehnică mult perfecţionată, lumina care vine de la Marte, spre a se deduce compoziţia chimică a atmosferei acestei planete. Folosind termocuple foarte sensibile ale căror indicaţii ating o precizie de milionime de grad, observatorii au măsurat intensitatea radiaţiilor de pe suprafaţa planetei spre a-i deduce temperatura. Ulterior au fost elaborate metode de măsurare a puterii de reflexie a diferitelor regiuni ale planetei, de diferite culori şi sub diferite unghiuri de incidenţă a luminii. Electropolarimetre foarte sensibile au fost utilizate spre a se măsura gradul de polarizare a luminii care vine de la diferitele regiuni ale lui Marte.

Cît de migăloase sînt aceste lucrări se poate deduce din faptul că în focarul celui mai puternic instrument de observare existent, în cele mai favorabile condiţii, imaginea lui Marte este abia de 2 mm! Pe această mică imagine astronomul trebuie să separe diferite regiuni: zăpezi polare, «mări», deşerturi etc, spre a le măsura temperatura, a le obţine spectrul, etc. Datele de observaţie astfel culese au fost prelucrate prin metodele fizicii teoretice actuale. Rezultatul final a fost o imagine a condiţiilor fizice pe Marte care a decepţionat pe mulţi susţinători ai ipotezei că pe planeta vecină există o viaţă superioară.

Astfel, la suprafaţa lui Marte atmosfera este tot atît de rară ca aceea a Pămîntului la o înălţime de 18—20 km înălţime, presiunea ei fiind de 11 ori mai mică decît aceea a atmosferei terestre. Prin cele mai exacte metode spectroscopice nu s-a putut constata existenţa oxigenului în atmosfera planetei. Chiar dacă s-ar confirma existenţa acestui gaz, el trebuie să se găsească într-o cantitate mai mică decît 1 la mie din cantitatea de oxigen din atmosfera Pămîntului. Nu s-au putut pune în evidenţă nici vapori de apă, deşi în cantitate mică ar trebui să existe datorită prezenţei zăpezilor polare. Acestea din urmă sînt mai mult nişte brume, putînd atinge o grosime de cel mult cîţiva centimetri. Ele se transformă direct în vapori la sosirea verii polare. În atmosfera lui Marte s-a pus în evidenţă bioxidul de carbon, aproape de două ori mai abundent decît pe Pămînt. Astfel, atmosfera lui Marte este formată din azot 98%, bioxid de carbon 1,5%, argon 0,5% şi din impurităţi; uscăciunea ei depăşeşte mult pe aceea a celor mai aride deşerturi de pe Pămînt. În această atmosferă plutesc

uneori nori de praf la înălțimea de 2—3 km, apoi o ceață violetă, de la 5 pînă la 20 km, iar mai sus rari nori albaștri. Compoziția exactă a ceței violete și a norilor albaștri nu se cunoaște.

Temperatura medie pe Marte este cu vreo 30—40° sub cea medie de pe Pămînt. Este adevărat că în regiunile tropicale ale planetei, puțin după prînz temperatura se poate ridica pînă la +20° în regiunile luminoase și chiar pînă la +30° în cele mai întunecate, însă în cursul nopții, din cauza răririi atmosferei, ea scade pînă la —45°. La poli în timpul nopții polare temperatura scade sub —100°. Se constată astfel variații diurne de temperatură de circa 60°, anuale de 100—120° la poli și ceva mai mici la ecuator.

O curiozitate a lui Marte este faptul că, deși solul se poate încălzi pînă la temperaturi destul de mari, atmosfera din imediata lui vecinătate este foarte rece, cu vreo 30° mai rece decît solul. Acest fapt va trebui luat în considerare de viitorii astronauți, care la debarcare pe Marte vor trebui să poarte costume speciale.

În rezumat, clima pe Marte ar fi aceea pe care ar avea-o un ipotetic deșert polar stratosferic, pe la 18 — 20 km de Pămînt, care ar avea o temperatură mai joasă cu vreo 30—40°, într-o atmosferă fără oxigen și cu o cantitate de vapori de apă extrem de redusă. Iată imaginea dezolantă a condițiilor de viață pe această planetă.

Ce s-a constatat prin cercetările științifice riguroase ale petelor întunecate de pe Marte? Sînt ele regiuni de vegetație, oarecum asemănătoare cu unele forme inferioare de viață vegetală terestră?

Examinate cu spectroscopul regiunile întunecate nu prezintă caracterele celor mai multe vegetale de pe Pămînt. În spectrul de reflexie nu se vede în roșu banda de absorbție a clorofilei, nici puternica iluminare în infraroșu, caracteristică plantelor terestre. Este meritul lui G. A. Tihov, creatorul astrobiologiei și astrobotanicii, de a fi arătat că și pe Pămînt caracterele spectrelor de reflexie ale vegetației se schimbă cu condițiile climatice și că în condiții de climă aspră, de exemplu ca în Podișul Pamir sau în regiunile polare, aceste caractere spectrale se aseamănă întrucîtva cu acele ale regiunilor întunecoase de pe Marte.

Astronomul american G. Kuiper, care s-a ocupat mult de caracterele spectrale ale regiunilor întunecate de pe Marte, a arătat că lichenii tereștri seamănă din punctul acesta de vedere cu «mările» marțiene. După părerea sa, lichenii tereștri, transplantați pe Marte, ar putea supraviețui; ei trăiesc la temperaturi foarte joase — media anuală sub 0° — suportînd și —50°, produc foarte puțin oxigen, care s-ar risipi în spațiul marțian, iar culoarea lor este asemănătoare cu aceea a regiunilor întunecate. Cercetările polarimetrice ale lui A. Dollfus, astronom francez care a continuat lucrările lui B. Lyot, au arătat însă că din acest punct de vedere — polarimetric — există o deosebire între lichenii obișnuiți și «mările» marțiene, care s-ar asemăna și spectroscopic și polarimetric mai mult cu niște licheni granuloși microscopici, numiți clamydomonas. Academicianul sovietic V. G. Fesenkov, rezumînd cercetările făcute în acest domeniu, în special în U.R.S.S., a arătat că regiunile întunecate nu se aseamănă în ce privește radiația și reflexia luminii cu vegetațiile terestre. G. A. Tihov a accentuat că însești vegetațiile terestre au caractere variabile și că plantele, în tendința de a se adapta, își pot modifica considerabil caracterele spectrale și de reflexie. El a arătat dificultățile unor observații făcute la limita puterii aparatelor actuale. Disputa nu este încă încheiată și nu se poate da o interpretare unitară a tuturor observațiilor prin reflexie, radiație, pola-

rimetrice şi spectroscopice ale regiunilor întunecate de pe Marte, prin analogie cu unele forme de viaţă vegetală sau cu aspectele terestre. Tocmai în această direcţie se va încerca o lămurire cu ocazia « marii opoziţii » din acest an, folosindu-se aparate multe mai perfecţionate.

Supoziţiile unor observatori, în legătură cu existenţa unei vieţi vegetale pe Marte, deduse din schimbarea aspectului şi culorii regiunilor întunecate, nu sînt conclusive. Ele s-ar putea datora unor fenomene pur fizice, după cum este oxidarea pe Pămînt, fenomene care s-ar explica prin prezenţa urmelor de apă lăsate prin topirea gheţurilor polare. Însăşi schimbarea culorii, după părerea celor mai mulţi astronomi, se face pe Marte de la brun-cafeniu la albastru-verzui, nu invers, ca pe Pămînt. Prin examinarea amănunţită a schimbărilor sezoniere care se produc pe suprafaţa planetei, în special a unei unde de întunecare care apare primăvara în jurul calotei polare şi se propagă apoi spre ecuator cu o viteză de 45 km pe zi, se va lămuri poate, dacă aceste schimbări pot fi interpretate numai drept fenomene fizice. Ce este această undă de întunecare? Este o undă a dezvoltării vieţii vegetale pe Marte? Ce sînt acele « canale »? Falii în scoarţa planetei sau înşiruiri mai mult sau mai puţin regulate ale unor mici pete? Ce legătură este între dezvoltarea « canalelor » şi succesiunea anotimpurilor pe Marte? Care este compoziţia exactă a ceţei şi a norilor marţieni? Opresc ei complet ucigătoarele raze ultraviolete? Toate aceste întrebări nu au încă un răspuns precis.

Fig. 1,—Marte observat la Observatorul popular Bucureşti

Schimbările pe suprafaţa planetei pot fi un indiciu de viaţă şi de aceea observarea lor este una din sarcinile principale ale cercetătorilor.

La opoziţia mai puţin favorabilă a lui Marte, în anul 1954, astronomul american E. Slipher, examinînd cele 20 mii de fotografii făcute cu acea ocazie, a declarat că are proba existenţii vieţii pe Marte. El a observat apariţia unei pete întunecoase care nu exista înainte şi care s-ar datora dezvoltării vieţii vegetale.

Astronomul Öpik de la Dublin a adus acum patru ani un argument plauzibil în favoarea susţinătorilor existenţei vieţii vegetale pe Marte. Norii de praf acoperă numai vremelnic regiunile întunecate. Aceste regiuni pot reapare, după cum plantele din deşerturile terestre se pot degaja de nisipurile care le acoperă.

Cu toate discuţiile contradictorii, cu toate mărturiile incontestabile ale aparatelor, care arată condiţiile vitrege de pe Marte, mulţi astronomi susţin că pe suprafaţa acestei planete ar exista urmele unei vieţi vegetale în declin, adaptate la acele condiţii aspre. Apropierea lui Marte va aduce o lămurire a acestor probleme, care au nu numai o importanţă astronomică, dar şi una filozofică, aceea de a constitui proba existenţii încă a unei planete locuite.

S-a creat un comitet internaţional pe lîngă Uniunea Astronomică Internaţională, care se ocupă cu îndrumarea cercetărilor în această direcţie. Există

şi comitete naţionale, de exemplu comitetul sovietic, condus de cunoscutul cercetător al planetei Marte, astronomul N. P. Barabaşev din Harkov. Într-o circulară trimisă la mai multe Observatoare, printre care şi Observatorului nostru, el a dat indicaţii asupra obervaţiilor vizuale, fotografice, radiometrice şi spectrofotometrice de executat. În U.R.S.S. cercetările continuă în mai toate observatoarele, în frunte fiind Observatoarele de la Pulkovo, Abastumani, Alma-Ata, Harkov, Taşkent, Kiev, etc. Marile observatoare sovietice sînt echipate cu aparatură modernă de o deosebită precizie.

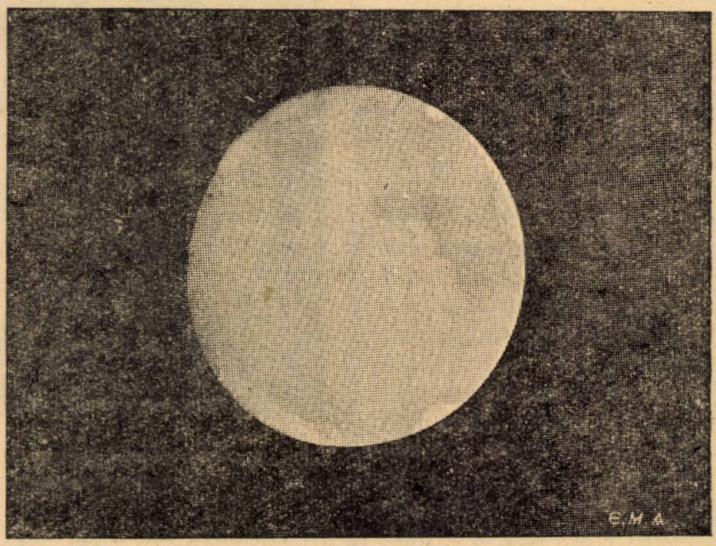


Fig. 2.—Desenul planetei Marte cu o lunetă de 0.83 m deschidere

Observatoare de înălţime, special utilate pentru observaţii complexe planetare, cu mari instrumente şi avînd condiţii excepţionale de vizibilitate, de exemplu Observatorul Lowell de la Flagstaff — Arizona, aflat la o altitudine de 2200 m, sau acela de la Pic du Midi din Pirinei, la 2720 m, ambele cu lunete avînd o deschidere de 60 cm, vor fi printre primele în aceste cercetări, în care s-au specializat de multă vreme. Observatorul de la Palomar, cu cel mai mare telescop din lume, avînd o deschidere de 5 m, are în programul său încă de la construire, problema marţiană. Contribuţia sa la lămurirea problemei canalelor marţiene va fi poate decisivă. Observatoarele din sud vor avea o poziţie mai convenabilă, deoarece Marte se va vedea din ele mai sus deasupra orizontului decît din observatoarele de la nord.

Cercetarea ştiinţifică a cerului poartă un caracter internaţional; în cadrul U.A.I. toţi oamenii de ştiinţă colaborează, spre a lămuri probleme care privesc concepţia ştiinţifică despre lume şi universul întreg, în care planeta noastră este doar un bob de nisip. În sînul U.A.I. ,al cărei preşedinte este directorul Observatorului din Paris A. Danjon, iar vice-preşedinte, cunoscutul astronom sovietic B. V. Kukarkin, colaborarea internaţională a adus roade mai fructuoase decît în toate uniunile internaţionale. Din acest mare colectiv ştiinţific facem parte şi noi. Contribuţia Observatorului din Bucureşti, care observă planeta Marte cu instrumente mai modeste şi în condiţii mai puţin favorabile, cît şi a

amatorilor astronomi din țară și din străinătate care vor lucra cu lunete mici, este bine venită. Ei ar putea surprinde pe Marte detalii fugitive care ar scăpa, din cauza vremii nefavorabile, altor observatori, dotați cu instrumente mai bune.

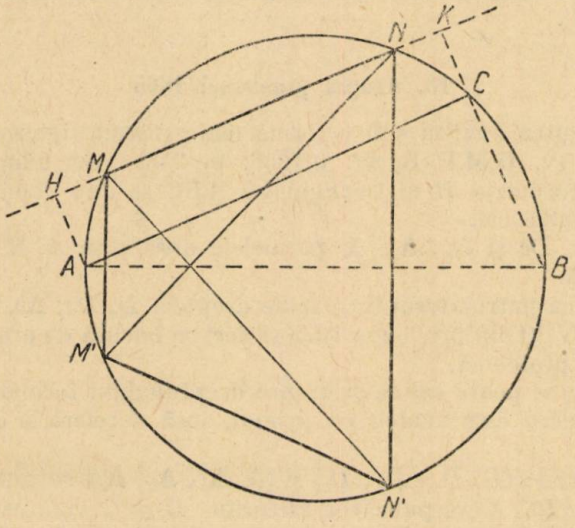
Lămurirea marilor probleme revine însă cercetătorilor care prin aparatură și condiții de observare sînt în măsură să le considere la nivelul celei mai înalte tehnici actuale de observație. Așteptăm cu nerăbdare rezultatele științifice ale «anului Marte» 1956, care ar putea lămuri atîtea controverse pasionante.

NOTE MATEMATICE

15. Asupra problemei 1509

1. Pentru problema 1509 s-au dat două soluții publicate în nr. 1, p. 30, și nr. 2. p. 94, din G.M.F.-B, anul 1956.

Ne vom referi la notațiile și figura din G.M.F.-B nr, 2, p. 95. Fie N' simetricul lui N față de diametrul AB. Figura $MM'N'N$ este un trapez isoscel înscris în cercul de diametru AB. Diametrul AB este perpendicular pe laturile paralele ale



Fig, 1

trapezului. $M'N$ și MN' sînt diagonalele sale. Așa cum rezultă din însăși enunțul problemei 1509, proiecția diametrului AB pe MN (una din laturile neparalele ale trapezului isoscel $MM'N'N$) este egală cu $M'N$ (diagonala trapezului $MM'N'N$). Se poate deci enunța următoarea proprietate:

Diametrul cercului circumscris unui trapez isoscel perpendicular pe laturile paralele ale acestuia, are ca proiecție pe laturile neparalele cîte un segment egal cu una din diagonalele trapezului.

2. Dacă una din bazele trapezului $N'N$ se deplasează paralel pînă se suprapune cu cealaltă bază $M'M$, punctele M și N se confundă, iar dreapta MN devine tangentă la cerc în punctul M. Diagonala $M'N$ se suprapune peste $M'M$.

Examinînd noua figură deducem proprietatea: *proiecția unui diametru AB al cercului O pe tangenta dusă dintr-un punct M al cercului este egală cu lungimea coardei dusă prin M perpendicular pe diametrul AB.*

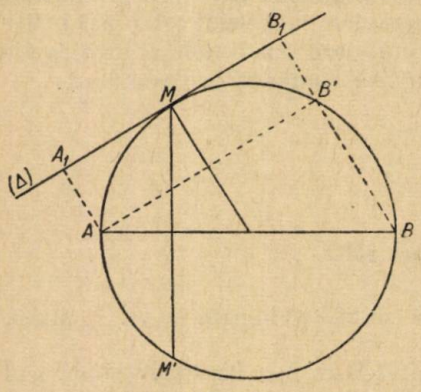


Fig. 2

Dăm şi o demonstraţie directă a acestei proprietăţi. Fie AB un diametru al cercului O, Δ tangenta dusă într-un punct M al acestui cerc; A_1 şi B_1 proiecţiile lui A şi B pe Δ; MM' coarda dusă prin M perpendicular pe AB şi în fine, B' punctul de intersecţie al proiectantei BB' cu cercul O. Unghiul $AB'B$ este drept fiind înscris într-un semicerc. AB' este deci paralelă cu Δ şi egală cu A_1B_1. Coarda AB' este însă egală cu MM', deoarece sînt coarde ce subîntind arcele $M'AM$ şi AMB' egale între ele. Se vede că arcul AM este egal şi cu arcul AM' şi cu arcul MB', dat fiind că raza OA este perpendiculară pe MM' prin construcţie, iar raza OM este perpendiculară pe tangenta Δ şi deci şi pe AB' paralelă la Δ. Rezultă deci, că $A_1B_1 = MM'$.

16. Asupra problemei 1805

1. Spre a putea analiza sub o formă mai generală figura ce face obiectul problemei 1805 (v. G.M.F.-B, nr. 6/1956, p. 318) vom adopta următoarele notaţii: prin ortocentrul H al triunghiului ABC se duc două drepte D şi Δ perpendiculare între ele.

Fie Da, Db, Dc şi Δ_a, Δ_b, Δ_c paralelele duse prin A, B, C respectiv la dreptele D şi Δ.

Se observă că patrulaterul format de dreptele D, Da, Δb, Δc este de fapt dreptunghiul $MNPQ$ din problema 1805 şi deci se bucură de proprietăţile enunţate în această problemă.

Acelaş lucru se poate spune şi despre dreptunghiul format de dreptele Δ, Δ_a, Δ_b, Δ_c deoarece este analog cu primul, însă se referă la dreapta Δ în loc de dreapta D.

Dreptunghiurile (D, D_a, D_b, D_c) şi $(\Delta, \Delta_a, \Delta_b, \Delta_c)$ corespund vîrfului A al triunghiului ABC. Corespunzător vîrfurilor B şi C vom avea perechile de dreptunghiuri: $(D, D_a, \Delta_a, \Delta_c)$, $(\Delta, \Delta_b, D_a, D_c)$ şi $(D, D_c, \Delta_a, \Delta_b)$, $(\Delta, \Delta_c, D_a, D_b)$.

Fie O_a, O'_a, O_b, O'_b, O_c şi O'_c centrele celor şase cercuri circumscrise dreptunghiurilor de mai sus; A_h, B_h, C_h mijloacele segmentelor AH, BH, CH şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC.

2. S-a arătat în problema 1805 la punctul 3, că centrul cercului circumscris dreptunghiului $(D, D_a, \Delta_b, \Delta_c)$ se găseşte pe cercul lui Euler al triunghiului ABC, fiind la întretăierea dreptelor duse prin A_h şi A_1 paralel respectiv la drepta D şi la dreapta Δ.

Centrul cercului O'_a va fi şi el la intersecţia dreptelor duse tot prin A_h şi A_1 însă paralel respectiv la dreapta Δ şi la dreapta D. Punctele O_a şi O'_a sînt deci celelalte două vîrfuri ale dreptunghiului ce se formează ducînd prin A_h şi A_1 paralele la dreptele D şi Δ. Dat fiind că A_h şi A_1 sînt diametral opuse în cercul

lui Euler, rezultă că şi O_a şi O'_a se vor găsi situate pe acest cerc şi aşezate diametral opus unul faţă de celălalt.

3. Prin fiecare din punctele A', B', C', picioarele înălţimilor triunghiului ABC, trec cîte 4 diagonale a 4 dintre dreptunghiurile de mai sus. Astfel, aşa cum se vede din problema 1805, prin B' şi C' trec cîte două din diagonalele celor două dreptunghiuri $(D, D_a, \Delta_b, \Delta_c)$ şi $(\Delta, \Delta_a, D_b, D_c)$ ce corespund vîrfului

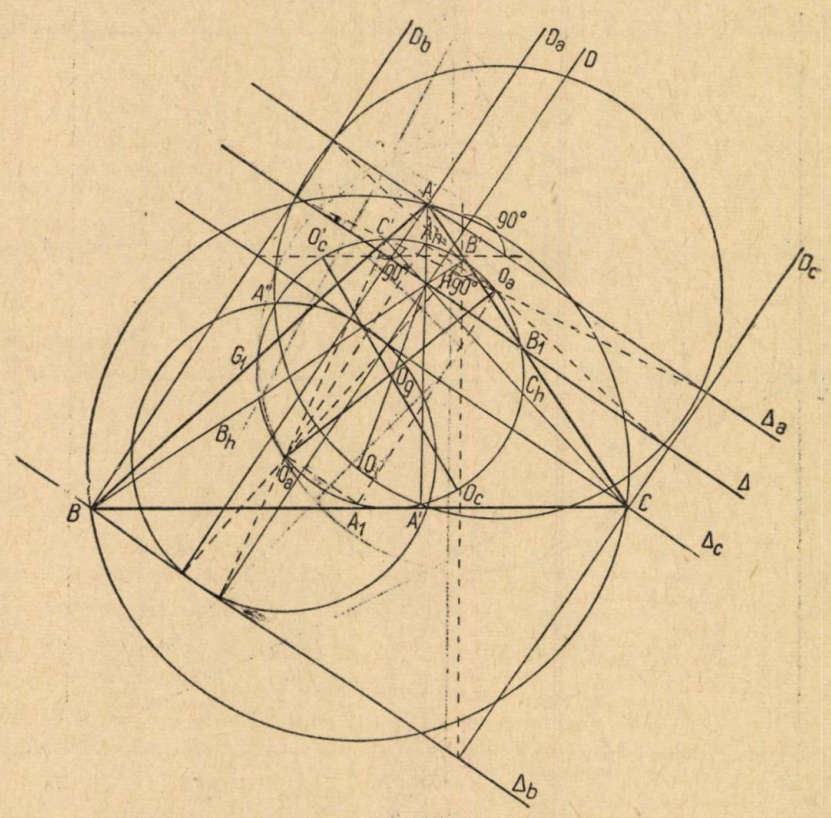
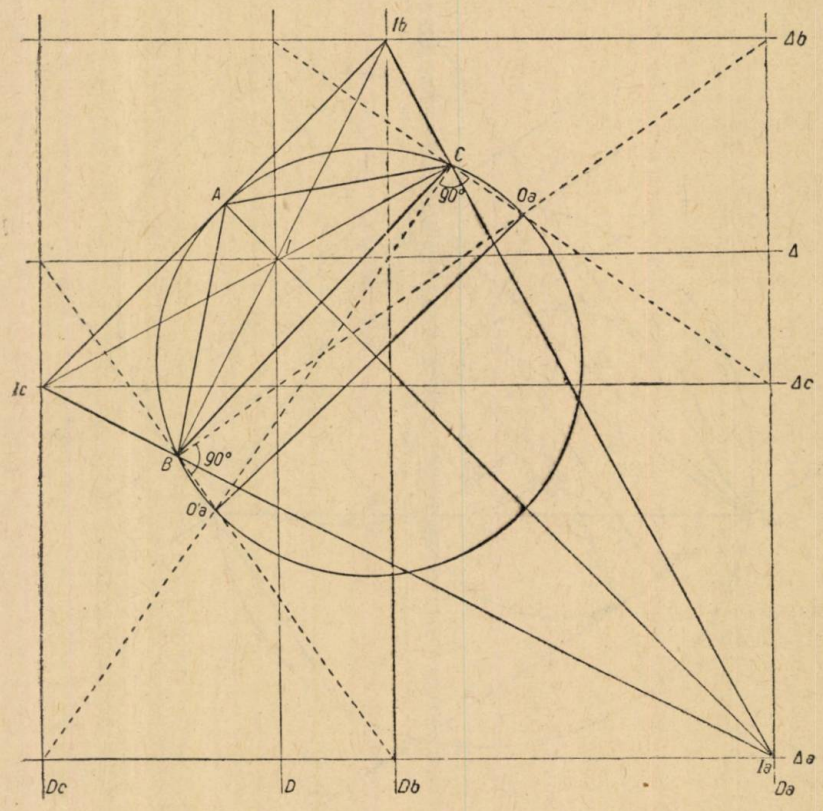


Fig. 1

A. Aceste perechi de diagonale se întîlnesc cîte două în B' şi C' şi sînt perpendiculare între ele, deoarece cum s-a arătat mai sus, centrele O_a şi O'_a ale cercurilor circumscrise dreptunghiurilor corespunzătoare, sînt aşezate diametral opus pe cercul lui Euler al triunghiului ABC. Figura formată de cele 4 diagonale este deci un patrulater înscris în cercul lui Euler, avînd ca vîrfuri punctele O_a, O'_a, B' şi C' din care O_a şi O'_a sînt diametral opuse şi deci unghiurile din B' şi C' sînt drepte. Tot prin B' trec şi două din diagonalele dreptunghiurilor ce corespund vîrfului C. Ele sînt deasemenea perpendiculare întrucît cele 4 diagonale ale acestor dreptunghiuri formează de asemenea un patrulater înscris în cercul lui Euler şi avînd ca vîrfuri punctele B', A' şi O_c şi O'_c din care O_c şi O'_c sînt diametral opuse şi deci vîrfurile din B' şi C' sînt unghiuri drepte.

Rezultă deci, că prin fiecare din vîrfurile A', B' şi C' ale triunghiului ortic trec cîte patru diagonale ale celor şase dreptunghiuri formate ca mai sus. Diagonalele sînt două cîte două perpendiculare între ele.

4. La punctul 2 din problema 1805, se arată că cercul O_a trece prin A'. Rezultă că şi analogul său O'_a va trece prin A'. Cercurile O_a şi O'_a determină un fascicul de cercuri secante în A' şi în simetricul acestuia faţă de $O_a\,O'_a$, adică un punct A'' situat pe cercul lui Euler, deoarece $O_a\,O'_a$ este diametru în acest cerc. Rezultă că cercul lui Euler aparţine şi el fasciculului determinat de cercurile O_a şi O'_a. Deasemenea el aparţine şi fasciculelor determinate de cercurile O_b, O'_b, şi



Fig, 2

O_c, O'_c. Baza fasciculului determinat de cercurile O_a şi O'_a trece permanent prin O_g centrul cercului lui Euler. Axul radical al fasciculului de cercuri trece permanent prin A'. Rezultă că locul punctului I_1, intersecţia axei radicale a fasciculului cu baza sa, va fi cercul descris pe $O_g\,A'$ ca diametru.

Perechile de drepte perpendiculare ce trec prin A', respectiv $(A'O_c, A'O'_c)$, $(A'O_b, A'O'_b)$ precum şi înălţimea AA' şi latura BC, determină pe $O_a\,O'_a$ puncte ce aparţin involuţiei determinată pe această dreaptă de fasciculul de cercuri O_a şi O'_a.

5. Ţinînd seamă că faţă de triunghiul ortic, ortocentrul este centrul cercului înscris, vîrfurile A, B, C sînt centrele cercurilor exînscrise, iar cercul lui Euler este cercul circumscris, putem enunţa proprietăţile de mai sus sub forma:

Fie D şi Δ două drepte perpendiculare ce trec prin I, centrul cercului înscris triunghiului ABC iar D_a, D_b, D_c şi Δ_a, Δ_b, Δ_c paralele duse prin centrele cercurilor exînscrise I_a, I_b, I_c respectiv la D şi Δ.

Dacă O_a şi O'_a sînt centrele cercurilor circumscrise dreptunghiurilor formate de dreptele $(D, D_a, \Delta_b, \Delta_c)$ şi $(\Delta, \Delta_a, D_b, D_c)$ iar O_b, O'_b, O_c şi O'_c analogele sale, avem:

a) punctele O_a, O'_a, O_b, O'_b O_c, O'_c, se găsesc pe cercul O circumscris lui ABC;

b) O'_a, O'_b şi O'_c sînt respectiv diametral opuse centrelor O_a, O_b şi O_c;

c) Diagonalele dreptunghiurilor de centre O_a şi O'_a trec prin vîrfurile B şi C ale triunghiului ABC şi sînt perpendiculare între ele.

Deasemenea, diagonalele dreptunghiurilor de centre O_b şi O'_b trec prin C şi A iar cele ale dreptunghiurilor de centre O_c şi O'_c trec prin A şi B.

d) Cercurile O_a şi O'_a trec prin vîrful A. Ele determină un fascicul de cercuri ce se întretaie permanent în A şi într-un punct variabil A_1 situat pe cercul circumscris O. Cercul O circumscris lui ABC aparţine acestui fascicul încît şi fasciculelor determinate de cercurile O_b şi O'_b precum şi O_c şi O'_c.

Theodor Gh. Cocea

REZULTATUL ÎNTRECERII PE ŢARĂ ÎNTRE CERCURILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ ALE ŞCOLILOR MEDII PE ANUL 1956

— Regulamentul întrecerilor între cercurile de elevi, de matematică şi de fizică, din şcolile medii pe toată ţara a fost publicat în Gazeta matematică şi fizică, seria B nr. 12 din anul 1955.

— Ca şi în anul trecut, entuziasmul cu care au răspuns unităţile şcolilor medii din ţară nu a fost cel aşteptat.

Astfel, din cele peste 400 unităţi şcolare de învăţămînt mediu care au funcţionat în anul şcolar precedent, nu au participat la această întrecere decît 11 şcoli medii, cu toate că şi alte şcoli care nu au participat au avut totuşi, mulţi şi activi elevi rezolvitori de probleme.

Şcolile fruntaşe se clasifică astfel:

1. În primul loc este *Şcoala medie de băieţi nr. 1 « I. L. Caragiale » din Ploeşti*,

2. al doilea loc îl ocupă *Şcoala medie nr. 4 de băieţi « Aurel Vlaicu » din Bucureşti*,

3. în al treilea rînd se află *Şcoala medie nr. 1 din Rîmnicu Vîlcea* şi *şcoala medie nr. 1 din Giurgiu*,

4. al patrulea rînd îl ocupă *Şcoala medie nr. 1 din Oraşul Stalin*.

Au mai participat la această întrecere, Şcoala medie nr. 1 din Roman, şcoala medie nr. 2 de fete din Piatra Neamţ, şcoala medie « I. Rangheţ » din Tîrgu Mureş, şcoala medie nr. 3 de fete din Tîrgu Mureş, şcoala medie nr. 2 din Iaşi şi grupul şcolar minier din Brad, şcoli care nu au putut fi menţionate.

Se mai remarcă activitatea deosebită a rezolvitorilor de probleme pe anul 1956, de la şcolile medii din localităţile: Bucureşti (s.m. 17, 20, 1, 13, 11), Focşani, Craiova, Constanţa, Arad, Bacău, Brăila, Galaţi, Lugoj, Rîmnicu Sărat, Tecuci, Tîrgovişte.

— Invităm pe această cale toate şcolile medii cu activitate mai însemnată la G.M.F. — seria B, să participe în anul 1957 la întrecerea între cercurile de matematică şi fizică 1957 pe ţară. Dăm mai jos punctajul acestor întreceri:

a) Cîte un punct de fiecare problemă trimisă de elevii şcolii, în intervalul 1 ianuarie — 1 iulie 1957 şi publicate în G.M.F.-B la rubrica rezolvitorilor;

b) Cîte 10 puncte de fiecare evidenţiere a elevilor şcolii pentru acelaş interval, 1 ianuarie — 1 iulie 1957;

c) Cîte un punct de fiecare elev participant la etapa II locală a Olimpiadei de matematică sau fizică 1957;

d) cîte 5 puncte de fiecare elev participant la etapa III a olimpiadelor 1957;

e) cîte 15 puncte de fiecare elev participant la etapa finală pe ţară;

f) cîte 25 puncte de fiecare elev reuşit la etapa finală a olimpiadelor de matematică sau de fizică;

g) cîte 30 de puncte pentru fiecare elev care obţine premiu sau menţiune pentru activitatea sa la « Gazeta matematică şi fizică » seria B pe anul 1956;

h) cîte 3 puncte pentru fiecare şedinţă a unui cerc de matematică sau de fizică din şcoală ţinută între 1 decembrie 1956 — 1 iulie 1957;

i) cîte un punct pentru fiecare elev abonat la G.M.F. — B pe anul 1957.

Participă la această întrecere şcolile care îşi trimit adeziunea prin direcţia şcolii pînă la data de 15 aprilie 1957, indicînd şi numărul de clase de învăţămînt mediu care funcţionează în şcoală în acest an şcolar.

Fişa cu punctajul obţinut de fiecare şcoală purtînd viza direcţiei şi ştampila şcolii, va fi semnată de profesorii care conduc aceste cercuri ale elevilor şi înaintată redacţiei G.M.F. — B, între 1 şi 15 iunie 1957. Ea va cuprinde totalizarea punctelor obţinute de elevii rezolvitori de probleme publicate la Rubrica rezolvitorilor din numerele 1, 2, 3, 4 şi 5 ale G.M.F. — seria B 1957.

Completarea punctajului se va face de G.M.F. — B care va cuprinde toate soluţiile bune ce s-ar mai primi pînă la data de 1 iulie 1957.

Punctajul final al întrecerii va fi obţinut prin împărţirea totalului de puncte obţinute conform aliniatelor de mai sus, la numărul de clase al şcolii.

Şcolile care vor fi distinse în această întrecere vor primi ca premii cărţi de matematică şi fizică pentru biblioteca şcolii respective, iar rezultatele se vor publica în G.M.F. — seria B.

Redacţia G.M.F. — B solicită profesorii de matematică şi de fizică din învăţămîntul mediu şi pe responsabilii de cercuri, să popularizeze această întrecere în şcolile lor şi să determine participarea activă a cercurilor respective la această acţiune.

Şcolile premiate la această întrecere vor primi din partea Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. *diplome şi premii* în cărţi de matematică şi de fizică pentru biblioteca elevilor din şcolile respective.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

GH. BAZACOV, profesor T. Severin

I. NUMERE INTERESANTE. Să considerăm numărul 28. Divizorii lui (exceptînd pe cel egal cu el însuşi) sînt: 1, 2, 4, 7, 14. Observăm uşor că dacă îi adunăm obţinem: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, adică chiar numărul considerat.

Această proprietate a numărului 28 o mai au şi alte numere, formînd mulţimea numerelor perfecte.

Definiţie. — Se zice că un număr este perfect dacă el este egal cu suma divizorilor lui, afară de el însuşi.

Mulţi matematicieni de frunte cu *Euclid*, *Descartes* şi *Fermat*, s-au ocupat de aceste numere pentru a găsi o expresie aritmetică care le-ar putea genera.

Astfel, *Euclid* a reușit să obțină expresia: $2^n(2^{n+1}-1)$ cu care a determinat cîteva numere perfecte, cu condiția însă, ca factorul $(2^{n+1}-1)$ să fie număr prim. O parte din numerele deduse de Euclid sînt:

$$6 = 2(2^2-1)$$
$$28 = 2^2(2^3-1)$$
$$496 = 2^4(2^5-1)$$
$$8128 = 2^6(2^5-1)$$
$$33550336 = 2^{12}(2^{13}-1)$$
$$8589869056 = 2^{16}(2^{17}-1)$$

Se poate demonstra că toate numerele perfecte pare sînt de forma $2^n(2^{n+1}-1)$, unde $2^{n+1}-1$ este prim.

II. MEDIA ARITMETICĂ, GEOMETRICĂ ȘI ARMONICĂ. 1° Dacă notăm cu u, v și w respectiv, media aritmetică, geometrică și armonică a două mărimi a și b, se știe că avem relațiile:

$$2u = a + b \quad ; \quad v^2 = ab \quad ; \quad \frac{2}{w} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Ele au forme diferite, dar este ușor să se arate că le putem exprima și în alt mod, care să prezinte oarecare analogie. De exemplu:

$$\frac{a-u}{u-b} = \frac{a}{a} \qquad \text{media aritmetică}$$

$$\frac{a-v}{v-b} = \frac{a}{v} \qquad \text{media geometrică}$$

$$\frac{a-w}{w-b} = \frac{a}{b} \qquad \text{media armonică.}$$

Din relația armonică $\frac{2}{w} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se obține succesiv:

$$2ab = w(a+b); \quad w = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \; ; \quad w = \frac{v^2}{u} \qquad \text{sau } v^2 = uw,$$

care exprimă legătura dintre cele trei medii ale aceleași mărimi a și b. Se poate spune deci, că media geometrică a două mărimi date este totodată și media geometrică dintre media aritmetică și armonică ale aceleași mărimi.

2°. În cazul cînd a și b sînt două segmente date, se cunosc multe procedee de a construi grafic media aritmetică, geometrică și armonică.

O cale simplă pentru construcția mediei aritmetice și armonice a segmentelor a și b se bazează pe unele relații metrice dintr-un trapez. Astfel: se

construieşte un trapez cu bazele a şi b (fig. 1) de înălţime arbitrară. Linia mijlocie MN este media aritmetică, iar linia PQ (care trece prin intersecţia diagonalelor şi paralelă cu bazele) reprezintă media armonică.

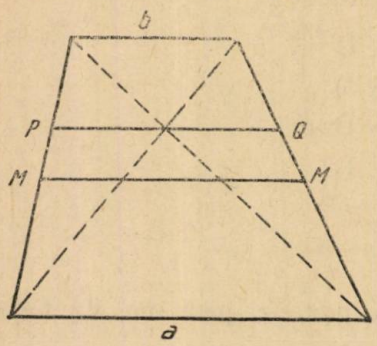


Fig. 1

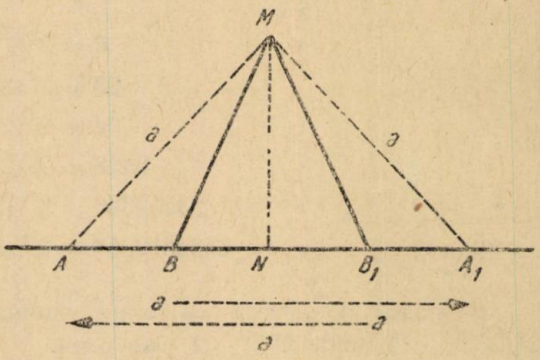


Fig. 2

În problema 1210, rezolvată în G.M.F., seria B, anul V, nr. 12, găsim un procedeu de a face o singură construcţie grafică pentru media geometrică şi armonică a două segmente date.

3°. *O construcţie grafică simplă a mediei geometrice.* — Fie a şi b $(a>b)$ cele două segmente date. Ducem o dreaptă pe care aşezăm cu compasul, segmentului mic $b = BB_1$. Luăm apoi în compas, segmentul mare a şi-l aşezăm de două ori pe dreapta noastră: odată din B spre B_1 (fig. 2), adică $BA_1 = a$, şi apoi din B_1 spre B, adică $B_1A = a$. Din A şi A_1 ca centre, şi cu aceiaşi deschizătură de compas egală cu a, ducem două arce de cerc care se interesectează în M. Media geometrică este segmentul MB sau MB_1.

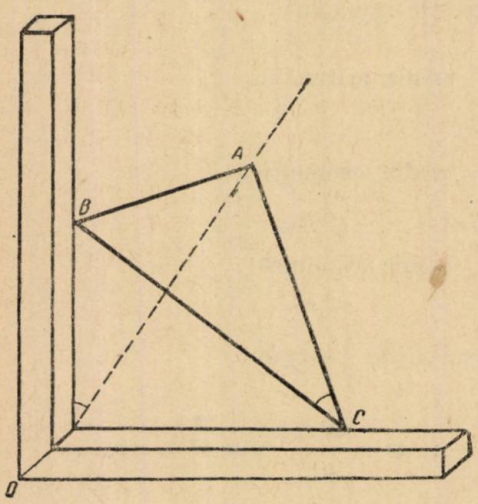


Fig. 3

Justificare. — În triunghiul AMB_1 aplicăm teorema lui Pitagora generalizată; avem:

$$MB_1^2 = AB_1^2 + MA^2 - 2 \cdot AB_1 \cdot AN$$

sau

$$v^2 = a^2 + a^2 - 2a\left(a - \frac{b}{2}\right)$$

de unde:

$$v^2 = a \cdot b.$$

Avantajul acestei construcţii constă în faptul că ea se efectuiază în cea mai mare parte numai cu compasul, lipsind construcţia grafică a paralelei sau perpendicularei.

III. O EXPERIENŢĂ MATEMATICĂ. Pe o planşetă de desen, fixăm două rigle patrate. Luăm un echer şi-l aşeazăm pe planşetă aşa fel ca vîrfurile unghiurilor ascuţite să atingă cele două rigle. Cu o mînă ţinem fixat vîrful unui creion în vîrful unghiului drept, iar cu cealaltă deplasăm echerul pe planşetă astfel ca în tot timpul mişcării vîrfurile B şi C (fig. 3) să atingă cele

două rigle. Vom constata că vîrful creionului va lăsa o dîră de forma unei linii drepte. Care este explicația?

Prin deplasarea echerului se obține o serie de patrulatere inscriptibile, fiindcă $\hat{A} + \hat{O} = 180°$. Dar se știe că la orice patrulater inscriptibil unghiul AOB = unghiul BCA și fiindcă unghiul $BCA = \hat{C} =$ const, atunci și unghiul BOA este const. Deci vîrful A trebuie să rămînă mereu pe linia AO.

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚĂ ȘI TEHNICĂ

Primul reactor atomic în R.P.R.

ÎN curînd, la Institutul de fizică al Academiei R.P.R. va intra în funcțiune primul reactor atomic montat la noi în țară. Materialele și aparatura, precum și asistența tehnică, au fost date de Uniunea Sovietică.

Acest reactor, de 2000 kW, va servi pentru cercetări de fizica neutronului, pentru producerea de izotopi radioactivi, precum și pentru formarea specialiștilor necesari în fizica nucleară. De asemenea va intra în funcțiune un accelerator de particule de tip ciclotron și fazotron, furnizat de U.R.S.S., un accelerator electrostatic și un betatron experimental de 30 MeV. Se proiectează și un accelerator liniar modern de mare energie.

Datorită ajutorului primit din partea U.R.S.S., va fi terminat în anul viitor un grup de laboratoare fierbinți, la diferite grade de radiații, unde vor fi preparați izotopii furnizați de acest reactor și de reactorii care vor fi construiți.

În țara noastră regimul democat-popular acordă o mare importanță cercetărilor în domeniul energiei atomice. Ca urmare a acestui fapt, în anul 1955 a luat ființă pe lîngă Consiliul de Miniștri, Comitetul pentru energia nucleară, care coordonează și ajută dezvoltarea cercetărilor de fizică atomică și aplicațiile practice ale energiei atomice. Tot în cadrul Academiei R.P.R. a fost creat Institutul de fizică atomică, iar celelalte institute ca: Institutul de cercetări agronomice, Institutul de energetică, Institutul de mecanică aplicată, Institutul de fiziologie normală și patologică, Institutul de chimie etc. și o serie de institute de cercetări de pe lîngă ministere, se pregătesc și se echipează în vederea dezvoltării cercetărilor cu noile mijloace de lucru oferite de energia atomică.

Diodele de germaniu.

Dintre materialele semiconductoare, materiale caracterizate prin prezentarea fenomenului de conductivitate unilaterală, cel mai reprezentativ este germaniul. Această proprietate a permis utilizarea lui pentru fabricarea diodelor.

În comparație cu diodele electronice cu vid, diodele de germaniu prezintă o serie de avantaje: dimensiuni și greutate foarte mică, ceea ce permite realizarea directă a montajelor, fără suporți sau panouri suplimentare, nu au nevoie de tensiune de încălzire (de filament), nu introduc zgomot de fond și intră în funcțiune imediat după conectare. Nu au nevoie de f.e.m. inițială și nici de curent inițial. Au o pantă mai mare a caracteristicii decît cea a diodelor electronice, deoarece rezistența lor internă este mai mică. Capacitatea dintre electrozii diodelor de germaniu este de cîteva ori mai mică decît a diodelor electronice, ceea ce lărgește mult caracteristica lor de frecvență. Durata de funcționare depășește cu mult pe cea a diodelor electronice (cca 10.000 ore).

Un inconvenient al diodelor de germaniu este marea sensibilitate la variaţiile temperaturii mediului înconjurător.

Diodele de germaniu sînt cu contact punctiform sau cu contact plat. Elementul principal îl constituie cristalul de germaniu în contact cu un ac metalic, totul găsindu-se într-un corp de sticlă sau de ceramică. Redresarea are loc la contactul germaniului cu acul metalic.

Diodele de germaniu se folosesc pentru redresarea curentului alternativ, detectarea semnalelor cu modulaţie de amplitudine şi modulaţie de frecvenţă, detectarea semnalelor video în aparatele de televiziune, pentru reglarea automată a amplificării în montajele de telemecanizare etc.

Locomotive cu gazogen.

În U.R.S.S., exploatarea locomotivelor experimentale cu gazogen a arătat că preţul de cost al transportului s-a redus de 2,2 ori faţă de preţul de cost realizat la transportul cu locomotive cu abur.

Motorul locomotivei poate funcţiona cu combustibil lichid sau cu gazogen. Locomotiva poate fi alimentată cu combustibil pentru un parcurs de 500 km. Randamentul global al locomotivei este de 14,6 . . . 15,6%.

În prezent se lucrează la îmbunătăţirea unor elemente ale locomotivei experimentale, după care se va trece la producerea lor în serie. Astfel, locomotivele cu gazogen vor putea înlocui cu succes locomotivele cu abur.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1956—1957

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează în anul şcolar 1956—1957, ca şi în anii precedenţi, « Olimpiada de matematică şi de fizică », aşa cum s-a anunţat în G.M.F. seria B, numărul precedent.

În cele ce urmează arătăm materia care trebuie pregătită pe etape şi clase. Ca îndrumar indicăm manualele unice specificînd pînă unde este cuprinsă materia respectivă. Fiecare participant trebuie să cunoască temeinic şi materia claselor precedente.

Pentru etapa II şi III nu se cer chestiunile care sînt scoase din programă prin instrucţiunile Ministerului Învăţămîntului.

Pentru o mai bună pregătire, sfătuim pe participanţi ca pe lîngă manualele unice şi culegerile de probleme, să consulte şi alte cărţi sau culegeri de probleme privind materia cerută, precum şi G.M.F. seria B, unde se găsesc şi problemele date la Olimpiadele din anii precedenţi.

Etapa I, organizată pe şcoli, are loc pentru matematică şi fizică între 20 noiembrie şi 15 decembrie 1956. Subiectele vor fi elaborate de şcoli.

Pentru etapele următoare, materia se repartizează astfel:

MATEMATICĂ

Etapa II locală (în Bucureşti pe raioane) va avea loc pentru matematică la 17 februarie 1957

Clasa VIII-a. — Algebra pînă la ecuaţia de gradul I.
— Geometria pînă la cerc.

Clasa IX-a. — Algebra pînă la logaritmi (manual pg. 128).
— Geometria pînă la ariile poligoanelor (manual pg. 93).
— Trigonometria pînă la cap. IV (manual pg. 60).

Clasa X-a şi şcoli tehnice. — Algebra pînă la divizibilitatea polinoamelor (manual pg. 195),
— Geometria în spaţiu pînă la sferă (manual pg. 86).
— Trigonometria pînă la cap. X (manual pg. 98).

Anul I şcoli tehnice de maiştri. — Operaţii cu expresii algebrice, cu fracţii algebrice. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută. Sisteme de ecuaţii de gradul I. Probleme de gr. I. — Inegalităţi. Proprietăţi. Rezolvarea inecuaţiilor de gr. I cu o necunoscută. — Puteri. Puterea unui produs, a unei fracţii, a unei puteri, a unui monom şi binom. — Radicali. Extragerea rădăcinii dintr-un produs, fracţie sau putere. Proprietăţi fundamentale ale radicalilor; aducerea la acelaşi indice. Operaţii cu radicali. Raţionalizarea numitorului.
— Geometria plană conform manualului de matematici elementare pentru şcolile medii tehnice ale Ministerului Învăţămîntului.

— Anul I şcoli profesionale. — Aritmetica. Operaţii cu numere aritmetice. Rapoarte şi proporţii.
— Algebră. Operaţiile cu numere şi expresii algebrice. Ecuaţii de gr. I. sisteme de ecuaţii de gr. I cu mai multe necunoscute. Probleme.
— Geometria plană conform manualului de matematici, vol. II, al Ministerului Învăţămîntului D.G.R.M. (fosta Direcţie generală a rezervelor de muncă), pînă la « Relaţii metrice în triunghi şi cerc » inclusiv.

Anul II şcoli pedagogice. — Aritmetica pînă la fracţii zecimale (manual pg. 232).
— Algebra pînă la progresii (manualul de algebră pentru cl. VIII, pg. 92).
— Geometria plană toată (manualele cl. VII, VIII, IX).

Anii III şi IV şcoli pedagogice. — Aritmetica pînă la mărimi proporţionale (manual pg. 313).
— Geometria în spaţiu (manual cl. X).

Etapa III regională — 31 Martie 1957

Clasa VIII-a. — Algebra pînă la ecuaţii de gradul II.
— Geometria pînă la locuri geometrice.

Clasa IX-a. — Algebra pînă la ecuaţii exponenţiale (manual pg. 156).
— Geometria plană toată şi geometria în spaţiu pînă la unghiuri diedre (manual pg. 33).
— Trigonometria pînă la table de logaritmi (manual pg. 70).

Clasa X şi şcoli tehnice. — Algebra pînă la ecuaţii nedeterminate (manual pg. 200).
— Geometria în spaţiu toată.
— Trigonometria toată.

Anul I şcoli tehnice de maiştri. — Algebra. Ecuaţii de gr. II cu o necunoscută, cu coeficienţi numerici şi literali.

Proprietăţile rădăcinilor ecuaţiei de gr. II. Formarea ecuaţiilor de gr. II cînd se cunosc rădăcinile. Discuţia rădăcinilor ecuaţiei de gr. II. Probleme de gr. II cu o necunoscută. Ecuaţii rezolvabile prin descompunerea în factori. Ecuaţii bipatrate. Ecuaţii iraţionale. Sisteme de ecuaţii de gradul II cu 2 necunoscute. Metoda eliminării prin substituţie. Artificii de calcul. Probleme de gr. II cu 2 necunoscute. — Funcţii de gr. I şi II. Reprezentarea grafică. Metoda

grafică de rezolvare a unui sistem de 2 ecuaţii de gr. I şi II cu 2 necunoscute.

— Geometria în spaţiu conform manualului de matematici elementare pentru şcolile medii tehnice.

— **Anul I şcoli profesionale.** — Algebra. Ecuaţii de gr. II şi sisteme simple de ecuaţii de gr. II.

— Trigonometrie. Noţiuni despre liniile trigonometrice.

— Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.

— **Anul II şcoli pedagogice.** — Aritmetica: probleme recapitulative.

— Algebra: probleme recapitulative.

— Geometria în spaţiu pînă la poliedre (manual cl. IX, pg. 54).

Anul III şi IV şcoli pedagogice. — Aritmetica: probleme recapitulative.

— Geometria în spaţiu: probleme recapitulative.

Etapa IV — 29 Aprilie—2 Mai 1957 în Bucureşti

Clasele VIII, IX, X şi şcolile medii tehnice. — Toată materia din manualele clasei respective, inclusiv materia neprevăzută în programa analitică la care se adaugă cele de mai jos:

Clasa VIII-a. Algebra: Raţionalizarea numitorilor care cuprind şi radicali de ordin superior şi transformarea expresiilor de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

— Geometria: Puncte remarcabile ale triunghiului: ortocentru, centrul cercului circumscris, centrele cercurilor exînscrise, centrul de greutate, centrul celor 9 puncte. Dreapta lui Simson.

Clasa IX-a. Aritmetica: Operaţii aritmetice. Divizori. Numere prime. Cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun. Fracţii ordinare, fracţii zecimale, fracţii periodice, aflarea fracţiei generatoare. Rădăcina patrată. Rapoarte. Proporţii. Regula de trei simplă şi compusă. Amestecuri. Numărul divizorilor unui număr.

Geometria: Relaţia lui Stewart; puterea punctului faţă de un cerc; axa radicală a două cercuri; centrul radical a trei cercuri; construcţia axei radicale. Teorema lui Ptolomeu pentru patrulatere inscriptibile. Omotetia. Teoremele lui Menelaus şi Ceva.

— Trigonometria: Expresiile razelor cercurilor înscrise şi exînscrise unui triunghi. Aria unui patrulater în funcţie de diagonale şi unghiul lor.

Clasa X şi şcoli tehnice. Algebra: Suma puterilor asemenea ale termenilor unei progresii aritmetice. Cel mai mare divizor comun a două polinoame. Relaţii între rădăcini şi coeficienţi la ecuaţiile de gr. III şi IV. Calculul rădăcinilor întregi şi fracţionare ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi numerici reali. Ecuaţii binome şi trinome (rezolvarea algebrică şi cu ajutorul numerelor complexe). Ecuaţii reciproce.

— Geometrie: Elemente de geometria tetraedrului. Sfera înscrisă şi circumscrisă unui tetraedru. Puterea unui punct faţă de o sferă. Plan radical a două sfere, ax radical a trei sfere, centru radical a patru sfere.

— Trigonometrie: aplicaţii la statică.

— **Anul I şcoli tehnice de maiştri.** Algebră: Progresii aritmetice şi geometrice. Formule pentru aflarea unui termen oarecare şi a sumei termenilor. Media aritmetică, media ponderată. Progresii geometrice infinit descrescătoare.

Trigonometria: Funcţii trigonometrice ale unghiurilor de orice mărime. Periodicitatea funcţiilor trigonometrice. Formule de reducere. Funcţii trigonometrice ale sumei şi diferenţei a 2 unghiuri precum şi ale dublului şi jumătăţii unui unghi. Elemente de calcul diferenţial. Teoria limitelor. Derivata

unei puteri întregi pozitive, a unei sume, a unui produs, a unei fracţii. Funcţie de funcţie şi derivata ei. Derivatele funcţiilor trigonometrice directe şi inverse. Derivata logaritmului şi a funcţiei exponenţiale. Derivata unei puteri oarecare.

Anul I şcoli profesionale. Aplicaţii tehnice în legătură cu materia prevăzută la celelalte etape.

Anul II şcoli pedagogice. Aritmetică: toată materia din manualele de cl. IX.

Anul III şi IV şcoli pedagogice. Aritmetica: toată materia şi problemele recapitulative.

— Geometria în spaţiu: toată materia din manualul cl. X.

FIZICĂ

Etapa II locală (în Bucureşti, raională) — 24 februarie 1957

Clasa VIII-a. Cinematica şi dinamica pînă la energia mecanică.

Clasa IX-a. Mişcarea de rotaţie, legea atracţiei universale (manual clasa VIII); Căldura, pînă la cap. « Schimbarea stării de agregare a materiei » (manual cl. IX, pg. 107).

Clasa X şi şcoli tehnice. Oscilaţii şi unde. Electricitate statică. Legile curentului electric pînă la Inducţia electromagnetică (manual cl. X, pg. 217).

Şcoli profesionale. Mecanică, Căldura şi aplicaţiile tehnice pînă la Electricitate şi Electrotehnică, cap. IV din programa şcolară: « Fizica tehnică » a Ministerului Învăţămîntului 1955.

Etapa III. Regională — 31 martie 1957

Clasa VIII-a pînă la Statică.

Clasa IX-a pînă la lucrul mecanic al gazelor şi vaporilor (manual cl. IX, pg. 140).

Clasa X şi şcoli tehnice. Electricitatea pînă la Optica (manual cl. X, pg. 315).

Şcoli profesionale. Se adaugă cap. IV: Electricitatea şi electrotehnica pînă la cap. V. Optica din programa şcolară: « Fizica tehnică » a Ministerului Învăţămîntului 1955.

Etapa IV pe ţară — 29 aprilie — 2 mai 1957 la Bucureşti

Toată materia prevăzută în programa analitică.

Se adaugă lucrările practice de laborator pe care le vor efecuta elevii admişi la etapa finală (pe ţară).

Clasa VIII-a. Măsurători de lungime, grosime, diametre, timp, forţe, masă şi greutate.

Grafice: Întocmirea şi citirea graficelor. Studiul legilor mişcării uniform variate. Determinarea coeficientului de frecare. Utilizarea mecanismelor simple: pîrghii, scripeţi, plan înclinat.

Clasa IX-a. Determinarea greutăţii specifice a unui corp solid cu balanţa hidrostatică şi cu picnometrul. Determinarea greutăţii specifice a unui corp lichid cu balanţa hidrostatică cu picnometrul şi areometrul. Determinări de călduri specifice cu calorimetrul. Determinarea temperaturii unui corp prin

metoda calorimetrică. Verificarea legii lui Boyle-Mariotte. Determinarea randamentului unei maşini termice simple. Determinarea căldurii latente de vaporizare a apei. Determinarea umidităţii relative.

Clasa X şi şcoli tehnice. Determinarea acceleraţiei gravitaţiei cu ajutorul pendulului. Verificarea legii Joule-Lenz. Măsurarea unei rezistenţe electrice cu punctea Wheatstone. Determinarea distanţelor focale la oglinzi şi lentile. Determinarea indicelui de refracţie (metoda acelor). Măsurarea intensităţii unui izvor luminos cu ajutorul fotometrului Bunsen.

Şcoli profesionale. Determinări de densităţi cu balanţa hidrostatică, picnometrul şi areometrul. Determinarea de temperaturi cu ajutorul calorimetrului. Măsurători electrice de intensitate şi tensiune. O instalaţie electrică cu aprindere succesivă de becuri. O instalaţie de sonerie la reţea cu transformator şi întrerupător.

Pentru lucrările executate candidatul va întocmi un referat.

Se vor da şi probleme-experienţe, adică se va pune la dispoziţia elevilor aparatura şi materialul, iar elevii vor indica ce experienţe se pot executa şi chiar vor executa experienţele cu materialul dat.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1854

Să se arate că într-un tetraedru echifacial $VABC$ pătratul înălţimii este de opt ori puterea ortocentrului unei feţe faţă de cercul ei circumscris.

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie dată de **Gh. Stoian,** Bucureşti. — Ţinînd seamă că într-un tetraedru echifacial

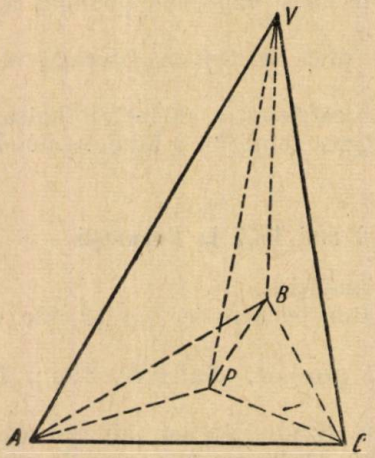


Fig. 1

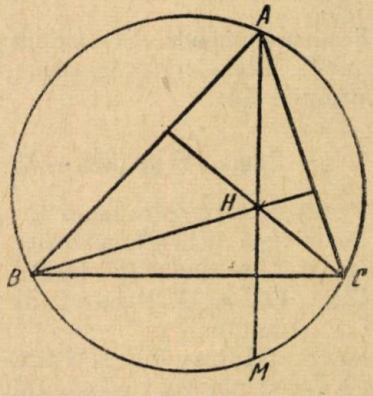


Fig. 2

cele patru feţe sînt egale şi muchiile opuse două cîte două — egale, vom avea.

$$VA = BC = a; \quad VB = CA = b; \quad VC = AB = c;$$

$$VP = h; \quad PA = x; \quad PB = y; \quad PC = z$$

(unde P este p oiecţia lui V pe planul ABC).

Din triunghiurile dreptunghice VPA, VPB, VPC deducem:

$$a^2 - x^2 = b^2 - y^2 = c^2 - z^2 = h^2. \tag{1}$$

Fie S aria uneia din feţe. În acest caz vom avea:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{4}\sqrt{2(x^2y^2 + c^2x^2 + c^2y^2) - (x^4 + y^4 + c^4)} + \\ &+\frac{1}{4}\sqrt{2(y^2z^2 + a^2y^2 + a^2z^2) - (y^4 + z^4 + a^4)} + \\ &+\frac{1}{4}\sqrt{2(z^2x^2 + b^2z^2 + b^2x^2) - (z^4 + x^4 + b^4)} = S. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Eliminînd valorile lui x^2, y^2, z^2 din (1) şi (2) obţinem:

$$h^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{S^2}$$

sau

$$h^2 = 64\ R^2 \cos A \cos B \cos C, \tag{3}$$

unde R este raza cercului circumscris uneia din feţe, iar A, B, C unghiurile acelei feţe.

Puterea ortocentrului H a feţei ABC faţă de cercul ei circumscris este dată de relaţia: $p = HA \cdot HM$. Dar $HA = 2R \cos A$ şi $HM = 4R \cos B \cos C$. Punctul M se află la intersecţia înălţimii HA cu cercul circumscris.

Deci,

$$p = 8\ R^2 \cos A \cos B \cos C. \tag{4}$$

Comparînd relaţiile (3) şi (4) obţinem $h^2 = 8p$, ceeace trebuia arătat.

Problema 1952

Un cerc O cu raza unitate se împarte în n părţi egale ($n > 4$). Să notăm punctele de diviziune cu A_1, A_2, A_3, ... A_n. Fie A_1' piciorul perpendicularei dusă din A_1 pe OA_2, A_1'' piciorul perpendicularei dusă din A_1' pe OA_3, etc. Continuînd acest procedeu indefinit, să se calculeze lungimea liniei frînte $A_1A_1'A_1''A_1''' \ldots$. Caz particular $n = 6$.

* * *

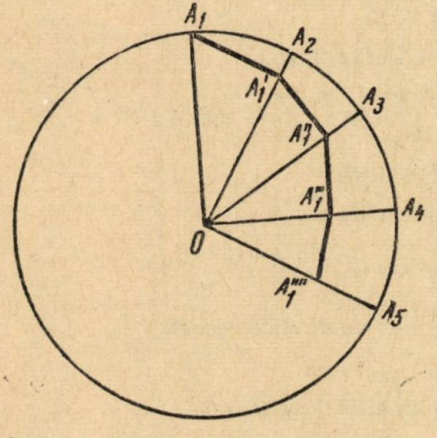


Fig. 1

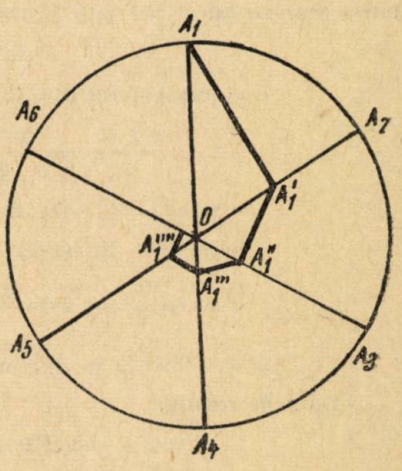


Fig. 2

Soluție dată de **Emanoil Alex.** (s.m.l. București).

$$A_1A_1' = R\sin\frac{2\pi}{n};\quad R=1,\quad A_1A_1' = \sin\frac{2\pi}{n};\quad OA_1' = \cos\frac{2\pi}{n}; \tag{1}$$

$$A_1'A_1'' = OA_1'.\sin\frac{2\pi}{n} = \sin\frac{2\pi}{n}.\cos\frac{2\pi}{n};\quad OA_1'' = OA_1'.\cos\frac{2\pi}{n};\quad OA_1'' = \cos^2\frac{2\pi}{n}; \tag{2}$$

$$A_1''A_1''' = OA_1''\sin\frac{2\pi}{n} = \sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{2\pi}{n}. \tag{3}$$

Avem:

$$S_n = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\cos^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2\pi}{n}\cos^{n-1}\frac{2\pi}{n},$$

$$S_n = \sin\frac{2\pi}{n}\left(1+\cos\frac{2\pi}{n} + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^{n-1}\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$S_n = \sin\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{\cos^{n-1}\frac{2\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}-1}{\cos\frac{2\pi}{n}-1} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}\left(\cos^n\frac{2\pi}{n}-1\right)}{\cos\frac{2\pi}{n}-1}.$$

Pentru $n = 6$, avem:

$$S_6 = \frac{63\sqrt{3}}{6}.$$

Problema 1958

Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, atunci avem relația

$$\cos^2 A - \cos^2 B - \sin^2 C + 2\sin A.\sin C.\cos B = 0.$$

* * *

Soluție. — Transformăm expresia:

$$E = \cos^2 A - \cos^2 B - \sin^2 C$$

într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

$$\sin^2 C = \sin^2(A+B),$$

$$E = (\cos A + \cos B)(\cos A - \cos B) - \sin^2(A+B) =$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2} - \sin^2(A+B) =$$

$$= \sin(A+B)\cdot\sin(B-A) - \sin^2(A+B) =$$

$$= \sin(A+B)[\sin(B-A) - \sin(A+B)] =$$

$$= \sin(A+B)\cdot 2\sin\frac{B-A-A-B}{2}\cdot\cos\frac{B-A+A+B}{2}.$$

$$E = -2\sin(A+B).\sin A.\cos B = -2\sin A.\sin C.\cos B.$$

De unde rezultă:

$$\cos^2 A - \cos^2 B - \sin^2 C + 2\sin A\sin C\cos B = 0,$$

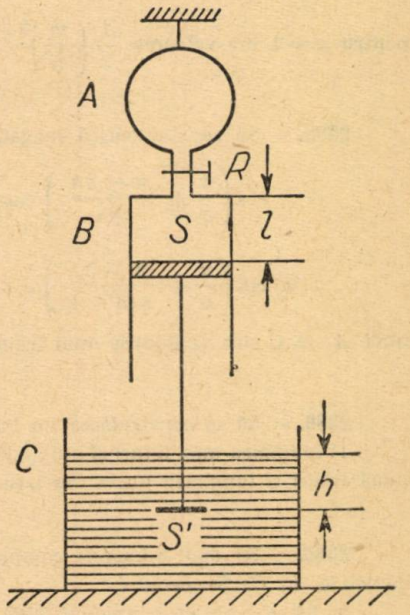
ceea ce trebuie demonstrat.

PROBLEME PROPUSE

2381. — Balonul suspendat A cu volumul $V_1 = 1$ litru conține aer sub presiunea $P = 152$ cm Hg și comunică prin robinetul R cu un cilindru B în care se află aer pe lungimea $l = 10$ cm și în care se mișcă un piston etanș de suprafață $S = 100$ cm². Tija pistonului se termină cu un disc de suprafață $S' = 50$ cm² scufundat într-un vas cu mercur C pe distanța $h = 10$ cm.

Sistemul aflîndu-se în echilibru se deschide robinetul punîndu-se în comunicație aerul din balon cu cel din cilindru.

Considerînd presiunea atmosferică $H = 76$ cm Hg $= 1$ kgf/cm², neținîndu-se seamă de frecări și neglijînd greutatea pistonului, a tijei și a discului, se cere să se afle sensul și deplasarea x a pistonului.



Fig, 1

C. Necșoiu

2382. — Avem un patrulater deformabil $ABCD$ obținut dintr-un triunghi echilateral articulat în cele trei vîrfuri și într-un punct D situat pe latura LC. Să se construiască patrulaterul $ABCD$ în cazul cînd devine inscriptibil.

Gh. Bazacov

2383. — Reluctanța unui circuit magnetic este de 5 Gb/Mx, inducția magnetică de 10 gauși, iar secțiunea miezului de 2 cm². Să se afle forța magnetomotoare a circuitului.

R. Ionescu, elev, T. Severin

2384. — Să se arate că dacă:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

avem:

$$-\sqrt{3} \leqslant x + y + z \leqslant \sqrt{3}.$$

Simon St. Petre

2385. — Se consideră două cercuri O_1 și O_2 secante în M și N. Dreapta centrelor O_1O_2 intersectează cercul O_1 în punctele P, Q și cercul O_2 în punctele R, S. Fie P' și Q' proiecțiile lui P și Q pe tangente în M la cercul O_1, iar R' și S' proiecțiile lui R și S pe tangenta în M la cercul O_2. Să se arate că diagonalele patrulaterului $P'Q'R'S'$ sînt egale.

Theodor Gh. Cocea

2386. — Să se calculeze adevărata valoare a expresiilor:

$$E_1 = \frac{\sqrt[4]{1 + \sin x} - 1}{\operatorname{tg} x}; \qquad E_2 = \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

pentru $x \to 0$.

* * *

2387. — Să se arate că expresia:

$$E = \frac{1 - 2x^m + 2x^{3m} - x^{4m}}{1 - 4x^{2n} + 2x^{3n} + 3x^{4n} - 2x^{5n}}$$

pentru $x = 1$ are valoarea $\frac{1}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^3$.

C. Ionescu-Țiu

2388. — Să se stabilească inegalitatea:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi - 3A}{3n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi - 3B}{3n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi - 3C}{3n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi - 3A}{3(n+1)}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi - 3B}{3(n+1)}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi - 3C}{3(n+1)}\right),$$

unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare, iar n este un întreg pozitiv.

C. Ionescu-Țiu

2389. — Să se construiască un triunghi cunoscînd:

1) lungimea unei laturi și lungimile a două din laturile triunghiului ortic; 2) lungimile a două laturi și lungimea uneia din laturile triunghiului ortic.

Gh. Buicliu

2390. — Se dau numerele complexe: $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 8 - 4i$ ale căror afixe sînt punctele B, C. Se cere:

1° Să se arate că triunghiul OBC este dreptunghic.

2° Să se determine relația dintre coeficienții reali ai numărului complex $z_3 = a + bi$, de afix A așa încît patrulaterul $OBAC$ să fie inscribil și în acest caz să se determine numeric a și b cînd $OA \perp BC$.

3° Să se arate că b este maxim cînd A se află pe bisectoarea cadranului I (xoy) și $OBAC$ e inscriptibil.

4° Care este modulul lui A (a, b) în funcție de unghiul $\varphi = \sphericalangle xoA$ și abscisa a, apoi de φ și rază r a cercului circumscris.

N. C. Ciomu

2391. — Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere pozitive avem:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Gh. I. Bercea, Timișoara

2392. — În triunghiul dreptunghic ABC $(A = 90°)$ se duce bisectoarea interioară CD. Din punctul B se ridică o perpendiculară pe AB astfel încît $BC = BE$. Să se demonstreze că:

$$\sphericalangle BED = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Gh. I. Stoian, student București

2393. — Se dă triunghiul oarecare ABC în care notăm: A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 respectiv mijloacele laturilor BC, CA, AB și mijloacele segmentelor AH, BH, CH în care H este ortocentrul triunghiului ABC. Să se arate că ortocentrele triunghiurilor AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 sînt colineare.

Iacob Hodircă, profesor, Breaza

2394. — Să se arate că într-un trapez oarecare $ABCD$ dreapta care unește intersecția paralelelor în C și D la laturile neparalele cu intersecția diagonalelor împarte laturile paralele AB și CD ale trapezului în părți egale.

C. Bulucea, elev, R. Vîlcea

2395. — Se dă ecuația: $x^2 - (a + b)x + ab = 0$.

Fără a rezolva ecuația, să se formeze ecuația de gradul al doilea care să admită ca rădăcini pe $y_1 = 2x_1 - x_2$ și $y = 2x_2 - x_1$.

F. Vasilescu, elev, Giurgiu

2396. — Dacă într-un patrulater convex oarecare $ABCD$ notăm cu E, F, G, H mijloacele laturilor AB, BC și respectiv CD și DA; și cu $M = (CH; AG)$, $N = (DF; BG)$; $P = (BH; DE)$ și $Q = (AF; CE)$, între laturile a, b, c, d ale patrulaterului $ABCD$ și m, n, p, q, laturile patrulaterului $MNPQ$, există relația $\frac{abcd}{mnpq} = 81$.

V. Baltag, Ploești

2397. — Să se arate că între elementele unui triunghi avem relația:

$$\frac{a^3 \sin B \sin C (B - C)}{\sin A} + \frac{b^3 \sin C \sin A \sin (C - A)}{\sin B} + \frac{c^3 \sin A \sin B \sin (A - B)}{\sin C} = 0.$$

Kiss Elemer

2398. — Un gram dintr-un gaz la temperatura de 2°C și presiunea de 190 mm Hg ocupă un volum de 4,51 litri. Care este gazul?

E. N. Stănescu, elev, Giurgiu

2399. — Proiecțiile ortogonale ale punctului de întîlnire al diagonalelor unui patrulater convex inscriptibil pe laturile sale, împarte aceste laturi în raporturi al căror produs este egal cu unitatea.

Theodor Gh. Cocea

2400. — Să se arate că $N = 550^n - 75^n - 418^n$ este divizibil prin 57, unde n este un număr întreg și pozitiv.

V. Baltag. elev, Ploești

2401. — Se dă un triunghi ABC. Prin vîrfurile lui se duc respectiv dreptele AA', BB', CC' care fac cu laturile triunghiului, AB, BC, CA, respectiv același unghi x. Să se determine x astfel ca dreptele AA', BB', CC' să fie concurente.

Simon St. Petre

2402. — O sursă de curent AB, avînd forța electromotoare de 50 V și rezistența interioară neglijabilă alimentează montajul din schemă.

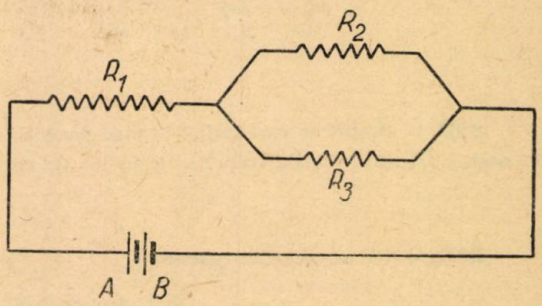


Fig. 2

a) Să se calculeze curentul în fiecare rezistență și cantitatea de căldură în kcal/oră degajată de fiecare rezistență. Se dă $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$ și $R_3 = 9\,\Omega$.

b) Să se afle prin ce rezistență R_4 ar trebui înlocuită rezistența R_2 pentru ca în rezistențele R_1 și R_3 să se dezvolte aceiași cantitate de căldură.

A. Șaichin

2403. — Știind că a este un număr întreg se cere să se determine numerele întregi x și y astfel încît numărul

$$z = \frac{ax - y}{x - ay}$$

să fie de asemenea număr întreg. Aplicație: $a = 4$.

Gh. Buicliu

CHESTIUNI DE EXAMEN

DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTE ȘI FACULTĂȚI ÎN ANUL 1956

2404. — Să se calculeze:

$$\left\{ \frac{\left[6 - \left(4 + \frac{1}{2}\right)\right] : 0{,}003}{\left[\left(3 + \frac{1}{20} - 2{,}65\right) \cdot 4\right] : \frac{1}{5}} - \frac{\left(0{,}3 - \frac{3}{20}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\left(1{,}88 + 2 + \frac{3}{25}\right) \cdot 0{,}125} \right\} :$$

$$: \left(62 + \frac{1}{20}\right) \cdot \frac{1{,}3333\ldots + 0{,}55555\ldots + 1{,}66666\ldots}{\sqrt{13 - \frac{29}{81}}}.$$

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2405. — Să se verifice identitatea:

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y}\right)^3 + 3\frac{x}{x+y}\left(\frac{y}{x+y}\right)^3 + 3\frac{y}{y+x}\left(\frac{x}{x+y}\right)^3 +$$

$$+ 6\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{x+y}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{y}{x+y}\right)^2 = 1.$$

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2406. — Prețul de cost inițial al unei piese este 60 lei. După două reduceri consecutive cu același procent prețul a scăzut la 48,60 lei. Cu cît la sută s-a făcut reducerea?

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2407. — Să se rezolve sistemul:

$$x + y + x^2 + y^2 = 32,$$

$$xy + x^2 + y^2 = 37.$$

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2408. — Să se calculeze:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\left[\frac{\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}\right):0{,}2-0{,}2}{1-\left(1+\frac{3}{4}-0.1\right)\cdot 0{,}5}-\frac{1}{72}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{2-\frac{2}{2-\frac{1}{2}}}}:\sqrt[3]{1-7\sqrt{1-\frac{63}{64}}}\right]:0{,}666666\ldots.$$

(Inst. Politehnic, Oraşul Stalin)

2409. — Să se verifice identitatea:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^3}+\frac{3}{\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{x}{y}\right)^3}+\frac{3}{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)^3}+$$

$$+\frac{6}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\left(1+\frac{x}{y}\right)^3}+\frac{6}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^3}=1.$$

(Inst. Politehnic, Oraşul Stalin)

2410. — Suma a trei numere în progresie aritmetică este 12. Dacă se adaugă fiecăruia respectiv: 1, 2, 11 se obţin 3 numere în progresie geometrică. Să se afle aceste numere.

(Inst. Politehnic, Oraşul Stalin)

2411. — Să se rezolve sistemul:

$$x^2-xy+y^2=7,$$
$$y^2-yz+z^2=3,$$
$$z^2-xz+x^2=7.$$

(Inst. Politehnic, Oraşul Stalin)

2412. — Să se rezolve ecuaţia:

$$3\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+3\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$$

(Inst. Politehnic, Oraşul Stalin)

2413. — Se dă un unghi de 60° care se roteşte în planul determinat de laturile sale în jurul vîrfului său fix A. Din punctul fix B situat la distanţa $2l$ de punctul A se coboară perpendicularele BC şi BD pe laturile acestui unghi. Se uneşte mijlocul O al segmentului AB cu punctele C şi D.

a) Să se arate că unghiurile OCD şi ODC sînt de cîte 30°.

b) Să se determine locul geometric al punctului de concurenţă al medianelor triunghiului OCD.

(Inst. Politehnic, Oraşul Stalin)

2414. — În cercul de rază a și diametrul AB se duce în B tangenta la cerc și din A dreapta ADC (punctul D fiind situat pe cerc și punctul C pe tangentă). Dreapta ADC face unghiul α cu AB. Se cere:

a) Să se calculeze aria triunghiului DBC.

b) Să se afle $\operatorname{tg}\alpha$ cînd $DC = 2a$.

c) Valoarea lui α cînd $AD = 3DC$.

d) Se unește punctul C cu centrul O al cercului. Să se calculeze în funcție de α volumul corpului rezultat din rotirea triunghiului OAC în jurul laturii AC.

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2415. — Să se rezolve ecuația:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right) = \sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

(Inst. Politehnic Orașul Stalin)

2416. — Se dau două cercuri O_1 și O_2 tangente exterioare și cu razele r_1 și r_2. Se duc două raze paralele și de aceiași direcție O_1T_1 și O_2T_2.

a) Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului T_1T_2 cînd razele O_1T_1 și O_2T_2 se rotesc în jurul centrelor cercurilor.

b) În cazul particular cînd segmentul T_1T_2 este tangent la cercurile O_1 și O_2 se duce tangenta în punctul comun A, care intersectează pe T_1T_2 în B. Să se arate că triunghiurile O_1BO_2 și T_1AT_2 sînt dreptunghice și să se calculeze AB; T_1B; T_2B în funcție de r_1 și r_2.

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2417. — Să dă triunghiul ABC. În acest triunghi se cunosc latura $BC = a$, unghiul $B = \alpha$ și unghiul $C = 90° + \alpha$. Se cere:

a) Să se calculeze în funcție de α celelalte elemente ale triunghiului.

b) Volumul și suprafața corpului obținut din rotirea acestui triunghi în jurul înălțimii coborîtă din vîrful opus al laturii cunoscute.

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI[1])

E: 885. — Înălțimea AA_1 a unui triunghi echilateral ABC intersectează cercul descris pe BC ca diametru în punctele M și N. Să se arate că proiecția segmentului MN pe una din laturile AB sau AC este egală cu înălțimea AA_1.

Theodor Gh. Cocea

E: 886. — Să se arate că:

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^3 = 5 + \sqrt[3]{324} + \sqrt[3]{486}.$$

* * *

E: 887. — Doi elevi aveau împreună suma de lei 34, dar în așa fel încît unul avea numai bancnote de 5 lei iar al doilea numai de 3 lei. După ce primul a cheltuit 3,5 lei iar al doilea 50 bani, acesta din urmă a avut de atîtea ori cîte 5 bani de cîte ori a avut primul elev cîte 3 bani.

Ce sumă a avut fiecare elev de la început în bancnote?

B. Barieră

---

[1]) V (E: 887, 892, 893, 894, 895); VI (E: 886, 888, 891, 896, 897); VII (E: 885, 889, 890. 894, 898).

E: 888. — Dacă se unesc mijloacele E, F ale laturilor AB și CA ale unui paralelogram cu vîrfurile D și B, aceste drepte vor împărți diagonala AC în trei părți egale.

* * *

E: 889. — Să se construiască un triunghi ABC dreptunghic în A, cunoscînd lungimea mediatoarei laturii AB și a medianei din A.

Viorel Grigore

E: 890. — Să se arate că:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+1} \quad \text{și} \quad \frac{\sqrt{6+\sqrt{11}}}{\sqrt{9+\sqrt{17}}}=\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{17}+1}.$$

* * *

E: 891. — Să se arate că:

$$(mn-ab)^2+(am+bn)^2-m^2n^2a^2b^2=m^2[a^2(1+n^2b^2)+n^2]+b^2(a^2+b^2).$$

Petcu Diamanta, elevă, Urlați

E: 892. — La data trecerii fostelor păduri țărănești în administrarea sfaturilor populare, cele trei cătune ale unei comune aveau: primul 80 ha de pădure și 400 ha de teren arabil, al doilea 140 ha de pădure și 560 ha de teren arabil, iar al treilea 250 ha de pădure și 450 ha de teren arabil. Pentru aprovizionarea țăranilor cu lemne sfatul popular a exploatat 1538,500 m^3 lemne. Ce cantitate de lemne vor primi fiecare cătun din aceste lemne dacă ele sînt distribuite direct proporțional cu suprafața de pădure avută și invers proporțional cu suprafața arabilă?

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 893. — Produsul a două numere este 18. Împărțind suma lor la diferența lor rezultă cîtul unu și restul 4. Să se găsească numerele.

Petru Mecea, Dej

E: 894. — Să se demonstreze că dacă dintr-un număr scădem suma cifrelor sale luate ca simple unități, numărul astfel obținut este un multiplu de 9.

I. Marin, elev, Pitești

E: 895. — Raportul dintre un număr de două cifre și suma cifrelor sale este cîtul 17 și restul 13. Să se afle acest număr.

Gh. Ancuțoiu, elev, R. Vîlcea

E: 896. — Dacă A, B, C, D sînt numere întregi care satisfac relațiile

$$A+2B+3C+4D=M\cdot 5 \quad \text{și} \quad 2A-3B+4C-5D=\mathrm{M}\cdot 7$$

să se arate că:

$$D+2C+3B+4A=M\cdot 5 \quad \text{și} \quad 2D-3C+4B-5A=\mathrm{M}\cdot 7.$$

Ion Mateescu, profesor, Giurgiu

E: 897: — Roata din față a unui car are diametrul de 0,8 m, iar cea dinapoi are diametrul de 1,2 m. Într-un drum ele au făcut împreună 6280 învîrtituri. Să se afle cîte învîrtituri a făcut fiecare din roți și care a fost lungimea drumului?

* * *

E: 898. — Să se simplifice fracția:

$$\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}.$$

* * *

OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI ŞI FIZICIENI 1957

PENTRU ELEVII CLASELOR A V-A, A VI-A ŞI A VII-A

Către participanţii la « Olimpiada Tinerilor Matematicieni şi Fizicieni » 1956—1957.

— Se socotesc *participanţi la Olimpiadă* toţi elevii de la care se primesc soluţii la majoritatea problemelor propuse pentru clasa din care fac parte.

— Problemele vor fi rezolvate *personal* de către fiecare elev participant la olimpiadă. Acele probleme pe care elevul le rezolvă cu ajutorul altora trebuie să constituie numai un prilej de a-şi lichida lipsurile sale de cunoştinţe.

— *Fiecare soluţie* explicată pe larg, va fi scrisă cu îngrijire, însoţită de numărul problemei sau exerciţiului. Elevii vor avea grijă ca la sfîrşitul soluţiei să fie trecut numele lor complet, urmat de numele localităţii, al *raionului, şcolii şi clasei* din care face parte fiecare.

— Problemele *copiate* nu vor fi luate în seamă.

— La evidenţierea participanţilor se va ţine seama de fiecare problemă rezolvată trimisă, dacă este completă, *clar explicată*, cu soluţia cît mai simplă şi însoţită de toate calculele necesare.

— Participanţii la Olimpiadă vor expedia o singură dată problemele clasei din care face parte fiecare şi pe care a putut să le rezolve. Ele se vor prinde laolaltă şi se vor introduce într-un plic pe care se va scrie numele elevului participant, *clasa, şcoala, localitatea şi raionul.*

— Plicurile conţinînd problemele rezolvate se vor trimite la sediile filialelor Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. din oraşul reşedinţă al regiunii respective, *PÎNĂ LA 25 FEBRUARIE 1957.*

— *Elevii evidenţiaţi* la această etapă vor fi admişi la etapa a II-a care va consta dintr-o *lucrare scrisă la matematică şi la fizică*, dată în localitatea unde se află filiala regională respectivă; data acestei etape se va anunţa ulterior.

— *Elevii evidenţiaţi* şi la etapa a II-a vor primi *diplome* şi *premii*, iar rezultatul va fi publicat în *Gazeta matematică şi fizică, seria B.*

Problemele clasei a V-a

V. 1. — Cinci elevi pleacă într-o excursie aducînd respectiv, sumele 80, 90, 110, 115 şi 125 lei. Fiecare dintre ei a cheltuit aceiaşi sumă. La înapoiere, elevilor le-au rămas 120 lei necheltuiţi. Cum se împarte acest rest între cei cinci elevi excursionişti?

V. 2. — La o construcţie au fost necesare 360 000 cuie. Cuiele s-au vîndut în lăzi cu greutatea netto de 20 kg, la preţul de 90 lei lada. Ce sumă s-a plătit pentru toată cantitatea de cuie necesare dacă 1000 de cuie cîntăresc 30,2 kg, iar pentru transportul a 50 de lăzi s-au mai plătit cîte 91 lei.

V. 3. — Pe o alee sînt puşi 5 pomi la distanţă de 5 metri unul de altul. La 16 metri înainte de primul pom este o fîntînă. Doi pionieri udă toţi pomii turnînd cîte 3 găleţi de apă la 2 pomi şi se întorc la fîntînă. Să se calculeze care este drumul parcurs de pionieri.

V. 4. — Un ceas rămîne în urmă cu 105 secunde în 9 ore. Să se afle cu cîte minute şi secunde rămîne în urmă timp de 24 ore.

V. 5. — Un țăran are un număr de găini de cinci ori mai mare decît de rațe. El vinde 5 găini și cumpără 3 rațe și astfel numărul găinilor devine de trei ori mai mare decît al rațelor. Cîte găini și cîte rațe a avut țăranul în cele din urmă? Explicați rezolvarea.

V. 6. — Să se calculeze :

$$E = \frac{4 - \frac{3}{\frac{4}{5}} + \frac{\frac{1}{2}}{6} : \frac{7}{8} + 1}{3 + \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{3 - \frac{8}{5}}{1 + \frac{3}{1,2}}}.$$

V. 7. — Să se găsească un număr prim de trei cifre, știind că produsul cifrelor lui este 252. Explicați cum ați găsit rezultatul.

V. 8. — La o întrecere în rezolvări de probleme organizată de gazeta de perete a școlii, se dau 5 puncte pentru o problemă bine rezolvată și se scad 3 puncte pentru o problemă greșită. Un elev a trimis rezolvările a 10 probleme și a obținut 26 puncte. Să se afle cîte probleme a rezolvat și la cîte a greșit. Explicați rezultatul prin calcul.

Problemele clasei a VI-a

VI. 1. — Într-un vagon s-au pus 11,8 tone de grinzi de brad și de stejar în total 30 grinzi. O grindă de brad cîntărește 0,28 tone, iar una de stejar 0,48 tone. Să se calculeze cîte grinzi de brad și cîte de stejar s-au așezat în acel vagon.

VI. 2. — Terenul unei grădini școlare a fost repartizat astfel: 0,32 din el, pentru cartofi; 0,28 din el, pentru fasole; $\frac{2}{7}$ din el pentru ceapă și restul pentru flori. Care este suprafața terenului repartizată pentru fiecare din aceste culturi știind că pentru fasole și flori la un loc, s-au repartizat 210 m^2.

VI. 3. — Avînd un caiet de 100 file, să se determine grosimea unei file greutatea ei și densitatea hîrtiei din care este făcut caietul. Descrieți măsurătorile și arătați calculele făcute.

VI. 4. — Un fierăstrău circular face 180 rotații pe minut și taie la fiecare rotație cîte 9 mm. Să se afle în cît timp va tăia în lungime o grindă de lemn lungă de 7 metri. Care este viteza unui dinte de fierăstrău știind că pînza fierăstrăului are forma unui cerc cu raza de 46 cm.

VI. 5. — În triunghiul echilateral ABC paralela dusă din C la AB taie perpendiculara din A pe AB în punctul D. Să se arate că CD este jumătate din latura triunghiului echilateral.

VI. 6. — Scufundîndu-se complet în lacul cu apă sărată Tekirghiol, un obiect plutește în apă. Introdus apoi în apa mării, obiectul nu mai plutește decît dacă se leagă de el o bucată de plută de 2,6 dm^3 în greutate de 600 grame. Să se afle greutatea obiectului știind că apa lacului are densitatea 1,075, iar cea de mare 1,025.

VI. 7. — Pentru a calcula viteza în km/oră a unui tren care mergea cu mişcare uniformă, un elev a folosit ceasul şi pietrele kilometrice situate de-a-lungul căii ferate. Descrieţi modul de lucru şi calculele făcute.

— În timpul opririi într-o staţie acelaşi elev a reuşit să calculeze viteza unui accelerat care trecea prin staţie fără oprire. Ambele trenuri sînt formate d.n acelaşi fel de vagoane. Explicaţi măsurătorile şi indicaţi operaţiunile făcute.

VI. 8. Doi biciclişti pleacă din Bucureşti în acelaşi timp pe şoseaua Bucureşti-Ploieşti. Un biciclist are viteza de 15 km/oră, iar celălalt viteza de 13 km/oră. Să se calculeze după cît timp punctul unde se afla kilometrul 30 de la Bucureşti, se găseşte la mijlocul distanţei dintre cei doi biciclişti şi cît timp mai trece pînă ce biciclistul din urmă ajunge la kilometrul 30?

Problemele clasei a VII-a

VII. 1. — O şină de cale ferată are lungimea de 10 metri la temperatura de 15 grade. Încălzită la 40 grade Celsius, şina se lungeşte cu 3,4 mm. Cu cît se va scurta şina la temperatura de 30^0, faţă de lungimea avută la început?

VII. 2. — Se dă $y = \frac{b - ax}{a - bx}$. Să se arate că $x = \frac{b - ay}{a - by}$. Să se mai arate că $a(x + y) = b(1 + xy)$.

VII. 3. — Dacă lungimea unui dreptunghi creşte cu 12%, iar lăţimea se reduce cu 12%, atunci aria dreptunghiului se modifică cu 288 metri pătraţi. Care a fost aria dreptunghiului?

VII. 4. — Unei coloane de autocamioane ce mergea cu 24 km/oră, i-au trebuit 3 minute pentru a lăsa în urmă un biciclist ce parcurge în timp de 20 secunde o distanţă egală cu lungimea coloanei. Să se afle distanţa străbătută de biciclist în timp ce a fost depăşit de coloana de autocamioane.

VII. 5. — Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendiculara din B pe BC întîlneşte pe AC în D, iar bisectoarea unghiului B taie latura AC în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B şi C se taie formînd un unghi de 135° şi că segmentele BD şi DE sînt egale.

VII. 6. — Pe un cilindru de porţelan cu diametrul de 4 cm se construeşte o rezistenţă de 9 ohmi, dintr-o sîrmă de nichelină cu diametrul de 1 mm, iar între două spire este un spaţiu liber de 2 mm. Care este lungimea necesară a cilindrului de porţelan pe care se înfăşoară sîrma? Ce greutate va avea sîrma de nichelină? $\rho = 0{,}4$; $d = 7{,}9$.

VII. 7. — O cooperativă meşteşugărească de croitorie a cumpărat odată 6 m stofă bărbătească, 12 m loden şi 22 m olandină, pentru care făcîndu-i-se o reducere de 8%, a plătit 1552,04 lei; iar a doua oară a cumpărat 12 m stofă bărbătească, 8 m loden şi 26 m olandină de aceiaşi calitate cu prima cumpărătură, făcîndu-i-se acum o reducere de numai 6%, a plătit 1997,50 lei. Ştiind că suma plătită pentru ambele cumpărături de stofă bărbătească este mai mică cu 38,34 lei decît suma plătită pentru celelalte cumpărături, să se afle cît costă metrul din fiecare ţesătură fără nici o reducere.

VII. 8. — Încălzind o bucată de fier de 1000 g pînă se înroşeşte, se aruncă într-un vas care conţine 1000 g apă la temperatura de 10°C. Apa din vas s-a încălzit pînă la 80°C. Ce temperatură avea bucata de fier înroşită?

Executaţi o experienţă analogă, cu mijloace proprii, şi arătaţi datele obţinute.

Adresele filialelor unde se vor trimite soluţiile :

BACĂU, regiunea Bacău, Calea Mărăşeşti 35; BAIA MARE, regiunea BAIA

MARE, şcoala medie mixtă; BUCUREŞTI, Str. Academiei 14; CLUJ, regiunea Cluj, b-dul Republicii 37; CONSTANŢA, regiunea Constanţa, şcoala medie nr. 1 «Mircea cel Bătrîn», str. Traian 19; CRAIOVA, regiunea Craiova, şcoala medie nr. 2 «Fraţii Buzeşti»; DEVA, regiunea Hunedoara, şcoala pedagogică, str. Gh. Barițiu 2; GALAŢI, regiunea Galaţi, Institutul agronomic, str. Dobrogeanu Gherea 27; IAŞI, regiunea Iaşi, Facultatea de matematică, seminarul matematic; ORADEA, regiunea Oradea, şcoala medie de băieţi nr. 4; Oraşul STALIN, regiunea Stalin, b-dul Stalin, 28; PITEŞTI, regiunea Piteşti, şcoala medie nr. 1; PLOIEŞTI, regiunea Ploieşti, şcoala medie nr. 1 «I. L. Caragiale», str. Gh. Doja 98; SUCEAVA, regiunea Suceava, şcoala medie mixtă; TIMIŞOARA, regiunea Timişoara, b-dul V. Pîrvan 4; TÎRGU MUREŞ, regiunea autonomă maghiară, piaţa Bernadi 12, şcoala medie nr. 1.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Evidenţiaţii

Ioniţă Teodor (student O. Stalin), *Sin C. Alexandru* (clasa X Giurgiu), *Osman S. Saim* (clasa X Constanţa), *Pupăzan V.Nicolae* (student, Sibiu), *Popescu Paul* (clasa X s. m. 11 Bucureşti), *Popescu Mircea* (clasa VIII Tîrgovişte), *Iftimie Vasile* (clasa X Rădăuţi), *Delu Ştefan* (clasa X Corabia), *Căluianu Nicolae* (student Inst. c. f. r. Bucureşti), *Popa Adrian* (clasa X s. m. 17 Bucureşti), *Bucică Mircea* (clasa X s. m. 17 Bucureşti), *Moisin L. Tudor* (clasa X Cîmpina), *Stănculescu Adrian* (clasa X Craiova), *Bigan Stan* (absolvent Giurgiu), *Hulubei T. Valeriu* (clasa X Craiova), *Şarpe I. Dumitru* (clasa X Corabia), *Emanoil Alexandru* (s. m. l. Bucureşti), *Ene A. Ioan* (clasa X s. m. 20 Bucureşti), *Stăncescu N. Emil* (clasa X Giurgiu), *Bogdan P. Mircea* (clasa X Ploieşti), *Pleniceanu Ion* (student Petroşani), *Bucur D. Gheorghe* (clasa X Pucioasa), *Alexa Ion* (student Sibiu), *Popescu A. Iulian* (clasa X Tîrgu Jiu), *Hoţa Marcel* (clasa X Tîrgu Mureş), *Murărescu Gh.* (clasa X Roman), *Stan N. Dumitru* (clasa X Pucioasa), *Panaitopol V. Laurenţiu* (clasa X Giurgiu), *Cornea Gheorghe* (clasa X Constanţa), *Liess Gerhard* (clasa X Cîmpina), *Onuţă N. Ion* (clasa IX Călăraşi), *Şaganai Nusfet* (clasa X s. m. 12 Bucureşti), *Baciu Valeriu* (clasa X s. m. 4 Bucureşti), *Tudor M. Gheorghe* (clasa IX s. m. 12 Bucureşti), *Rusu Mihai* (clasa IX-a Ocna Mureşului), *Ciubotaru C.* (clasa X Truseşti), *Nistreanu M. Valeriu* (clasa X s. m. 4. Bucureşti), *Zilberman Mircea* (clasa X Bacău), *Iordache Gh. Vasile* (clasa X Brăila), *Cîrnu Mircea* (clasa VIII Tîrgovişte), *David Gabriela* (clasa X s. m. 15 fete Bucureşti), *Florea Dorel* (clasa IX Lugoj), *Vişinescu M, Mihai* (clasa VIII Giurgiu), *Văgăunescu George* (clasa X Ploeşti), *Ballag Vasile* (clasa X Ploieşti), *Paulescu N. Dan* (clasa X R. Vîlcea), *Bîrzan Romanel* (clasa IX Cluj), *Auziac Dorel* (clasa IX Arad), *Simionică I. Traian* (clasa VII C. Lung Muscel), *Hodor P. Const.* (clasa VIII P. Neamţ), *Frăţiloiu Gh.* (clasa X Pucioasa), *Grecu Anton* (clasa VIII Roşiorii de Vede).

* * *

Pînă la 1 *iunie* 1956 *s-au primit cel puţin cîte* 10 *soluţii bune de la următorii rezolvitori de probleme:*

ADJUD — Clasa IX-a. Chiorcea N. Nicolae (1992*, 97*, 98*, 2004*, 05, 06, 08—11, 23, 32, 34).

AIUD — Clasa X-a. Suciu I. Ioan (2110—12, 15, 16, 20, 23, 25, 26, 32, 42, 46, 48).

ALBA IULIA — Clasa VIII-a Patzer Herbert (2100, 04, E: 682, 84, 91, 731, 42, 80, 84, 86,—90), Trifu Mircea (2004, 24, 82, 94, 100, 04, 11, 58, E: 682, 84, 91, 762, 83, 84, 86, 94, 99). Clasa IX-a. Avram Nicolae (2002, 34, 42, 81, 102, 11—13, 18 27, 37, 61), Bălgrădean Alex. (1956, 60, 71, 76, 77, 97, 2004, 06, 21, 23, 42, 81, 82).

ALEXANDRIA — Clasa IX-a. Ionescu Gelu (2001, 10, 42, 58, 81, 102, 10—13, 16, 18, 26), Ploeşteanu S. Ioan (2110, 13, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 26, 29, 32, 35, 37, 38, 42, 56, 62, 64, 65, 67). Clasa X-a. Guţu F. Ilie (2109, 11. 12, 16—18, 20, 21, 25, 27, 30, 32, 33, 35, 42, 43), Stoian Ştefan (2003, 06, 27, 29, 38).

ARAD — Clasa VIII-a. Beştea Cătălin (2042, 49, 86, 104, 11, 18, 20, 22, 24—26, 29, 34, E: 776, 78, 83, 84, 86, 90, 97, 98, 801, 03—05), Boar Teodor (2042, 06, 102, 04, 11, 18, 20, 24, E: 776, 94, 97, 804, 05), Badea H. Florian (2111, 18, 20, 21, 29, 73, 93, E: 797, 99, 802, 08, 18). Bogdănescu Silviu (2104, 11, 18, 20, 42, 86, E: 762, 65, 67, 71, 72, 74, 76, 84, 76, 84, 94, 97, 804), Cătuneanu Constantin (2104, E: 776, 78—81, 83, 87, 90, 806, 11, 13—16, 18), Codreanu Lucian (2042, 49, 86, 104, 11, 18—20, 24—26, 29, 31), Danciu Zamfir (2086, 111, 18, 24, 29, 73, 75, 88, E: 776, 97, 801, 04, 08, 11), Patean Teodor (1997, 2006, 11, 22—24, 102, E: 763, 76, 78, 86, 89), Savin Virgil (2042, 104, 11, 25, 75, E: 776, 97, 80, 802, 04, 18,) Scriban Romulus 2042, 86, 102, 04, 18, 25, 75, E: 776, 80, 97, 805, 18). Clasa IX-a. *Auziac Dorel* (2008, 17, 21, 42, 48, 81, 82, 86, 92, 102, 03, 11—14, 18—27, 29, 31, 34—36, 42, 43), Ghidezan Doina (1925, 31, 43, 48, 51, 55, 56, 58, 60, 2042, 48, 54). Clasa X-a. Valentin Liviu 2020—22, 24, 28, 82, 83, 86, 88, 89, 100, 04).

BACĂU — *Şcoala medie din Păuneşti* — Adjud. Clasa V-a. Chiriac Constantin (2118, 27, 34, E: 749, 78, 85, 90, 98. 801, 04, 05). Clasa VI-a. Novac Gheorghe (2118, 24, 34, E: 772, 78, 84, 85, 94, 98, 99, 800, 01, 04, 05), Pintilie Florica (2118, 34, E: 722, 84, 90, 94, 98—801, 04, 05), Vasilichi Zarafina (2118, 34, E: 770, 84, 90, 94, 98—801 04, 05). Clasa VII-a. Apostu Ioana (2118 25, 34, E: 755, 70, 77, 78, 80, 84, 94, 98—801, 04, 05), Bostan Costică (2118, 25, 34, E: 777, 80. 84, 94, 98—801, 04, 05), Ignat Maria (2118, 20, 25, 34, E: 755, 73, 77, 80, 84, 88, 94, 98) 801, 04, 05), Popa Neculae (2118, 24, 25, 34, E: 777, 84, 94, 98—801, 04, 05), Şerban Ligia (2118, 25, 34, E: 755, 73, 77. 80, 84. 83, 94, 98, 801, 04. 05, Şerbănescu Cornelia (2118, 24, 34, E: 765, 77, 79, 84, 94, 98, 804, 05), Stoica Neculai (21 24, 25, 34, E: 777, 84, 94, 98—801, 04, 05). Şcoala medie. Clasa X-a. Hărăbor Mihai (1959, 92, 94, 95, 97, 98, 2003, 05—10, 15, 17, 21, 23, 24, 28, 40—42, 50, 52, 54, 66, 79, 81, 82, 86, 88, 89, 92, 100), *Zilberman Mircea* (2012, 20, 67, 85, 109—26, 29—35, 42—44, 46, 51, 52, 62—69, 71—75, 77, 79, 83, 86, 88, 91, P). Abs. Sulem Hary (2001, 06, 10, 17, 20, 21, 42, 43, 45, 50, 53, 54, 59, 65, 102, 04, 10, 11, 31, 32).

BEIUŞ — Clasa IX-a. Bodeanu Valeriu (2042, 47—49, 53, 54, 78, 79, 81, 86, 92, 94, 100, 02, 04), Huplea Cornel (1995, 2042, 45, 47, 48, 53, 54, 59, 78, 79, 81, 86, 92, 94, 97, 100, 02, 04, 09, 11, 13, 14, 18, 23, 25, 28, 29). Matei Gheorghe (1992, 98 2006, 42, 48, 79, 86, 104, 09, 11, 13), Partenie Valeriu (2019, 42, 43, 33, 47, 48, 50—55, 59, 78, 79, 81, 82, 86, 92, 94, 97, 100, 02, 04, 07).

BOTOŞANI — Clasa VIII-a. Belciug Petru (1960, 2006, E: 675, 85, 708, 18, 27, 29, 30, 42, 49, 51, 52, 58, 68, 72, 76), Blumenfeld Mişu ((1940, 44, 60, 76, E: 709, 10, 21, 27, 51, 52, 56, 57), Călinescu D. (1947, 55, 57, 60, 2006, E: 749, 51—54, 58, 68, 72, 74, 76, 80, 84), Croci Z. (1940, 54, 55, 76, 2006, E:, 687, 708, 18, 27, 29—32, 47, 49, 50, 52, 54, 58, 65—67, 71, 74), Gavril Solomon (1947, 57, 60, 62, 70, 71, 76, E: 708, 47, 49—52, 54, 57, 58,), Gîngă Niculina (1955, E: 747, 48—50, 52, 65, 68, 72), Grosu Ion (2006, E: 687, 708, 18, 29, 30, 32, 42, 43, 48, 49, 51, 67), Ionescu Cătălin (1944, 47, 55, 60, E: 714, 21, 27, 29, 30, 33, 37,—39, 42, 50, 52, 58), Iţcan Corneliu (2042, 104, E: 708, 18, 27, 29, 32, 35, 38, 50, 76, 80, 89, 90), Scutelnicu Ion (1954, 55, 76, 2006, E: 730, 32, 49, 52, 54, 64—67, 71, 72, 74), Stirhăţ Traian (1947, 49, 60, 76, 2006, E: 687, 718. 73), 32, 35, 49. 52, 58, 68, 72), Suster Vasile (1947, 54, 55, 60, 76, 2006, E: 685, 87, 708, 18, 29, 30, 32, 47—52, 54, 58, 65, 67, 68, 71, 72, 74, 76, 78, 78, 80, 84). Clasa IX-a. Vasiliu Monica (1992—95, 97, 98, 2000, 01, 05, 06, 09—11, 14). Clasa X-a. Chiriac Dumitru (1875, 79, 908, 47, 48, 51, 54—56, 61, 62, 2020, 21).

BRĂILA — Clasa VIII-a. Danciu P. Viorel (E: 762, 64—67, 71, 72, 74, 76, 80, 84, 90), Florea Dorin (2082, 104, 11, 18, E: 638, 50, 76, 84, 86, 94, 801), Clasa IX-a. Comănici D.Petru (2017, 21, 42, 45, 54, 86, 92, 109, 11, 13, 18, 25, 30). Clasa X-a. Alexandrescu Valentina (2040—43, 50, 53, 54, 89, 90, 104, 16), Burtea Eugenia (2001, 09, 15, 20, 32, 41, 45, 56, 83, 88), Costin Mircea (2043, 48, 54, 59, 79, 94, 102, 04, 05, 09—14, 23), Georgescu Laurian (1938, 2003, 45, 52, 53, 64, 81, 97, 103, 11, 18, 19, 21, 23—27), Iordache Gh. Vasile (1783, 948, 2022, 41—43, 45, 47—54, 56, 59, 62, 63, 65, 66, 78, 79, 81, 89, 90, 94, 2100, 02, 04, 05, 09, 11, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 31), Rezeliu Gh. (2041—43, 45, 50, 54, 59, 79, 88, 89, 100, 02, 04, 09, 11, 14, 18—20, 25, 26, 35, 38), Urse Ştefan (1966, 92, 93, 2001, 03, 07, 09—11, 21, 24). Abs. Tonea C. Dumitrache (1992, 95, 2005, 06, 09, 10. 20, 21, 23, 24, 53, 54, 104).

BREAZA — Şcoala miltară «D.Cantemir». Clasa VIII-a. Motoargă Dumitru (1955, 57, 60, 63, 70, 71, 73, 76, 98, 2006, 09, 11, 23, 42, 86, E: 747, 48, 50—52, 57, 58, 66, 72, 74, 89).

BUCUREŞTI *Studenţi*: *Căluianu Nicolae* (Inst. CFR) (1992, 93, 95, 97, 2001,—04, 06—10, 15, 20, 21, 24, 32, 35, 41—43, 45, 50, 53, 54, 82, 88, 100, 09, 11—15, 18, 19, 21—25, 27—31, 33, 34, 36), Cochinţoiu Ion (Fac. Hidro-Construcţii) (2041,—43, 45, 51, 53, 78, 81, 82, 111, 13, 18, 25, 28, 31, 64, 66, 71, 73, 75, 77, 84, 86, 211), Landman Alexandru (Fac. Energetică) (2040—43, 45, 47—51, 53, 54, 58, 59, 63—66, 70, 78, 79, 81—83, 86, 87, 89, 90, 100, 02, 04). Absolvenţi: Budan Constantin (2040—43, 45, 47, 48, 65, 100, 02,

04, 08), Mavrogheorghe Vanghele (2003, 04, 40, 45, 48, 52, 56, 92, 102, 12), Pachtinger Simion (2009, 20, 22, 42, 48, 53, 54, 62, 78, 79, 88, 89, 92, 94, 97, 100, 02, 04, 07), Segal Toma, (2006, 10, 15, 21, 42, 43, 50, 113—15, 18), Stan C. Dumitru (1992, 94—97, 2001, 03, 04—11, 21, 41—43, 45, 50, 51, 53, 54, 65, 78, 86, 94, 97, 100, 02, 04), Vlad Ilie (1947, 48, 54, 56 67, 82, 88, 90, 2042, 54).

Şcoala medie nr. 1 « *N. Bălcescu* ». Clasa VIII-a. Ionescu C. Traian (2103, 12, 14, 16, 24—26, 32, E: 717, P). Isbăşescu Mihai (1997, 98, 2006, 14, 16, 17, 34, E: 714, 20, 68, 69, 72, 74), Moisă Ioan (1960, 95, 2006, 42, 102, 11, 18, 24—27, 29, 31, 34, E: 772, 84, 97), Velicu Vasile (2109,—11. 24, 25, E: 797, 812, 18). Clasa IX-a. Cipere I. Lucian (1992, 98, 2001—03, 05—11, 42, 43, 45, 50, 51, 47, 54, 56, 79), Lupescu Mihai (1994, 96, 2000—02, 09—11, 15, 21), Niculescu A. Alexandru (1995, 2001, 06, 10, 21, 23, 42, 49, 81, 104), Moldoveanu Călin (1977, 97, 2059, 111, 12, 20, 25, 29, 74, 75, 84). Schein Theodor (1992, 97, 98, 2006—08 10, 11 15, 17, 21—23). Clasa X-a. Basarab A. Şerban (1994, 2005, 06, 10, 11, 18, 21, 24, 25. 27, 50, 54, 59, 63, 78, 79, 84, 86, 100, 02, 04), *Emanoil Alex.* (1972, 2012, 14, 16, 17, 20—22, 24, 26, 32—35, 37, 39, 41—52, 54, 56, 64, 65, 74, 79, 81—83, 86, 88, 89, 92, 98, 100, 02, 04, 05, P), Ionescu Mircea (1992, 97, 2002, 06—11, 41—43, 45, 47, 50, 54), Moraru Florentin (2041,—43, 48, 79, 82, 86, 88, 100, 11, 36, P).

Şcoala medie nr. 2. Clasa IX-a. Jianu Ion (1997, 2003, 04, 24, 42, 43, 81, 82, 100, 04, 09, 11—13, 16, 18, 19, 21, 26), Teodorescu Nicolae (2109, 11, 13, 14, 16, 17, 23, 24, 26, 29, 32, 35, 37, 39, 45, 51, 53, 62—67, 70, 71, 77, 79, 86, 90, 95, 200).

Şcoala medie nr. 3, Clasa VII-a. Ioachim Alex, (2100, 02, 04, E: 742, 60, 64, 65, 67, 71, 72, 74, 76, 84, 87, 89). Clasa IX-a. Moroşanu Victor, (1997, 2006, 10, 21, 23, 42, 81, 82, 100, 02, 02).

Şcoala medie nr. 4 « *Aurel Vlaicu* », *Grivița Roşie.* Clasa VII-a. Carp Mihail (E: 762, 65—69, 71—74), Marinescu V. Alex. (2118—22 24, 25, 27, 30, 33, 34, E: 747, 49, 50, 65, 66, 69, 71, 73, 76, 91, 95—97). Clasa VIII-a. Constantinescu M. Remus (2111, 18, 25, 73, E: 776, 80, 98, 99, 801, 08, 11, 13, 18), Dobre Dragomir Cornel (2047, 71, 94, 97, 104, 11, E: 776, 94, 98, 99), Ionescu Petre (1993, 95, 97, 2006, 08, 10, 21, 23), Nicolau Cornel Virgil (2109, 11, 18, 22, 25, 26, 36, 56, E: 795, 96, 98, 99, 801, 04, 05). Clasa IX-a. Ciuntu Florin (1949—52, 54,—56, 60, 62, 63, 67, 70, 71, 74, 76, 77, 90), Ciurez Ilie (1997, 2006, 59, 62, 109, 11, 13, 18, 24—27, 29, 31), Dobre N. Stoian (1952, 59, 74, 77, 92—94, 97, 98, 2006, 07, 08, 10, 11, 21, 32), Draica Constantin (2014, 17, 35, 40, 2110—15, 17, 18, 20—31, 33—38), Feliu Constantin (2111—31, 18, 24—26, 28, 29, 31), Ionescu Mircea (1992, 98, 2004—06, 10, 17, 21, 23, 24, 41, 43, 50, 53, 54, 100, 04, 05, 11—14, 18, 24—26, 29), Martiş Gh. Ioan (1993, 2004, 05, 07, 08, 14, 21 23, 41, 42, 45, 62, 112, 13, 20, 25, 27, 28), Teodorescu Ion (1992, 97, 98, 2010, 21, 110—13, 18, 24, 25, 31). Clasa X-a. *Baciu Valeriu* (1992, 97, 2004, 05, 06, 08, 10, 11, 15, 20. 22, 23, 41—43, 45, 50, 54, 65, 86, 88, 89, 100, 02, 04, 09—13, 15—20. 23, 24, 29. 31), *Nistreanu M. Valeriu* (2041, 51, 53, 54, 59, 63, 65, 68, 92, 105, 09, 10—25, 29, 35, 48, 72—75, 86 93, 211), *Pătrașcu Sorin* (2015, 41, 65, 92, 118, 19, 21, 22, 64, 70).

Şcoala medie de fete nr. 5. Clasa IX-a. Filip Argentina (2004, 06, 10, 11, 15, 21, 42, 50, 86, 104, 11—14, 20, 25, 64, 75, 84). *Şcoala medie de fete nr.* 8. Clasa VI-a. Mazilu G. Luminița (2118, 22, 24, 30, E: 761, 63—65, 68, 70, 74, 76—81, 83, 85—88, 90, 95, 99, 804, 05). Clasa IX-a. Marinaş L. Marina (1992, 93, 2001, 08, 41—43, 48, 53, 54, 102, 04, 11—14, 20, 25). *Şcoala medie de fete nr.* 10. Clasa IX-a. Stancu Florica (1956, 60, 71, 76, 77, 90, 98, 2001, 05, 06, 08, 11, 14, 21, 23, 39). *Şcoala medie nr.* 11 « *Cantemir Vodă* ». Clasa VIII-a. Antoniu I. Sorin (2006, 100, 04, 09, 11, E: 699, 702, 06, 31, 42), Ionescu M. Cornel (1971, E: 749, 50, 52, 89, 94, 97, 98, 801, 04), Schiopulescu Dan (2042, 49, 53, 82, 86, 100, E: 724, 25, 27, 30, 76, 80). Clasa IX-a. Nicolae M. Valentin (1997, 2059, 111, 12, 20, 23, 25, 26, 29, 64 66), Clasa X-a. Corbu Ion (2045, 62, 79, 83, 86, 88, 89, 100, 02, 04, 09, 11—13, 15—34, P), Hornanian Vladimir (1948—52, 54—58, 60—64, 73, 75—77), *Popescu Paul Roger* (1808, 903, 66, 80, 83, 94, 99, 2000, 30, 34, 40, 49, 56, 63, 66, 70, 71, 85, 94, 97, 101, 10, 12, 14, 17, 19, 22, 46, 49, 51, 61, 63—74, 77, 79, 81—84, 86, 87, 90, 91, 93. 97, 98, 200, 03, 07, 10, 11, P). Schiketanz I. Iosif (2041, 52, 54, 63, 65, 78, 79, 83, 86, 88—90, 92, 100, 02, 04, 05, 11—20, 23, 25, 26, 29), Stoica I. Dan (1992, 94, 96—99, 2003—10, 15, 20, 12, 24, 32), Tințăreanu C.R. (1938, 77, 80, 93, 2041, 111, 13, 16, 26, 31, 64, 69).

Şcoala medie nr. 12. Clasa VIII-a. Glasberg Vladimir (2042, 43, 53, 54, 82, 86, 92, 94, 97, 102, 09, 11, 29).

Şcoala medie nr. 13. Clasa VII-a. Popescu I. Ovidiu (E: 751—54. 56, 58. 66, 76, 88), Ţuculescu Mihai (E: 776—78, 80, 81, 83—87, 90). Clasa VIII-a. Bănică Dan (2162, 63. 65, 73, 74, 78, 79, 81, 87, 93, E: 776, 80, 87, 89, 90, 94, 98, 99, 801, 05, 18, 24), Chirică Mircea (1995, 2006, 68, 71, 79, 92, 100, 04, 51, E: 776, 80), Ţugulea Mircea (1997, 2042, 48, 74, 105, 25, 32, 34, 48, 75, 82, 93, E: 789, 96, 807, 08). *Clasa IX-a.* Lerner Emil (1992,

94, 97, 2001, 06, 10—12, 14, 16, 17, 20, 21, 24, 27, 42, 48, 65, 70, 76, 100, 02, 04, 07, 09—13, 16), Stancu Mihai (1992, 95, 97, 98, 2006, 08, 10, 21, 23, 24), *Tudor M. Gheorghe* 1993, 2078, 109, 11—14, 16, 18, 19, 21, 24, 25, 27—29, 31—35, 44, 51, 63—67, 71, 73, 75, 79, 82—85, 87, 91, 93, 95). *Clasa X-a.* Bărăitan Florin (1997, 98, 2001, 06—10, 15, 21, 42, 43, 45, 48, 50, 54, 100, 04), Enache Ion (2042, 43, 64, 109, 13, 18, 20, 24—26, 29), Ieremia Mircea (2003, 06—08, 10, 20, 21, 23, 33, 42, 43, 45, 50—52, 88, 100, 04), Misdolea T. (2041—43, 45, 48, 50, 112, 23, 38, 77, 86, 93, 99, 209), *Şaganai A. Nusfel* (1992, 97, 2001, 03, 05—08, 10, 11, 15, 21, 24, 41—43, 45, 48, 50, 51, 54, 53, 59, 62—65, 77—79, 82, 83, 85, 86, 88, 92, 94, 97, 98, 100, 02, 04, 05, 07, P).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa IX-a. Enescu Cornelia (1996, 2001, 03, 05, 07, 09, 16, 43, 116—19, 22,—27, 31, 34, 35). Clasa X-a. *David Gabriela* (2040—43, 54, 48, 50, 53, 54, 86, 88—90, 92, 100, 10, 11—13, 15—18, 20, 23, 25, 26, 29, 32, 34, 43, 44, 46, 48, 53, P).

Şcoala medie nr. 17.Clasa VIII-a. Georgescu Vladimir (E:765—68, 71—74, 94, 98), Paşa Florin (2111, E: 776, 778—82, 86—80, P). *Clasa IX-a* Biţă Serban (1992, 97, 2006, 10, 15, 21, 24, 42, 54, 59), Ionescu Cornel (1992, 2006, 10 211, 24, 42, 54, 62, 100, 11). *Clasa X-a.* Avram Aurel (1992, 93, 95—98, 2001—10, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 28, 32, 42, 43, 48), *Bucică Mircea* (2000, 02, 40, 42, 43, 45, 48, 50, 51, 54 56, 59, 63—65, 67, 73, 75, 79, 81—83, 86, 88—90, 92, 100, 02, 04, 05, 09—14, 16—20, 22—26, 29—34, 38, 42) Coliren Ignatz (2109—29,), *Popa Adrian* (1992—2011, 15, 21, 22, 24, 32, 40—50, 56, 59, 64, 65, 102, 04, 09—12, 15— 33, 38, P).

Şcoala medie nr. 18. *Clasa VII-a.* Enişteanu N. Nicolae (E: 791, 93, 94, 97—99, 801, 03, 04, 05). *Clasa IX-a.* Filotti Ion (2012, 16, 17, 21, 27, 75, 76, 81, 82, 102, 04, 08), Zamfirescu A. Martin (1998, 2001, 11, 14, 16, 34, 43, 81, 82, 102, 04). *Clasa X-a.* Antonie-Mircea (1975, 77, 92, 2005—07, 21, 41—43, 50, 65, 88, 89, 100, 04), Moldoveanu N. Alexandru (1992, 95, 97, 98, 2006—08, 42, 43, 100, P).

Şcoala medie de băieţi nr. 20. *Clasa VIII-a.* Macarie G. (2109, 11,29, E: 776, 80, 90, 98, 801, 02, 04, 06, 11, 18), Radu D. (2109, 11, 29, E: 776, 80, 90, 98, 801, 02, 04, 06, 11, 18). *Clasa IX-a.* Armaş Petre (1992, 95, 97, 98, 2005, 06, 08, 21, 42, 94, 104, 11—13, 18, 22, 29, 34, 47), Borşan Mihai (1992, 94, 95, 97, 98, 2001, 04—06, 08, 10, 11, 21, P), Iordănescu Sorin (1997, 2001, 16, 24, 62, 109, 10, 12—14, 25, 27, 28, 30, 31, 42, 62, 64, 65, 71, 73—75, 77, 79, 83, 84, 88, 90, 91, 93). *Clasa X-a. Ene A. Ioan* (2044, 45, 52—54, 56, 59, 63, 73, 79, 81—83, 86, 88—90, 92, 94, 97, 100, 02, 04, 09—18, 20, 21, 23—26, 28, 29, 42, 43), Pantea Ioan (1992, 93, 95—98, 200, 01, 03—11, 16—18, 20, 22, 24, 40—43, 45, 47, 48, 50, 51), Sarion Petre (2041—45, 47—54, 59, 65, 83, 86, 92, 100, 02, 04, 09, 12, 13, 18—20, 25 26, 31, 32), Mustăţea Aurică (2042, 47, 48, 53, 54, 59, 65, 78, 100, 02, 04).

Şcoala medie nr. 22. *Clasa IX-a.* Gheorghiţă Mariana (1976, 92, 97, 2005, 20, 21, 42, 43, 48, 92, 109, 12—14, 18, 20, 25, 26, 29, 36, 64, 66, 67, 93), Ionescu A. Monica (1992, 92, 93, 95, 97, 98, 2004, 05, 06, 09—11, 21, 42, 53, 82, 86, 102), Pîslaru M. Alexandra (1992, 93, 95, 97, 98, 2004—06, 09—11, 21, 42, 53, 82, 86, 102).

Şcoala medie nr. 26. *Clasa IX-a.* Alexandru Horia (2109, 11—14, 20, 25—27, 30, 32).

Şcoala de 7 ani nr. 145 Ghencea.— Clasa VI-a. Cristescu Cristian (E: 776, 78, 80-82, 805, 06, 08, 11, 12, 16), Ionescu Clemenţa (E: 764, 67, 71, 76, 78, 81, 87, 800, 01, 04, 05, 08), Marin Doina (E: 762, 64, 67, 71, 73, 76, 78, 80, 81, 87, 805, 08, 12.) *Clasa VII-a.* Apostol Rodica (1971,72, E: 747, 49, 50, 64, 67, 71, 73, 74, 76, 80, 90), Chertaş Petruş (E: 762, 64—68, 70—74).

BUZĂU. — *Clasa VII-a.* Gheorghe Cezar (2048, 81, E: 776—90). *Clasa IX-a.* Popa I. Florica (E: 714, 21, 24, 27, 35, 38, 52). *Clasa X-a.* Bătireanu Gh. (1938, 92, 95, 97, 98, 2001—03, 06, 08, 10, 20, 21, 42, 45, 50, 53, 54, 56, 62, 182—84, 86, 272), Moldoveanu M. Clement (2116, 17, 23, 28, 29, 31), Suciu Tita (2118, 27, 29, 61, 62, 64, 65, 70, 71, 75, 77, 80, 84).

CALAFAT. — *Clasa VIII-a.* Geltz Eva (2111, 18—20, 22, 25, 26, 29—32, E: 791, 94—99, 801, 02, 04), Mititelu M. Ştefan (2123, 26, 173—75, E: 808, 11—13, 15, 18), Stoenică A. Ion (1197, 2100, 04, E: 766, 67, 71, 72, 76, 89, 90), Şerban Adrian (2109, 29, E: 774, 76, 80, 81, 84, 90, 801, 05). *Clasa IX-a.* Ciurezu C. Radu (2081, 111—14, 18, 20, 24, 25, 29, 64, 67, 73, P), Pascu I. Ştefan (1992, 97, 98, 2005, 06, 08, 10, 11, 15, 21, 42, 43, 48, 50, 54, 102), Radu Florin (1996, 97, 2006, 42, 21, 10, 102, 12—14, 18). *Clasa X-a.* Preda Ştefan (1960, 92, 97, 2003, 06, 10, 20, 32, 41-43, 88).

CĂLĂRAŞI. — *Clasa IX-a. Onuţă N. Ion* (2043, 45, 48, 53, 54, 74, 76, 102, 04, 09—14, 18—21, 23—33, 35, 64—75, 93), Rădăcină Nicolae (2048, 111, 13, 14, 18—20, 24, 25, 27—29), Strătescu Ion (2112, 14, 19, 20, 24—32, 35, 46, 55), Belcin Adriana (1992,

93, 96, 97, 2003, 06—08, 10, 20, 21, 42, 45, 100, 02, 04, 11, 13, 16, 18, 23, 25, 26, 29, 31, 38).

CAPÂLNA (Hunedoara). — Maier Ion (2053, 111, 73, 75, E: 776, 78, 80, 98, 808, 13).

CARACAL. *Clasa V-a.* Resceanu Ion E: 747, 49, 50, 58, 63, 71, 73, 76, 98, 801). *Clasa VIII-a.* Mihăilescu I. Viorel (1971, 76, 2082, 104, 11, 24, 28, E: 684, 762—65, 67, 68, 71, 72, 76, 80, 90, 94, 98, 801, 05). *Clasa IX-a.* Ancuţa Victor (2112—14, 18, 24, 29, 73, 75, 84,)

CARANSEBEŞ. Clasa IX-a. Haţegan Cornel (1984, 92, 95—97, 2001, 03,—09, 34, 39).

CÎMPINA. *Clasa VIII-a.* Palaghiţă Iordache (2053, 79, 82, 92, 100, 04, 05, 09—11, 18, 20). *Clasa X-a.* Balea Andrei (1993, 95, 98, 2001 06, 21, 24, 32, 41—43, 45, 54, 59, 113, 15, 25), *Liess Gerhard* (1947—49, 51, 54, 55, 72, 73, 92—95, 97, 98, 2001, 03, 06—10, 15, 21, 22, 24, 81, 83, 87—90, 100, 02, 05), *Moisin L. Tudor* (1972, 73, 92, 93, 95—98, 2001—10, 15, 17, 19, 21, 22, 32, 33, 41—43, 45, 47—50, 53—55, 59, 62, 81, 83, 85, 88, 89, 92, 100 02, 04), Colonati Cristian (2040—43, 45, 47—54, 59—61, 64, 65, 70, 76, 78, 79, 81—83, 87—90, 92, 94, 100, 02, 04,) 05,

CÎMPULUNG — Muscel. — *Clasa VII-a. Simionică I. Traian* E: 742, 44, 45, 54, 55, 58. 62—64, 66, 67, 71, 74, 76, 80, 81, 91, 92, 94, 97—99, 801, 04—06, 10, 13).

CLUJ. — *Clasa VIII-a.* Babeş Victor (2006, 79, 102, 04, E: 699, 702, 06, 18, 67, 80), Bunea Mircea 2109, 18—20, 22, 24, E: 776, 80, 90). *Clasa IX-a. Bîrzan Romanel* (1977, 2062, 64, 65, 76, 94, 109, 10, 12, 14, 26, 28, 31, 33, 46, 48, 49, 63—67, 70, 71, 73—75, 77, 78, 79, 82 84—86, 91, 203).

CONSTANŢA. *Clasa VIII-a.* Simion C. E. (2086, 104, 09, 11, E: 710, 54, 56, 66, 67, 76, 84). *Clasa IX-a.* Abdurain Aiten (2081, 82, 94, 97, 102, 04, 11, 13, 20, 37, 40), Anghel Constantin (1819, 2043, 45, 50, 52, 54, 42, 67, 78, 81, 82, 86, 104, 05, 08, P), Dargenta M. (2043, 53, 77, 78, 112, 28, 29, 51, 53, 70), Ianuş I. Stere (2014, 16, 17, 23, 41, 45, 49, 63, 70, 73, 77, 81, 82, 86, 105, 07, 10—14, 18—22, 24—35, 37, 46, 55, 61, P). *Clasa X-a. Cornea Gheorghe* (1947—49, 51, 54, 56—58, 60—63, 72, 73, 75—77, 90, 92, 93, 95, 97—99, 2001—06, 08—11, 15, 16, 20—24), Encica Traian (1946, 48, 49, 51, 53—57, 60, 62, 77), Ionescu Ion (1917, 76, 77 90, 92, 97, 2004, 06, 20, 21), *absolvent Osman S. Saim* (1983, 92, 94—98, 2001—11, 16, 20—22, 25—27, 30, 38, 41—43 466—4, 71—77, 84, 86, 92—94, 96, 97, 100, 02, 04, 05, P).

CORABIA. *Clasa IX-a.* Popa M. Constantin (2042, 45, 48, 50, 52—54, 80, 81, 86, 102, 12—14, 18, 20, 22, 23, 25—27, 29, 51, 74, 84). Clasa X-a. Ciorecan Zaharia (1993, 2003, 10, 15, 21, 23, 24, 41—43, 45, 48—50, 88, 110, 11, 13), *Delu Ştefan* (2041, 45, 47, 48, 50, 51, 53—55, 69 ,79, 82, 88, 89, 100, 05, 09, 11, 13, 16, 20, 23, 25—29, 31, 33, 36, 38, 43, 44, 51, 70—72, 74, 75, 77, 83, 86—88, 204, 07), *Şarpe I. Dumitru* (1783, 808, 2059, 109—18, 20, 22—32, 35, 38, 42—44, 51, 53, 62, 63, 66, 67, 70—75, 77, 83, 86, 212, 14).

CRAIOVA. — Şcoala medie Nr. 1 băieţi. Clasa VIII-a. Chiriac Pompiliu (2086, E: 747, 71, 76, 80, 82, 83, 88, 89, 97, 98). *Clasa IX-a.* Culescu Mihai (2007, 11, 42, 86, 92, 97, 104, 11, 12, 14, 25—27, 32, 35, P). *Clasa X-a.* Bărbuică C. Nicolae (1992, 93, 96—98, 2002—11, 15, 18—21, 32, 41—43, 45, 48, 50), *Hulubei T. Valeriu* (1789, 92, 93, 96—99, 2000—14, 16—24, 26—29, 33, 34, 43, 48, 50, 53, 59, P, N), *Stănculescu Adrian* (2059, 81, 94, 97, 98, 102, 10—12, 14—16, 18, 19, 33—36, 38, 42—44, 51, 70—77, 79, 80, 83—86, 88—93), Tăriţă Ion (1977, 93, 2100—12, 14—21, 23—29, 31, 35, 42, 43, 62, 65).

Şcoala medie de băieţi nr. 2 (Buzeşti). *Clasa VIII-a.* Dinuţ Tudor (2020, 23, 63, 79, 100, 02, 25, 28, 29, 31). *Şcoala medie de fete nr.*3. Clasa X-a. Plăviciosu Silvia (1997, 98, 2003, 07, 10, 11, 41—43, 45, 50, 70, 111, 16).

CURTEA DE ARGEŞ. — Clasa VI-a. Bungiu Julieta (E: 764, 71, 73, 85, 801, 03), Marinescu Mircea (E: 735-37, 86, 87, 89). *Clasa VII-a.* Cristescu Maria (E: 776, 85, 87, 90, 98, 810, 11, 15, 18). *Clasa IX-a.* Iliescu M. Şerban (2111-14, 18, 26, 29, 37, 61, 64).

DEVA. — Clasa X-a. Olariu Voicu (1992, 93, 97, 2001, 03, 06—08, 10, 15 21, 23, 32), *absolvent* Pîrvu Petre (1992, 93, 95—98, 2003—11, 15, 17, 21, 23, 40—43, 45, 49—54, 100, 02, 04, 07, 11—14, 23, 25).

FIERBINŢI (Snagov). — *Clasa IX-a.* Crasnea Nicolae (2041, 42, 45, 50, 102, 09, 12, 13, 18, 25, 31), Preda Vasilica (1992, 97, 2001, 03, 05, 08, 10, 11, 23, 41, 45, 111—14, 20, 26, 29), Soare Ana (2006, 21, 41, 42, 45, 50, 102, 09, 11—13, 18, 25).

FOCŞANI. — *Clasa VI-a.* Paraschiv Florin (E: 762, 67, 71, 801, 04,—08 13). *Clasa VIII-a.* Dinulescu Horia (2042, 48, 60, 86, 92, 109—11, 18-22, 24—29, 31, 33, 36, 37, 61, E: 684, 91, 99, 706, 78, 91—93, 97—99, 801—05, P), Munteanu Valeriu (2111, 18—21, 24, E: 754, 76, 78, 80, 84, 89, 90, 818), Rădescu Eugen (1968, 70, 94, 104, 18—21, 32, 33, 36, 63, 75, 77, 79, 93, E: 781, 88, 89, 807, 08, 15, 16, 18, P). *Clasa IX-a.* Buzescu Buşe (1961, 73, 76, 2015, 32, 41, 43, 45, 51, 56, 65, 79, 82, 83, 89, 104, 09, 11—14, 23, 26, 31, 38, 61, 64,

74), Cojocaru S. Mihai (1992, 96—98, 2000—08, 10—12, 15—21, 32, 34, 35, P), Croitoru Florica (2042, 50, 53—55, 67, 69, 73—76, 78, 79, 81, 82, 83, 86). *Clasa X-a.* Stoian Constantin (1976, 2002, 24, 91, 96, 102, 09, 12, 15—19, 21, 23, 25—29), *absolvenţi Arghir B. George* (2041-45, 47—56, 61—68, 70, 73, 74, 77, 79, 81—83, 85—90, 92, 100, 02—06, P).

GALAŢI. — *Clasa IX-a.* Chirilă Marian (2042, 45, 53, 81, 92, 99, 102, 08, 11—14, 16, 18, 20, 23—26, 28, 29, 32, 37, 46, 52). *Clasa X-a.* Drăgoi Florian (1947, 48, 51, 54, 57, 63, 41, 43, 45, 100, 05, 31, 44). *Şcoala militară de marină. Clasa VIII-a.* Alban N. (2100, 11, E: 765, 72, 74, 76, 78, 94, 98, 801), Boldeanu Ichim (2006, 42, 86, E: 771, 76, 80, 90, 98, 99, 801, 05), Căpran D. Petre (2006, 42, 64, 79, 82, 100, 04, 11, 18, 25, 27, 29, 31, E: 765, 71, 74, 80, 82,84, 86, 89, 94, 98, 99, 801, 03), Giurgea Victor (2042, 100, 11, 18, 34, 63, 73, 75, 93, E: 776, 80, 84, 86, 89, 94, 811, 15). *Clasa IX-a.* Săndulescu Florin (1923, 48, 55, 57, 62, 64, 77, 42, 49, 2069, 75, 102), Tudorache C. Mihai (2006, 09, 24, 81, 82, 109, 13, 14, 29, 64). *Clasa X-a.* Neagu Ştefan (2003, 07, 08, 15, 20, 23, 32, 50, 54, 88, 89, 102, 12, 16, 18, 23, 25, 31).

GIURGIU. — *Clasa VII-a.* Drăgan I. Petre (E: 682, 84, 91, 731, 42, 45, 64, 68, 72), Mătrăcaru Clement (2081, 124, 32, E: 778, 82, 88, 94, 97, 98, 804, 05), Nedea Leonida (2004, E: 762, 64—66, 68, 71—74, 82, 96—99, 802, 04, 05), Roşu Florea (E: 776, 78, 80, 81, 85, 88, 90, 97—802, 04), Stăncescu Virgil (2004, 24, E: 718, 57, 62, 64—68, 71—74, 76, 80, 82, 804). *Clasa VIII-a.* Caraconcea Emanoil (2004, 82, 111, 18, 27, 28, 36, 762, 65, 71, 73—76, 80, 90, 94, 97, 98, 801, 04, 05), Marinescu Sergiu (2008, 124, 27, 29, 33, E: 767, 71—74, 77—80, 97, 98, 801, 04,) Mîrlogeanu Florea (2042, 111, 12, 29, 20, 26, 28, 63, 73, 88, E: 789, 97, 98, 801, 02, 04, 06—08, 11, 12, 18), *Vişinescu M. Mihai* (2042, 64, 78, 79, 81, 82, 94, 100, 04, 09—11, 18—21, 24—26, 28—31, 36, 42, 56, E: 776, 78, 81, 84, 86, 88, 89, 97, 98, 801, 02, 05), Zamfir I. Alexandru (2042, 109, 18, 20, 28, E: 780, 80, 97, 98, 801). *Clasa IX-a.* Baciu Mihai (1947, 48, 60, 98, 2002, 06, 07, 10, 21, 25, 55). *Clasa X-a.* Irescu Ecaterina (2004, 41, 42, 45, 48, 50, 54, 63, 78, 86, 102, 04, 46), *Panaitopol V. Laurenţiu* (1966, 75, 79, 92—98, 2000—23, 26, P), *Sin C. Alexandru* (2009, 11, 16, 18, 19, 26, 27, 40—43, 45, 47—51, 53, 54, 56, 57, 60, 63, 65, 67, 73, 79, 84—86, 89, 92, 94, 97, 100, 02, 04, 05, 09—14, 16, 17, 19—30, 32—38, 44, 50, 61, 72, 74, 75, 77, 78, 83, 86, 93, 211, P), *Stăncescu N. Emil* (2045, 47, 49, 50, 54, 65, 86, 90, 92, 94, 97, 100, 02, 04, 05, 09—11, 16—26, 28—33, 35—38), Stăncescu Şt. Nelu (1977, 2006' 41—43, 50, 55, 64, 77, 81, 88, 89, 94, 97, 112, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 35, 64, 72—75, 77, 86—88); *absolvenţi: Bigan Stan* (204—43, 45, 47—50, 52—56, 64—69, 71, 75, 77, 78, 81—83, 85, 86, 88—92, 94, 100, 02, 04, 08, 10—33, 35—38 N, P), Botoran I. Petre (2047, 50—54, 57, 60, 62, 67, 70, 71, 73, 78, 79, 81—86, 88—90, 94, 96, 97, 100, 04—06, 09—12.)

HOREZU (reg. Piteşti). — *Clasa VIII-a.* Gheorghe Florica (2086, 94, 100, 11, 18—21, 24, 25, 28, 29, E: 776, 78, 80, 81, 83, 84, 86—90, 94, 98—801, 04, 05). *Clasa IX-a.* Rădescu N. Nicolae (1992, 98, 2001, 04—06, 08, 10, 11, 21, 23, 54).

HORLEŞTI (Iaşi). — Înv. Grăjdeanu Petre (1957, E: 735, 38, 45, 47—50, 52, 53, P).

IANCA (Galaţi). *Clasa IX-a.* Bănică Radu (1938, 77, 2045, 59, 113, 13, 20, 23—26, 29, 31, 34, 51, 62, 64, 73—75, 77, 83, 84, 93), Caracoti Stere (2086, 92, 94, 100, 04, 11, 12, 18, 20, 24, 26, 27, 29, 31, 34, 35), Caraman M. Gheorghe (1938, 77, 2041, 53, 54, 59, 100, 12, 13, 18, 20, 23, 25—29, 31, 34, 35, 64, 67, 73—75, 77, 83, 84, 93), Iancu M. Ovidiu (2109—14, 18—20, 23—29).

IAŞI. — *Student* Rotaru Constantin (1972—77, 82, 83, 90, 92—98, 2000—07, 09—11, 18, 20, 21, 41, 42, 47, 49, 50). *Şcoala militară. Clasa X-a.* Păuna I. Marin (1998, 2006, 32, 111, 13, 18, 23, 25, 26, 28, 29), Panţuru D. (1966, 92—98, 2000, 01, 03, 05—08, 10—12, 14, 17—21, 23, 25—27, 32, 39), Dragna Zenovia (E: 747, 49, 50, 52, 55, 65—67, 69, 71—76, 80, 83). *Şcoala medie « M. Sadoveanu » Clasa IX-a.* Copel Iosel (2116, 20, 21, 23, 25, 64, 70, 74, 75, 90), Cuşmaru Ilie (1992, 2023, 53, 54, 63, 68, 69, 76, 79, 86, 92, 102, 11—14, 16, 18, 20, 22, 25, 27, 29), Cuza Constantin (2011, 42, 86, 91, 102, 04, 11, 13, 16, 18, 20, 25, 27, 29, 37), Feldman Milu (2042, 43, 50, 82, 104, 12, 13, 18, 20, 31), Iţicovici Michel (2041—43, 48, 49, 53, 54, 62, 71, 104, 11, 28, 31). *Clasa X-a.* Roman Valeriu (1992, 97, 2006, 07, 10, 11, 21, 24, 42, 45, 48, 53, 63, 64, 92, 93, 102, 04, 09—11, 18, 20, 23, 25, 29, 35, 42, 43). *Şcoala medie de băieţi nr. 2. Clasa VII-a.* Aramă Valeriu (E: 765, 67, 73—76, 83, 84, 815). *Clasa IX-a.* Creţu Mihai (2041—43, 45, 48, 50, 54, 64, 65, 79, 86, 92, 94, 100, 02, 04), Diţu Emil (1992, 2004, 21, 24 43, 55, 92, 111—14, 18, 25, 29), Homutescu Condrat (2042, 45, 54, 59, 63, 79, 81, 92, 102, 04, 05, 51, 61), Mihalache Adrian (2109—14, 17—20, 23, 25—32, 35, 46, 55), Popescu Claudiu (2042, 48, 54, 55, 59 62, 65, 71, 82, 92, 100, 04), *Clasa X-a.* Circiu Vasile (1992—98, 2001—03, 06—11, 15, 20—24, 32, 33).

LUGOJ. — *Clasa IX-a.* Boroancă Ion (2050, 62, 100, 09—12, 16, 18, 20, 23—36, 51, 64, 84), Daba Dumitru (2004, 05, 08, 12—43, 45, 50, 53, 62, 100, 05), *Flora Dorel* (2001, 04

05, 08, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 41—43, 45, 48—50, 53, 54, 56, 59, 62, 65, 78, 81, 82, 92, 100—02, 05, 11—14, 18—20, 23, 29), Păpuşoiu Gh. (1903, 2002, 04, 05, 11, 21, 23, 42, 43, 45, 48, 53, 54 86, 92, 102—04, 09—14, 16, 18, 20, 21, 24—26, 29, 32, 46).

MORENI (Ploeşti). *Clasa X-a.* Mirea Constantin (1992, 97, 2005, 21, 59, 100, 04, 11, 18, 20, 24-26, 28, 29, 37).

NĂSĂUD. *Clasa VIII-a.* Istrate Tiberiu (2006, 42, 77, 111, E: 765—67, 74, 76, 81, 84, 98).

NEGREŞTI (Baia Mare). — *Clasa X-a.* Berinde Gh. (2109, 11—14, 16—20, 25, 28, 29, 35, 38, 70—73, 75, 77—79, 86).

OCNA MUREŞULUI (Cluj). — *Clasa IX-a.* Bucurenciu Sorin (2017, 42, 51, 53, 54, 64, 81, 82, 100, 02, 09—16, 18—37, 56, 61), *Rusu Mihai* (2004, 05, 07—09, 21, 23, 34, 35, 37—39, 42, 53, 54, 64, 81, 82, 86, 92, 97, 100, 02, 04, 09—14, 18—33, 35—37, 56, 61, P).

ODOBEŞTI. — *Clasa VIII-a.* Istrate Cornel (1988. 97, 98, 2006, 10, 90, 120, 28, 32, 51, 82, E: 750, 83, 86, 89), Tîrnăcop Tamara (1936, 48, 55, 97, 98, 2006, 19, 23, 24, 49), Tibrea Cornelia (1948, 97, 98, 2006, 08, 10, 21, 23, 24, 42, 43, 49, E: 783, 85). *Clasa IX-a.* Gaicu Emilia (1956, 92, 97, 98, 2005, 06, 10, 14, 15, 23, 24, 27), Pătrunjel Sorin (1948, 56, 60, 98, 2006, 10, 15, 21, 23, 24, 49). Clasa X-a. Bratoşin Ion (1993, 98, 2006, 08, 21, 24, 43, 54, 63, 65, 79, 86, 111, 29), Palade Anica (1997, 2003, 07, 08, 41—43, 54, 88, 89, 111—12, 23, 29), Robu Aurel (1997, 98, 2003, 06—08, 21, 42, 43, 2115, 19, 21, 23, 29), Savin Maria (1996, 97, 2001, 08, 42, 59, 109, 11, 16, 17, 23, 25, 28, 28, 29), Constantinescu Tanţa (1948, 60, 93, 97, 98, 99, 2006, 10, 15, 24, 42, 43, 49, 118, 19).

ORADEA *Clasa IX-a.* Cristina Gh. (1997, 20 05, 10, 27, 64, 110, 11, 18, 20, 24, 25, 27, 32), Vulpaş Doina (2111—14, 16, 18, 25, 26, 29, 64, 65, 67, 83, 84).

ORĂŞTIE. — *Clasa V-a.* Oprişa Aurel (2042, 56, 58, 64, 70, 86, 104, 27, 28, 38).

ORAŞUL STALIN. — *Studenţi: Ioniţă Teodor* (2040—45, 47—54, 56, 57, 59, 62, 65—67, 69, 74, 75, 77—79, 82, 84, 86, 88—90, 93—96, 100—05, 07, 09—18, 20—38, 41—48, 50, 51, 53, 55, 56 58, 62), Tofan Liliana (2003—06, 08—10, 20, 21, 45, 51, 54, 79, 100, 04, 09, 11, 13, 16, 18—2225, 27, 29, 34), *absolvent* Mermel Ortwin (1992, 96, 97, 2001, 04—08, 10, 42, 43, 45,). Clasa VIII-a. Stoian Mircea (1998, 20, 42, 43, 45, 48, 53,79, 82, 100, 02, 04).

PĂTÎRLAGELE (Ploeşti). — Clasa X-a. Olaru Elefterie (2112, 17, 20, 26, 31, 53, 84, 86, 93).

PIATRA NEAMŢ (Bacău). — *Clasa VIII-a. Hodor P. Const.* (2042, 103, 11, 18, 19, 21, E: 762—68, 70—73, 76, 78, 80, 81, 84, 87—89, 93, 801, 04, 05). *Clasa X-a.* Mitu S. Ion (2047—49, 50, 52—54, 56, 62—64, 65, 78, 79, 94, 104, 09—25, 27—35, 42—44).

PETROŞANI. — *Student Pleniceanu Ion* (1938, 2109, 11, 13, 15—18, 21, 23, 25—32, 35, 37, 38, 44, 48, 51, 53, 61, 70, 71, 73, 75, 77—79, 83, 84, 87, 93—95, 200, 07, 08, P).

PITEŞTI. — *Clasa IX-a.* Baltac Ion (1992, 2 042, 59, 109, 11—14, 18, 20, 24, 27, 29, 37), Rădulescu D. Marin (1998 2045, 55, 59, 86, 109, 11—14, 18, 20—23, 35, 37, 61), Sorescu D. Gh. (2001, 05, 06, 10, 22, 42, 50, 54, 104, 11—14, 18, 20, 24, 26). *Clasa X-a* Marin Ion (1992—98, 2000—07, 09—11, 14—17, 20—22, 24, 26, 27, 29, 32—34). *Absolvenţi:* Chiţulescu Iulian (2045, 83, 88—90, 104, 09, 11, 13, 18, 20, 23, 25, 29, 36, 38). Manda Simona (1947—49, 51, 55—57, 60—64), Măriuţa Maria (1980, 97, 2042, 43, 45, 50, 51, 54, 62, 88—90, 111, 16, 23, 27, 31, 63, 75, 77, 79, 86, 212).

PLOEŞTI. *Clasa VII-a.* Blebea Stelian (E: 776, 78, 80, 90, 98, 801, 04, 05, 11, 13), Constamtinescu Emanoil (E: 776, 78, 80, 81, 90, 98, 804, 05, 11, 13), Dumitrescu Viorel (E: 754, 76, 78, 80, 802, 04, 05, 11, 13, 18), Goşman I. Iulian (E: 776, 80, 90, 98, 805, 13), Nicolae Viorel (E: 776, 80, 86, 88, 99, 802, 04, 05, 10, 13), Popescu C. Gheorghe (E: 776, 80, 81, 87, 90, 98, 804, 11, 13, 18), Radianu Constantin (E: 799, 801, 08, 11, 13, 18), Sabău Nicolae (E: 776, 77, 90, 98, 99, 801, 04, 05, 11, 18), Timuş Dan (E: 754, 76, 80, 87, 90, 98, 99, 801, 05, 11, 13, 18), Vasilache N. Teodor (E: 795, 97-99, 801, 08, 10, 11, 13, 18). *Clasa VIII-a.* Catrava Mihai (2053, 102, 05, 09, 11, 18, 19, 25, 28, 32, E: 776, 78, 84, 87, 93, 96, 98, 809), Ciobanu Romeo (2021, 42, 53, 109, 11, 18, 20, 25, 27—29, E: 771, 74, 76, 78, 80, 86, 90, 94, 97, 98, 800, 01, 05), Ciortan Vasile (1959, 92, 97, 98, 2006, 08, 11, 16, E: 724, 27, 30, 44, 45, 54, 55, 68, 72, 74, 89, 95), Constantin Gelu (2006, 42, 109, 20, E: 776, 84, 86, 94, 801, 18), Constantinopol Alex. (1997, 2006, 16, 17, 23, 42, 48, 49, 56, 69, 73, 75, 86, 104, E: 766, 67, 71—74, 76, 78, 79, 88), Crăciun Gh. Nicolae (2102, 04, 29, 32, 51, 75, 93, E: 776, 83, 84, 86, 93, 808 10, 18), Crasan Octavian (2104, 09, 11, 36, E: 776, 80—82, 90, 94, 97—99, 801, 04, 05), Dimoviceanu Paul (2109, 11, 24, 26, 29, E: 768, 72, 74, 76, 83, 89, 94, 97—99, 801, 04), Dumitrescu Gh. Mircea (1960, 61, 63, 71, 76, 77, 2111, 20, 28, 75, 77, E: 794, 97-99, 805), Dumitrescu Viorel (2042, 78, 100, 04, 11, 18, 20, 25, 29, E: 754, 76, 78, 80, 84, 86, 87, 94, 801, 02, 04, 05, 11, 13, 18), Ghioca Şerban (2111, E: 765, 76, 71, 72, 80, 90, 94, 98, 801, 04), Ionescu I. Ion (1955, 60, 2109, E: 774, 76, 80, 90, 98, 811, 13), Magdu Marian (2042, 53,

81, 109, 11, E: 765, 66, 71, 73, 74, 76, 78, 80, 81, 86—88, 90, 91, 98, 99, 801), Mihai Gheorghe (2006, 100, 11, 18, 24, 27, 29, 31, E: 738, 67, 71, 74, 76, 97, 801), Minasian Mihail (1998, 2109, 11, 18, 22, 24, 29, 31, E: 813), Pantelimonescu Dan (2124, 26, 32, 50, E: 780, 83, 89), Popescu Adrian (2042, 48, 104, 09, 11, 25, 26, 75, E: 776, 80, 82, 92, 94, 813, 17, 18), Rădulescu Romulus (2024, 86, 104, 11, 36, E: 767, 74, 76, 80, 82, 90, 97—99, 801, 05), Rissdörfer Dionisie (2109, 11, 18, 20, 24, 25, 29,E: 776, 78, 80, 84, 90—92, 94, 98, 99, 801, 02, 04), Saviuc Andrei (E: 765, 66, 71, 72, 76, 86, 90, 99, 801, 10, 11, 13), Sîrbu C. Traian (2053, 102, 11, 25, 28, 56, E: 776, 80, 81, 90, 98, 99), Spătaru Belu (E: 776, 78, 80, 81, 806, 07, 08, 10, 11, 13,) Tănăsescu Anton (2042, 79, 102, 09, 11, 24, 25, 31, 36, E: 776, 78, 89, 96—98, 800—02, 04), Taga S. Mihai (20 42, 48, 53, 79, 86, 94, 100, 02, 04, 09, 11, 18, 20, 24—27, E: 776, 80, 82, 84, 86, 87, 89, 90, 94, 97, 98, 801), Văduva A. Victor (2069, 86, 109, E: 767, 74, 76, 99, 801, 04, 05), Voinescu Nicolae (2102, 05, 07, 09, 11, 18—20, 24—26, 28, 32, 50, 56, E: 775, 76, 78, 80, 83, 84, 87, 89, 93, 96, 98, 809). *Clasa IX-a.* Apostolescu Mihai (2111—13, 15, 17, 18, 20, 24, 26, 31, 32, 35, 65, 66, 75, 77, 93), *Baltag Vasile* (2053, 55, 66, 69, 75, 77, 85, 103, 05, 09—16, 18—21, 23—29 31, 32, 34, 35, 37, 42, 44, 49—51, 53, 56, P), Bogdan I. (1992, 97, 2042, 57, 86, 92, 109, 13, 21, 25, 27, 28), *Bogdan P. Mircea* (2109—13, 15—32, 34—36, 62, 64, 65, 67, 69, 71, 73, 74, 76, 78—86, 93, 210, 11, P), Bucurescu Vitalian (2059, 86, 102, 04, 11-13, 18, 20, 24, 25, 29, 75), Căsăndroiu C. (2050, 54, 110—14, 18—21, 23—28, 29, 31, 32, 34, 37, 63—65, 67, 71, 73, 75, 79, 82, 83, 91, 200), Cojocaru P. Alex. (1992, 2023, 86, 102, 23—25, 42, 73, 75), Constantinescu Gh. (1992, 97, 2006, 14, 23, 41, 50, 54, 64, 65, 78, 79, 102, 09, 11, 13, 20, 25, 31, 37), Constantinescu Vasile (2001, 05—08, 10, 23, 42, 48, 50, 54, 81, 86, 92, 102, 04, 11, 12, 18, 20, 21, 23—25, 92), Curcăneanu N. (1955, 56, 92, 97, 2023, 42, 43, 54, 86, 102, 18, 20, 24, 25), Drăghicescu Radu (1992, 97, 98, 2006, 23, 42, 50, 65, 79, 92, 102, 04, 13), Dragomirescu Mihai (1997, 2006, 11, 14, 23, 41, 42, 47, 48, 54, 63, 104, 09, 11, 13, 21, 27, 28, 31), Dumitrescu Marian (2006, 10, 11, 21, 22, 24, 48, 54, 120, 24), Fidel N. Nicolae (2050, 54, 110—13, 18, 20, 21, 23—26, 29), Glain Haim (1992, 98, 2006, 10, 21, 42, 43, 111, 28, 29), Georgescu P. Adrian (1992, 97, 2005—07, 10, 15, 17, 21, 42, 102, 04, 25, 28), Georgescu Emil (1948, 50, 51, 56, 77, 2042, 54, 86, 102, 04, 18), Gumeni Corneliu (2042, 48, 50, 88, 109, 11, 12, 20, 24, 25), Ilie Gh. Nicolae (2004, 06, 07, 23, 42, 43, 54, 59, 60, 68, 82, 104, 09, 11, 13, 18, 20, 22-24, 31), Ionescu Lucian (1992, 97, 2006, 23, 50, 65, 68, 79, 81, 82, 86, 92, 100. 02, 04, 09, 11, 13, 18, 20—22, 24—26, 31, 32, 37), Lăzăroiu Const. (1993, 95, 96, 2006, 07, 09, 20, 23, 28, 32, 33, 113, 35), Lipcan Gh. (2041—44, 49, 51, 52, 62, 79, 81—83, 100, 04), Lungu Liviu (2042, 43, 47, 48, 50, 53, 54, 59, 65, 86, 92, 100, 02, 04, 10, 11, 13, 26, 32, 43, 48, 52), Manolescu Dumitru (1998, 2109, 11, 13, 20—22, 24, 25), Marinescu Ion (1948, 55, 56, 62, 97, 98, 2042, 43, 54, 86, 102, 04, 18, 20, 24), Mihăilă Ion (1992, 97, 2006, 23, 42, 43, 86, 92, 102, 04, 09—11, 13, 18, 20—22, 24, 25, 37), Minasian Eduard (1996, 98, 2065, 66, 100, 09, 13, 18, 20, 29), Nedelcu Florin (2042, 43, 50, 81, 86, 102, 11, 13, 18, 20—22, 24—26, 31, 32), Niculescu Dorin (1992, 2006, 43, 92, 102, 04, 11, 13, 21, 22, 24—26), Niculescu Marian (1992, 2001, 04, 06—08, 42, 43, 53, 54, 68, 81, 111, 18, 21, 24), Oţoiu Ion (2043, 53, 54, 59, 68, 109, 18, 21, 27, 29), Popescu St. Constantin (1956, 98, 2001, 06, 10, 43, 48, 50, 53, 57, 59, 80, 81, 92, 102), Possa Alexandru (1992, 97, 2003, 42, 43, 57, 59, 82, 86, 92, 109, 13, 18, 21, 25, 27, 28, 64, 200, 03), Radu Ciprian (1992, 97, 2006, 11, 14, 41, 42, 47—49, 109, 11, 12, 21, 27, 28, 31), Rusu Dan (2002, 05, 11, 14, 41—43, 45, 47, 48, 50, 52—54, 57, 58, 63—65, 68, 77—79, 81, 82, 96), Savu Naum (1992, 97, 2007, 23, 48, 50, 81, 86, 92, 102, 09—11, 18, 21—25, 37), Stanchevici Bogdan (1992, 97, 2042, 86, 92, 102, 11—13, 18, 20, 22, 24—26, 29), Stănescu H. Constantin (1992, 97, 2006, 23, 42, 43, 86, 92, 102, 04, 09—11, 13, 18, 20—25, 31, 37), Stănescu Teodor (1992, 2023, 42, 86, 102, 24, 25), Tomulescu Petre (1992, 2006, 23, 42, 43, 50, 86, 102, 04, 24, 25), Tudorănescu N. (1996, 98, 2001, 59, 65, 66, 100, 09, 11, 13, 18, 20—24, 46), *Văgăunescu George* (1992, 95—98, 2001—07, 09, 10, 15, 17, 21, 23, 33, 40—43, 45, 50, 52—54, 59, 62, 65, 78, 79, 82, 86, 88, 89, 92, 94, 100, 02, 04, 05), Vasile Marin (1992, 97, 2006, 42, 43, 54, 57, 77, 71, 82, 86, 92, 102, 04, 09, 13, 18, 21, 25, 27, 28), Vieru Teodor (2001, 06, 23, 50, 54, 56, 59, 65, 68, 81, 92, 109, 11, 13, 18, 21—25, 26, 31, 32), *anonim* 1 (2042, 111, 18, 24, 25, 29, 73, 88 (E: 780, 90, 98, 813, 18), *anonim* 2.(2111, 18, 29, 73, 82, E: 798, 801, 05, 11, 13), *Şcoala medie nr.*3. *clasa VIII-a.* Vasilescu D. Petre (E: 762, 71, 78, 80, 87, 88, 99, 801, 03, 05); Şcoala de 7 ani nr. 24. Clasa VI-a. Gheorghiu A. Nicolae (E: 731, 36, 54, 62, 64, 71, 73, 75, 76, 805).

PUCIOASA (Ploeşti). Clasa VII-a. Erhan Constantin (E: 747, 49, 50, 52, 66, 71, 72, 74, 76,80, 82, 90). Clasa .X-a Zegheru N. Ion (2109, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 24—26, 28, 29, 32). Clasa X-a. *Bucur D. Gheorghe* (2000—12, 14, 15—25, 27, 32—34, 40—54, P), *Frăţiloiu Gh.* (2041—43, 45, 48, 50, 53, 54, 59, 63, 79, 83, 88, 90, 92, 100, 02, 04, 05, 11—14, 16—20, 25—29. 31, 38, 211,P), *Stan N. Dumitru* (1994, 95, 2011, 17, 18, 22, 25, 40—43, 45, 47, 48, 50—52, 54, 56, 59, 62, 64, 65, 78, 79, 81, 84—86, 88, 89, 92—94, 97, 100, 02,— 04).

RĂDĂUŢI. Clasa X-a. *Iftimie Vasile* (1992, 94—98, 2000—02, 14—22, 40—45, 48—50, 53—54, 56, 59, 62, 63, 65, 69, 74, 75, 77—79, 84—86, 91, 94, 96, 97, 100—08).

REŞIŢA. *Clasa VII-a. Jumanca Rodica* (E: 758, 62, 63, 66, 67, 70, 71, 73, 74, 76, 80, 822, 90).

RÎMNICU SĂRAT. Clasa X-a. *Ciobănaş Filaret* (1992, 97, 98, 2000—02, 05—12, 15—17, 19, 31, 34).

RÎMNICU VÎLCEA. Clasa VIII-a. *Constantinescu Ion* (1997, 2109, 11, 24, 25, 29, 36, 73, 91, E: 745, 76, 80, 94, 97, 801, 04, 05, 10, 11, 13), *Neguţ Nicolae* (2023, 86, 111, E: 765—67, 71—74, 76, 78, 80, 95, 97, 98, 801); Clasa IX-a. *Bulucea D. Const.* (2003, 07, 47, 59, 86, 107, 09—14, 18—37, 46, 61), *Constantinescu I. Const.* (2042, 48, 102, 09, 11, 20, 24, 25, 29, 31, 35, 64, 73, 75, 79, 84, 86, 90, 91, 93), *Ghiba Alex.* (1995, 2006, 21, 24, 42, 92, 111, 18, 20, 23, 24), *Mărgăritescu Corneliu* (2109, 11—13, 18—21, 23—29, 31, 33—35, 63, 64, 72, 73, 75, 77, 79, 81, 84, 86, 90, 91, 93), *Poajgă Constantin* (2040—42, 44, 45, 49, 63, 64, 65, 79, 86, 88, 89, 100), *Smărăndoiu Petre* (2042, 43, 45, 94, 2111, 20, 23, 26, 29, 32, 73, 82, 84, 85). Clasa X-a. *Enescu Nicolae* (1773, 2040, 41, 48, 54, 60, 62, 65, 83, 86, 98, 105, 09, 11—21, 23—26, 29—31, 33—35, 38, 42, 43, 46, 51, 56), *Paulescu N. Dan* (2048, 60, 83, 97, 98, 101, 09, 10—21, 23—26, 29, 30, 33—35, 38, 43, 50, 51, 86, 93, 204), *Sărătură Minodora* (2017, 23, 32, 42, 48, 54, 86, 94, 116, 21, 23), *Ţugulea Eugen* (1950, 67, 70, 71, 92, 93, 95—97, 2002, 10, 14, 15, 18, 21, 41—43, 45, 47, 49, 52—54, 59, 62, 79, 83, 86, 100, 02, 04), *absolvent Cocoş Em.* (1980, 84, 92, 94, 95, 97, 2000, 03—11, 15, 20, 21, 23, 42, 43, 45, 47, 48, 53, 54, 59, 62, 86, 98, 101, 02).

ROMAN. Clasa VIII-a. *Cănilă C. Gh.* (2109, 11, 18, 20, 26, 73, E: 776, 801, 04, 08, 12, 08, 12, 13, 18), *Ilioiu C. Const.* (2042, 53, 82, 100, 02, 04, E: 776, 78, 84, 89, P), *Ricinski Cezar* (2049, 53, 100, 09, 11 28, E: 780, 83, 89, 90). Clasa X-a. *Murărescu Gh.* (1938, 46, 60, 66, 72—77, 80, 81, 83, 84, 90, 92—98, 2000—17, 20—22, P).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa VIII-a. *Dincă Ion* (E: 727, 30, 55, 57, 89, 808, 11—13, 15, 18), *Grecu Anton* (2016, 94, 97, 102, 04, E: 742, 45, 62—68, 71, 72, 74, 76, 79—82, 84, 87, 89, 90, 92, 94, 95, 97-99, 801, 04, P).

SIBIU. *Alexa Ioan* (1992—95, 97, 2006, 10, 11, 17, 21, 24, 27, 40, 42, 45, 48, 50, 81, 84, 86, 88, 90, 98, 2100, 04, 08—12, 16, 18, 20, 23, 25, 26, 29, 35, 48, 68, 75, 203), *Pupăzan V. Nicolae* (2068, 79, 81—84, 86, 88, 90, 92, 94, 96—102, 04, 07, 16, 18—21, 23, 25—36, 42, 44, 46—48, 50, 51, 55, 62, 63, 65, 67—75, 77—80, 83, 84, 86, 87, P), *Rosenberg Aureliu* (2001, 06, 08, 10, 11, 15, 17, 21, 23, 24).

SIGHET. Clasa VII-a *Tomoiagă Doru* (2070, 118, 19, 25, E: 778, 90, 94, 98—99, 801, 04, P), *Marinca Simion* (2042, 45, 56, 111, 12, 18, 19, 22—27, 30, 31).

SIMERIA (Hunedoara). Clasa X-a. *Ardelean Dimitrie* 1992, 97, 2008, 15, 17, 21—43, 28).

SINAIA. Hoitan Cornel (2006, 10, 21, 42, 53, 111, 20, 23, 25, 32, P).

SLATINA. Clasa X-a. Bărbulescu Marcel (2006, 10, 11, 16, 21, 23, 26, 27, 43, 48, 86, 93, 100, 02, 05, P), Şerbănescu N. Tiberiu (2041—43, 45, 48, 50, 53, 54, 56, 59, 60, 64, 65, 86, 88, 89, 92, 93, 98, 100, 02, 04).

TECUCI. Clasa VII-a. Chişcaru Nicolae (E: 764—66, 71, 72, 74, 76, 80, 84, 86, 88, 90, P). *Clasa VIII-a.* Druţă Ion (2109, 11, 18—20, 25, E: 762, 65—67, 71, 74, 76, 78, 80, 84, 94, 98, 99, 801). *Clasa IX-a.* Vasilică Const. (2034, 48, 63, 70, 73, 104, 11—14, 18—26, 29, 33—37, 61, 64, 65, 73—75, 78, 79, 88, 91, 93). Clasa X-a. Andrei Valeria (2015, 20, 42, 83, 100, 04, 11, 15, 16, 18, 25, P).

TIMIŞOARA. *Şcoala medie nr.* 1. Clasa VIII-a. Toma Corneliu (2049, 100, 02, 04, 09, 11, 24, 25, 29, 31, E: 776—78, 80, 83, 86, 89—92, 94, 98, 801, 04, 05). Clasa X-a. Popa Laurenţiu (2009, 18, 20, 21, 41—43, 45, 50, 53, 54, 59, 65, 78, 92, 100, 02, 04, 07, 11, 16, 29, 31). *Şcoala medie nr.*5. Clasa X-a. Nerodea Tiberiu (1993, 96, 2005, 07, 11, 109—14, 20, 25, 31), Vasilievici Alexandru (2008, 20, 53, 79, 88, 94, 104, 11, 12, 16—18, 20, 21, 23, 25, 27—29, 31, 34, 35, 38). *Şcoala de 7 ani nr.* 25. Clasa V-a. Gora Horaţiu (1976, E: 709, 10, 15, 25, 27, 35, 37—39, 44, 49, 50, 58, 62—64, 74).

TÎRGOVIŞTE. *Clasa VIII-a.* Cănuţă Gh. Vasile (2082, 118, E:765—67, 71, 74, 76, 87, 804, 05,), *Cîrnu Mircea* (1920, 31, 35, 40, 51, 56, 71, 73, 75—77, 90, 92, 98, 2004—07, 10, 11, 23, 32, E: 772, 43, 45, 53, 54, 57, 58, 60, 63, 65, 67, 70, 71, 73, 75), Iordache V. Ion (2006, 111, 18, 25, E: 765, 66, 71, 72, 74, 76, 80, 98, 801), *Popescu Mircea* (2006, 10, 21, 23, 24, 42, 86, 102, 04, 09, 11, 18, 20, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 73, 75, 91, 93, E: 756—58, 65—67, 71, 72, 74, 75, 80, 83, 84, 86—91, 94, 97—99, 801, 03—06, 08, 10—13, 16—18). *Clasa X-a.* Dumitrescu Gh. Petre (2001—03, 08, 10, 41, 50, 54, 59, 111, 17, 20, 23, 25, 26, 29), Tudor N. Constantin (1802, 2002, 45, 48, 50, 52, 64, 79, 82, 86, 92, 93, 98, 101, 09—14, 17—36, 38, 51, 61).

TÎRGU—JIU. *Clasa VII-a.* Velicescu T. Mircea (1947, 54, 55, 63, 71, 74, 76, 92, E: 747—52, 54, 55, 57—59). *Clasa VIII-a.* Aniţescu A. Nicolae (1992, 93, 96—98, 2000—06,

09—11, 15, 20, 22, E: 762, 64, 67, 68, 70—74, 76). *Clasa X-a.* Catalina Jean (2005, 86, 89, 109, 11—14, 16, 18, 20, 23, 24, 26, 27, 34, 35, 38, 44), Neagoe Petre (1992, 96, 97, 2001—08, 10, 11, 21, 32), *Popescu A. Iulian* (1900, 92, 96, 2005, 07, 22, 29, 41, 43, 45, 50—54, 66, 70, 79, 83, 90, 92, 94, 100, 02, 04, 07, 11—14, 16—20, 23—26, 29, 31, 38, 44).

TÎRGU MUREŞ. *Clasa VIII-a.* Curtifan P. (1997, 2006, 11, 12, 24, E: 764—67, 69, 71—75), Fleşeriu Călin (1983, 92, 94, 97, 98, 2006, 10, 11, 14, 22, 24, E: 684, 731, 54—60, 65—69, 71—75), Hărşan Laurenţiu (1994, 98, 2006, 11, 14, 19, 21, 23, 27, E: 765—67, 69, 72, 74, 75), Matei Didina (2006, E: 757, 58, 62, 65, 66, 68, 71, 72, 74), Vocerdi Teodor (1992, 97, 98, 2006, 14, 22, 24, E: 765—67, 69, 71, 72, 74, 75). *Clasa IX-a.* Tudor Sp. Tiberiu (1992, 94, 97, 2003—07, 09—11, 21, 34, 35, 37). *Clasa X-a. Hoţa Marcel* (1943, 93, 96—98, 2001, 03—06, 10, 14—16, 20—23, 27, 32, 41—43, 45, 50, 51, 54, 59, 60, 62, 64, 78—90), *absolventă* Paşca Magdalena (2003, 08, 20, 24, 55, 112, 19, 24, 31, 38, 75, 77, 78, 83, 84, 86, 207, 11, P).

TÎRGU NEAMŢ, *Clasa X-a.* Focşeneanu Ion (2009, 40, 46—53, 59, 60, 63—66, 78, 81—83, 86—90, 94, 97, 100, 02, 04, 05), Răileanu Mihai (2040, 47—53, 59, 60, 65, 78, 86, 94, 97, 100, 02, 04, 09, 11—18, 23, 25, 28, 29, 31, 38).

TÎRGU OCNA. *Clasa IX-a.* Herşcovici Clara (1992, 2001, 04, 05, 21, 42, 94, 111—13, 18, 24, 25, 27, 28).

TÎRNĂVENI. Clasa VIII-a. Neagu Horia (2111, 18, 21, E: 747, 50, 52, 62, 66, 71, 74, 76, 80, 82, 98, 801, 03).

TRUSEŞTI (Suceava). Clasa X-a. Cihan I. Isac (1995, 97, 2001, 03, 08, 24, 41, 42, 48, 54, 55, 92, 111, 13, 18, 22—25, 200), Ciubotaru C. Constantin (2058, 63—66, 68, 71, 115, 32—38, 47, 53, 61, 68, 69, 71—80, 82—86, 91, 95, 207, 11, P).

TURDA. Clasa X-a. Abraham Fabian (1948, 51, 56, 61, 72—76, 97, 2006, 10, 32, 33, 42, 43, 50, 81, 83, 89, 102).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Cojocaru Napoleon (2048, 54, 79, 86, 110—13, 18, 25, 29, 37, 56, 61, 65, 73—75, 79, 84, 91, 201), Damalan Maria (1992, 95, 97, 98 2001, 04—06, 08, 10, 11, 17, 21). Clasa X-a. Niculescu M. Iulian (2113, 15, 20, 24, 33—35, 37, 39, 43, 53, 56, 60, 70—79, 82—86, 211, 14). Absolvenţi: Drăguşin Mircea (2111—35), Marin Năstase (2109, 11—14, 16, 17, 19, 20, 23, 25, 26, 29—32, 51).

TURNU SEVERIN. Clasa VIII-a. Suici Gheorghe (2109, 11, 18, 24, 26, 27, 29, 73, 75, E: 794, 98, 99, 801, 15). Clasa X-a. Ionescu Radu (2002, 04—06, 09, 41, 98, 110—13, 16—21, 23, 25—29, 32—35, 38, 43, 46, 55, P).

ŢĂNDĂREI (Constanţa). Absolvent Pană Gh. (1990, 2006—09, 42, 43, 45, 48, 50, 109, 11, 16, 42).

URLAŢI (Bucureşti). Clasa X-a. Tănase Nicolae (1995, 98, 2001, 03, 06, 07, 10, 21, 43, 53, 100, 02, 11, 16).

URZICENI. Absolvent Turiga M. Const. (2047, 52, 64, 78, 92, 94, 109, 10, 14, 20, 26, 32, 35, 36, 49, 62, 63, 66, 67, 69, 70, 72—75, 77, 79, 84, 86, 90, 93, 200).

VASLUI. Clasa VIII-a. Barbu Viorel (1997, 2011, 42, 48, 82, 84, 100, 02, 09, 16, 46, 47, 56). *Şcoala de 7 ani Albeşti.* Clasa VII-a. Barbălată Virgil (E: 762, 64, 65, 67, 71, 76, 80, 90, 802), Roşca Dumitru (2118, 27, E: 749, 58, 64, 70, 74, 76, 87, 90, 804, 05).

VÎNJU MARE (Craiova). Absolvent Popescu I. Paul (2111, 12, 18, 20, 24, 29, 30, 38, 72—75, 77, 86, 211).

VRANCEA (Galaţi). Clasa VIII-a. Tutoveanu Emil (1998, E: 754, 64—67, 70, 71, 74, 76, 80).

ZALĂU (Cluj). Clasa IX-a. Moroti Cornel (2042, 43, 81, 111, 13, 14, 18, 29, 31, 36, 37). Clasa X-a. Farcaş V. Beniamin (2100, 02, 09, 18, 23, 25, 27—30, 35, 72, 83, 84, 86).

Pînă la 31 decembrie 1956 se mai primesc soluţii la problemele 2289, 2305, 2314, 2315 şi următoarele, iar de la elementar, începînd cu E: 851 şi următoarele.

TULAJDONA

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— Rezolvarea fiecărei probleme trebuie făcută *separat*, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme *pe aceiași foaie*. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de *ordine* al problemei, enunțul *complet* și numele propunătorului. — După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț *numele, clasa* și *școala* unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică, iar pe adresă să menționați: *Redacției GMF — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele *trei numere apărute.*

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat* după greutate, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor pe anul 1957.*

— Pentru anul 1957 G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic de *zece* sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de *soluții*, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună probleme numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, *volumul* și *pagina* unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. *Figurile* trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante.* Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe *soluții diferite* pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante sub *formă de note.*

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « *Olimpiadelor de matematică și de fizică* » pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— Redacția *nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau *întîrzierea apariției* revistei se vor face Centrului de difuzare a presei, București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. - seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și altora; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F-seria B sînt epuizate.

— *Abonații* sînt anunțați pe această cale că pentru a primi nr. 1 din anul 1957 trebuie să se aboneze pînă la 1 decembrie 1956. *Costul abonamentului la G.M.F.-B* pe anul 1957 este de 10 lei anual, sau 1 leu exemplarul. Abonamentul se poate face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1956 — 1957

În atenţia tineretului din şcoli

— Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează « Olimpiadele de matematică şi de fizică 1956—1957» la care pot participa elevii şcolilor medii de zi şi serale, ai şcolilor pedagogice şi de învăţători, profesionale şi tehnice.

— Olimpiadele se vor desfăşura în patru etape:

— etapa I organizată pe şcoli, va avea loc pentru matematică şi pentru fizică, între 20 noiembrie şi 15 decembrie 1956;

— etapa II locală, va avea loc pentru matematică la 17 februarie şi pentru fizică la 24 februarie 1957;

— etapa III regională, va avea loc pentru matematică şi pentru fizică la 31 martie—1 aprilie 1957;

— etapa IV finală de ţară, va avea loc în Bucureşti, elevii admişi se pot prezenta fie numai la matematică, fie numai la fizică, la probele scrise (eliminatorii) şi orale care au loc între 29 aprilie şi 2 mai 1957,

— Elevii evidenţiaţi la ultimele două etape vor primi diplome, premii în cărţi etc.

ELEVI ŞI ELEVE PARTICIPAŢI CU TOT ENTUZIASMUL VOSTRU LA ACESTE OLIMPIADE DE MATEMATICĂ ŞI DE FIZICĂ!

ABONAMENTUL PE ANUL 1957 ESTE DE LEI 10 (12 NUMERE).

Volumul VII, nr. 11 (Gazeta Matematică şi Fizică seria B) noiembrie 1956

C. 1216—INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 Preţul Lei 1 exemplarul

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul VII — decembrie 1956

12

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
Anul VII, Nr. 12 — decembrie 1956

SUMARUL:

Pag.

1. *Teorema lui Farkas Bolyai despre egalitatea figurilor geometrice plane, de Alexandru Tóth, Cluj* 617
2. *Radiolocaţia de E. Rogai* 622
3. *Premiile «Gazetei Matematice şi Fizice» seria B pe anul 1956* 631
4. *Note matematice (19, 20)* 633
5. *Două experienţe de electrostatică după C. I. Jerehov* 634
6. *Cu privire la activitatea cercurilor de elevi din şcoli, de Ion Muşat* 636
7. *Probleme rezolvate (1984; 2096; 2097; 2240; 2248; 2264; E: 755; E: 756; E: 760)* 640
8. *Probleme propuse (2418—2443)* 649
9. *Chestiuni de examen (2444—2464)* 652
10. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani, (E: 899; — E: 909)* 654
11. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 656
12. *Tabla de materii* 665

ANUL VII 12 DECEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Atanasiu V., lector, redactor pentru fizică; **Bolangiu A.**, asistentă univ., **Ionescu Bujor C.**, prof. univ.; **Ionescu-Ţiu C.**, profesor, redactor pentru matematică; **Maurer I.**, lector, redactor pentru ediţia maghiară; **Muşat I.**, profesor; **Negulescu A.**, profesoară; **Petrovanu A.**, profesor; **Rădulescu N.**, profesor; **Sacter O.**, conf. univ., redactor responsabil; **Simionescu D. Gh.**, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL VII • Nr. 12 Decembrie 1956

Országos Múzeum Könyvtár TULAJDONA

TEOREMA LUI FARKAS BOLYAI DESPRE EGALITATEA FIGURILOR GEOMETRICE PLANE

ALEXANDRU TÓTH, Cluj

SEGMENTELE de dreaptă pot fi în anumite relații unele față de altele, relații care se desemnează prin cuvintele « egal », « mai mare » sau « mai mic ». În cazul a două segmente a și b poate avea loc numai una din relațiile:

$$1)\ a < b \text{ și } b > a;\ 2)\ a \equiv b;\ 3)\ a > b \text{ și } b < a.$$

(Aceste relații pot fi definite riguros, pornind de la axiomele de congruență.)

Comparînd două figuri geometrice plane bidimensionale, putem introduce noțiunile de egal, mai mare și mai mic. În acest caz se cere lămurirea noțiunii de *egalitate*.

În vederea lămuririi acestei noțiuni vom introduce noțiunile de *figuri congruente* și *figuri echivalente*. În cazul figurilor plane aceste noțiuni nu coincid în general; coincid însă, în cazul segmentelor.

Două figuri plane se numesc congruente dacă una din ele poate fi suprapusă peste cealaltă. Această definiție stabilește între figurile plane o relație care satisface condițiile care se pun noțiunii de « egalitate ». Aceste condiții sînt:

1. reflexivitatea: orice figură este congruentă cu ea însăși;
2. simetria: dacă o figură este congruentă cu o altă figură atunci și această ultimă figură este congruentă cu prima;
3. tranzitivitatea: dacă o figură este congruentă cu o altă figură și aceasta este congruentă cu o a treia figură, atunci și prima figură este congruentă cu figura a treia.

Dacă ne-am restrînge numai la noțiunea de congruență, atunci nu am putea compara între ele foarte multe figuri plane în vederea stabilirii relațiilor de egal, mai mare sau mai mic și în consecință, ele n-ar putea forma o clasă de mărimi.

Fie spre exemplu, o categorie de figuri: patratele. Considerăm ca fiind mai mari patratele care au laturi mai mari. Între ele deci este ușor de stabilit relațiile de egal, mai mare sau mai mic. În acest caz ne-ar ajunge numai noțiunea de congruență.

Dar să considerăm dreptunghiurile. Dacă am defini ca fiind egale numai dreptunghiurile congruente, se pune întrebarea, cum trebuie interpretată noțiunea de mai mare și de mai mic, pentru ca condițiile de comparare ale mărimilor să fie îndeplinite. Se poate arăta că în aceste condiții relațiile de mai mare și mai mic nu pot fi determinate în așa fel ca aceste figuri să formeze o clasă de mărimi.

În cele ce urmează ne vom mărgini la studierea *poligoanelor simple*. În legătură cu aceste poligoane, la determinarea relațiilor de egal, mai mare și mai mic, joacă un rol deosebit noțiunile de figuri *egale prin descompunere* și *figuri egale prin completare*. Aceste noțiuni prezintă un interes deosebit în axiomatica geometriei.

Un poligon se numește simplu dacă dintre laturile sale, în afară de laturile vecine, alte laturi nu se taie.

Legînd printr-o linie frîntă două puncte A și B ale poligonului simplu P, în interiorul poligonului (fig. 1), el se descompune în două poligoane P_1 și P_2. Acest lucru se mai poate exprima zicînd că poligoanele P_1 și P_2 compun poligonul P.

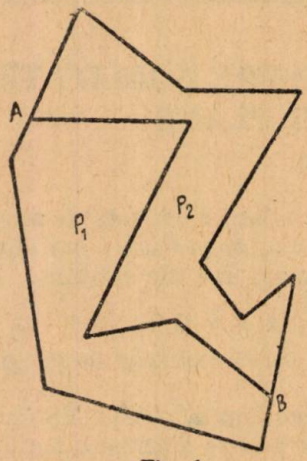


Fig. 1

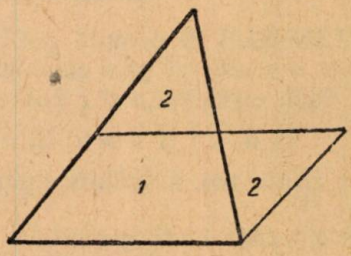


Fig. 2

Se zice că două poligoane simple sînt egale prin descompunere dacă ele pot fi descompuse într-un număr finit de triunghiuri congruente două cîte două. Căutînd o definiție mai intuitivă am putea spune că două poligoane sînt egale prin descompunere dacă unul din ele poate fi descompus într-un număr finit de bucăți din care poate fi compus celălalt poligon.

Iată cîteva teoreme de descompunere.

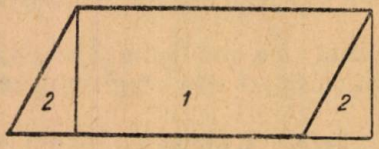


Fig. 3

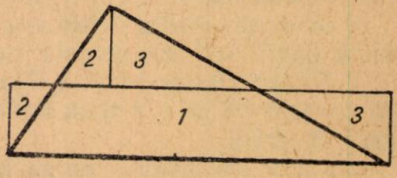


Fig. 4

T e o r e m a 1. Triunghiul este egal prin descompunere cu un paralelogram care are aceiași bază, iar ca înălțime jumătate din înălțimea triunghiului (fig. 2). Demonstrația este bine cunoscută.

T e o r e m a 2. Paralelogramul este egal prin descompunere cu un dreptunghi cu aceiași bază și aceiași înălțime (fig. 3). Demonstrația rămîne pe seama cititorului.

T e o r e m a 3. Triunghiul este egal prin descompunere cu un triunghi cu aceiași bază, iar înălțimea cît jumătate din înălțimea triunghiului (fig. 4).

T e o r e m a 4. Paralelogramele care au aceiași bază și înălțimi egale (*ABCD* și *ADEF*) sînt egale prin descompunere (fig. 5). Demonstrația este din nou lăsată pe seama cititorului.

Teorema 5 (a lui Pitagora). Patratele construite pe catetele unui triunghi dreptunghic sînt egale prin descompunere cu patratul construit pe ipotenuză. Demonstrația (descompunerea) din fig. 6 se găsește într-un comentar al lui Annairizi la Elementele lui Euclid, din anul 900. Este una din multele descompuneri cunoscute.

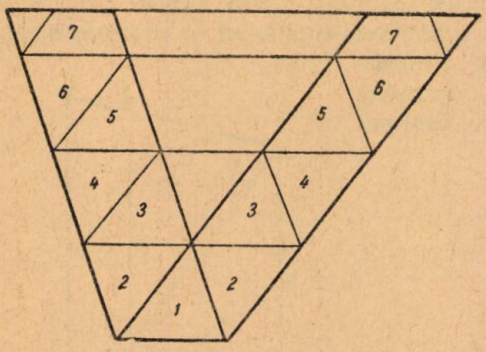


Fig. 5

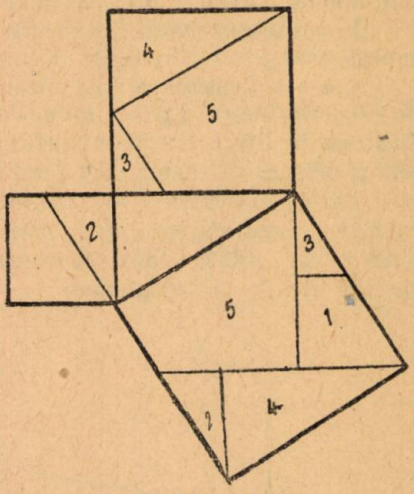


Fig. 6

Trecem la lămurirea noțiunii de egalitate prin completare.

Două poligoane simple sînt completabil egale (sau mai simplu, echivalente) dacă adăugîndu-le poligoane congruente convenabil alese, poligoanele astfel obținute sînt egale prin descompunere.

Iată cîteva exemple.

Teorema 1. Două paralelograme avînd aceiași bază și aceiași înălțime sînt egale prin completare. Teorema a fost deja demonstrată de către Euclid. Redăm întocmai această demonstrație.

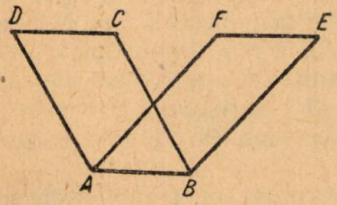


Fig. 7

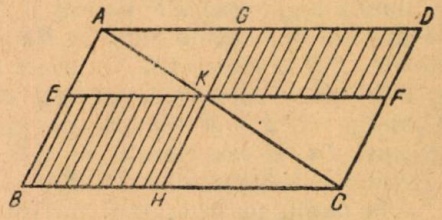


Fig. 8

Euclid demonstrează mai întîi, congruența triunghiurilor AFD și BEC (fig. 7). Apoi completează paralelogramul $ABCD$ cu triunghiul BEC și paralelogramul $ABEF$ cu triunghiul AFD. În ambele cazuri obține trapezul $ABED$, de unde urmează echivalența celor două paralelograme.

Teorema 2. Tot așa se demonstrează și teorema: două triunghiuri cu aceiași bază și aceiași înălțime sînt egale prin completare.

Teorema 3. Dintr-un punct K al diagonalei AC a paralelogramului $ABCD$, ducînd dreptele paralele EF, GH la laturile paralelogramului, cele două paralelograme astfel formate, netăiate de diagonală, sînt egale prin completare (fig. 8).

Este evident că atît în cazul relațiilor de egalitate prin descompunere cît și în cazul relațiilor de egalitate prin completare sînt satisfăcute condițiile fundamentale care se pun relațiilor de egalitate.

În continuare vom demonstra teorema următoare: două poligoane simple completabil egale sînt egale și prin descompunere.

Această teoremă a fost formulată pentru prima oară, întrucîtva diferit, de către profesorul *Farkas Bolyai* din Tîrgu Mureș, la începutul secolului trecut. Deaceea în literatura matematică această teoremă poartă numele său. Ea a fost publicată în cartea sa « *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi* » din 1832. Iată teorema și demonstrația ei din « Tentamen »:

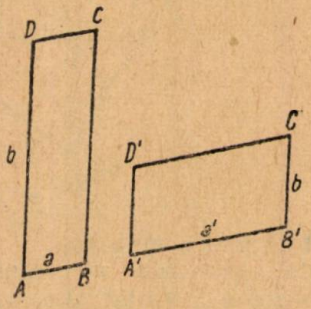


Fig. 9

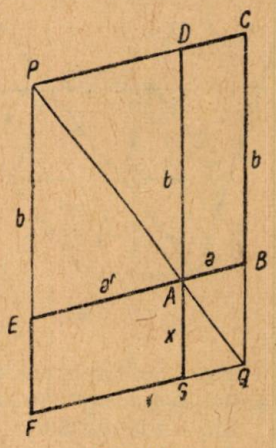


Fig. 10

Dacă în paralelogramele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ (fig. 9) $ab = a'b'$ și $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ atunci cele două paralelograme sînt egale prin descompunere.

Dacă pe prelungirea laturii AB luăm segmentul $AE = a'$, iar din capătul E ducem segmentul EP paralel și egal cu AD (fig. 10), PA taie dreapta CB în punctul Q. Paralela din Q la BE taie dreapta PE în punctul F, iar DA taie dreapta FQ în punctul G. Deoarece $GQ \parallel EA$ și $PE \parallel AG$, triunghiurile AGQ și PEA sînt asemenea. Avem deci: $a : x = a' : b$, adică $ab = a'x$, unde $x = AG$. Urmează că $x = b'$ fiindcă am presupus $ab = a'b'$. Segmentul PD cade pe dreapta DC și este paralel cu EB. Deci paralelogramul $FGAE$ este congruent cu paralelogramul $A'B'C'D'$.

Pe de altă parte, arătăm că el este egal prin descompunere cu paralelogramul $ABCD$.

Să luăm pe latura b segmentul b', iar pe latura a', segmentul a de cîte ori se poate (fig. 11). Deoarece $\frac{b}{b'} = \frac{a'}{a}$, acestea vor putea fi luate de același număr de ori în ambele cazuri. Fie restul în cazul întîi b_1, în cazul al doilea a_1. Dacă $b_1 = 0$, atunci și $a_1 = 0$. Dacă a_1 și b_1 sînt diferite de 0 atunci tăind segmentul a_1, din capătul obținut ducem o paralelă pînă la diagonala IL a patrulaterului $HIKL$ (fig. 11) și procedăm la fel și în paralelogramul celălalt, cu segmentul b_1. Triunghiurile formate, LMN și WVU sînt congruente, ambele fiind congruente cu triunghiul XYP. Urmează că pentagonul $FMNIE$ este congruent cu pentagonul $CDSWV$, avînd laturile și unghiurile corespondente egale. Astfel, scăzînd segmentele egale NL corespondente lui WV din diagonalele

paralelogramelor congruente $JHLK$ şi $STUR$, obţinem segmentele egale IN şi SW. Este clar că scăzînd segmentul ML de lungime a_1 din segmentul FL de lungime $a + a_1$, rămîne segmentul FM de lungime a. La fel, segmentul CV are lungimea b'. Sînt congruente perechi-perechi şi celelalte părţi tăiate din paralelogramele $ABCD$ şi $FGAE$. Deci paralelogramul $ABCD$ este egal prin descompunere cu paralelogramul $FGAE$ şi în consecinţă, şi cu paralelogramul $A'B'C'D'$ care este congruent cu $FGAE$.

Mai departe, este evident că oricare paralelogram poate fi transformat într-un alt paralelogram, care să aibă un unghi α dat şi cu care să fie egal prin descompunere. În acest scop prelungim două laturi opuse şi din capetele uneia ducem drepte care să formeze unghiul dorit α, ca în fig. 12. La fel, fiecare triunghi poate fi transformat într-un alt triunghi egal cu el prin descompunere. În consecinţă, avînd mai multe paralelograme, ele pot fi transformate în altele care toate să aibă unghiuri egale şi baze egale, care la rîndul lor pot fi unite într-un singur paralelogram. Dar unghiul α poate fi şi drept. În concluzie, toate figurile care pot fi descompuse în triunghiuri, pot fi transformate în dreptunghiuri cu aceiaşi bază.

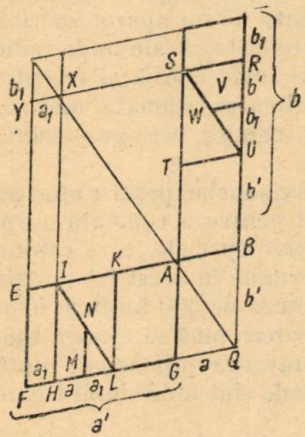


Fig. 11

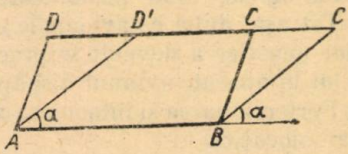


Fig. 12

În continuare, *F. Bolyai* arată că dreptunghiurile pot fi transformate în patrate şi două patrate pot fi unite într-un singur patrat.

Precum se constată, calea urmată de *F. Bolyai* pentru demonstrarea teoremei sale este destul de simplă. Se cunosc însă, şi alte căi pentru demonstrarea acestei teoreme. În manualele sovietice de geometrie elementară găsim o altă serie de demonstraţii [1]).

Teorema lui *Farkas Bolyai* este importantă şi din punct de vedere al învăţămîntului geometric din şcolile medii. Ea joacă un rol fundamental în calcularea ariilor.

În vestitele sale « Elementae », Euclid n-a introdus încă noţiunile de egalitate prin completare şi egalitate prin descompunere. Aceste noţiuni au fost clarificate abia în secolul al XIX-lea, cînd au fost studiate mai profund bazele geometriei. *F. Bolyai* în lucrările sale îşi îndreaptă atenţia tocmai către bazele matematicii. În lucrările sale găsim germenii unei serii de idei, idei fecunde, care în timpurile mai noi au devenit importante, fundamentale. El a fost precursorul distins al marilor descoperiri matematice din secolul al XIX-lea.

---

[1]) Iată cîteva manuale sovietice în care se găseşte citată această teoremă sub numele de teorema lui *Bolyai* şi care conţin demonstraţii interesante referitoare la această teoremă: N. M. Beskin: Metodika gheometrii, Ucipedghiz 1947, pg. 194; D. K. Perepiolkin, Kurs elementarnoi gheometrii, 1. Gostehizdat 1948, pg. 206—210; S. A. Bogomolov, Gheometria, Ucipedgiz 1949, pg. 237—238; B. Kutuzov: Gheometria, Ucipedghiz 1950, pg. 209—212; etc.

RADIOLOCAŢIA

ing. E. ROGAI

RADIOLOCAŢIA, una din minunatele cuceriri ale gîndirii tehnico-ştiinţifice, se ocupă cu determinarea poziţiei sau direcţiei diferitelor obiecte (ţinte) în spaţiu, folosind anumite proprietăţi ale undelor electromagnetice.

Ideea folosirii undelor electromagnetice la determinarea poziţiei unor obiecte este mai veche, dar folosirea undelor radio pe scară practică largă, este strîns legată de al doilea război mondial.

Studiul ionosferei cu ajutorul pachetelor de unde electromagnetice (de înaltă frecvenţă) pe care le emitea în sus un emiţător, care după reflexie de către straturile ionizate ale atmosferei erau recepţionate de un aparat special, a atras atenţia asupra faptului că şi avioanele pot reflecta aceste unde radio cu lungimea de undă foarte mică. După timpul scurs între emisia şi recepţia semnalului se deduce înălţimea ionosferei[1]). Descoperirea menţionată mai sus putea fi utilizată la constatarea apropierii avioanelor inamice, ceea ce prezintă o importanţă deosebită pentru apărarea antiaeriană.

Remarcăm că aproape concomitent cu folosirea avioanelor pentru atac au fost găsite metode de apărare corespunzătoare. Astfel pentru a constata apropierea avioanelor noaptea, au fost construite dispozitive speciale, care captau zgomotul produs de ele, dînd posibilitatea să se determine în acest fel poziţia lor în spaţiu. Tot aşa, după ce avioanele au depăşit viteza de 500 km/h şi folosirea aparatelor acustice a devenit impracticabilă (deoarece pînă să ajungă zgomotul motorului la aparat, avionul dispărea) s-au căutat alte mijloace de luptă împotriva lor. Perfecţionarea şi înlocuirea vechilor metode sînt indisolubil legate de apariţia radiolocaţiei.

În timpul celui de-al doilea război mondial, tehnica radiolocaţiei s-a dezvoltat rapid. Staţiile de radiolocaţie furnizau date preţioase aviaţiei de vînătoare; aceasta ieşea în întîmpinarea aviaţiei inamice, ale cărei formaţii erau descoperite de pe sol. Mai mult, cunoscînd poziţia avioanelor străine (calculată prin coordonatele lor), artileria anti-aeriană putea dirija asupra lor atît proiectoarele cît şi focul. În mod corespunzător, aparatajul instalat pe avioane permitea descoperirea avioanelor inamice care se apropiau pe la spate, determinarea înălţimii reale de zbor etc. După echiparea navelor cu instalaţiile de radiolocaţie se puteau descoperi uşor avioanele şi formaţiile flotei maritime inamice; se putea păstra locul în formaţiile de vase amice, care se deplasau în timpul nopţii sau pe ceaţă.

După terminarea celui de-al doilea război mondial cuceririle tehnicii radiolocaţiei au căpătat aplicaţii cu caracter civil: în aviaţia civilă de transport şi comercială, în flota civilă maritimă şi fluvială, în lucrările geodezice şi cartografice, în meteorologie la prezicerea vremii, în astronomie etc.

Principiile radiolocaţiei. Radiolocaţia se ocupă cu determinarea poziţiei obiectelor în spaţiu sau a direcţiei lor, folosind proprietatea undelor radioelectrice de a se propaga în linie dreaptă şi cu viteză constantă, precum şi proprietatea obiectelor de a le reflecta sau reradia.

Pentru detectarea şi localizarea în spaţiu a obiectelor, postul de radiolocaţie radiază în direcţia dată cantităţi bine determinate de energie electromag-

[1]) Este vorba de cercetările efectuate de Sir Ed. Appleton şi dr. Builder în primul rînd, iar mai tîrziu de Herd, Ratcliffe şi White.

netică. Aceasta întîlnind ţinta se reflectă, iar staţia recepţionează semnalul reflectat. Determinarea distanţei l dintre staţie şi obiectul vizat se bazează pe cunoaşterea diferenţei de timp scurs între emiterea semnalului şi recepţionarea ecoului radioelectrice. Dacă acest interval de timp este $t_2 - t_1 = \Delta t$ atunci:

$$l = \frac{c\,(t_2 - t_1)}{2} = \frac{c\Delta t}{2}.$$

Aici apare factorul $\frac{1}{2}$, deoarece s-a socotit timpul de dus şi întors al radiosemnalului. S-a notat cu c viteza de propagare a undelor radio ($3 \cdot 10^{10}$ cm/s). Este interesant de remarcat faptul că în timpul de dus — întors pentru semnalul radio, avionul detectat nu parcurge nici măcar un metru.

Există două tipuri fundamentale de radar[1]) (sistem de radiolocaţie): unul care corespunde unei emisii continue de energie electromagnetică în spaţiu şi altul în care se radiază pachete de energie (impulsuri); în acest ultim caz, staţia emite numai în intervale mici de timp, iar în restul timpului lucrează pe recepţie: captează şi înregistrează semnalele — ecou.

Aceasta aminteşte situaţia analogă ce are loc cînd strigăm şi imediat după aceea tăcem pentru a auzi mai bine ecoul.

Staţii de radiolocaţie cu emisie continuă. Modul de funcţionare al acestui sistem de detecţie electromagnetică este următorul:

Emiţătorul radiază energie electromagnetică în spaţiu; ţinta reflectă energia interceptată, din care o parte ajunge la receptorul staţiei, ca ecou. Aici, la recepţie, se foloseşte diferenţa dintre frecvenţa semnalului emis şi frecvenţa semnalului ecou. După modul cum apare această diferenţă putem distinge:

a) *o variaţie a frecvenţei datorită efectului Doppler*, care apare din cauza mişcării relative a ţintei detectate faţă de postul terestru; în acest fel putem obţine numai informaţii asupra ţintelor mobile.

După tonul rezultat în urma detecţiei care este apoi amplificat — putem face aprecieri numai de natură calitativă asupra variaţiei componentei radiale a vitezei relative a avionului faţă de Pămînt;

b) *o variaţie a frecvenţei impusă chiar la staţia de emisie.* Unda electromagnetică emisă este modulată în frecvenţă, de exemplu frecvenţa ei variază liniar cu timpul (şi periodic). Dacă unda emisă are frecvenţa f_1, la întoarcere, după reflexie, ea găseşte la staţie o undă cu frecvenţa $f_1 + \Delta f$. Cu ajutorul fenomenului de «bătăi» se poate extrage o undă care să aibă frecvenţa Δf, în funcţie de care se apreciază apoi distanţa pînă la ţintă. Este interesant de remarcat că în acest caz efectul Doppler este supărător, spre deosebire de cazul *a*), unde el dădea unele indicaţii asupra obiectului din spaţiu.

Sistemul radar cu modulaţie în frecvenţă se utilizează în navigaţia aeriană, unde intervin distanţe mici, la altimetrele absolute de pe avioane. Instrumentul care indică deviaţiile de frecvenţă Δf este gradat direct în metri. Acest fel de altimetre nefiind bazat pe variaţiile presiunii atmosferice nu poate induce în eroare pe pilot în ceea ce priveşte înălţimea reală de zbor.

Staţii de radiolocaţie (radar) cu modulaţie în impulsuri. Acest sistem este cel mai răspîndit şi foloseşte impulsuri scurte de radiofrecvenţă, care durează cca 1μs ($1\mu s = 10^{-6}$ s). Perioada de repetiţie a impulsurilor este de

[1]) Denumirea de radar este prescurtarea cuvintelor englezeşti «Radio detection and ranging».

ordinul 1000 μs. Între două emisii consecutive se recepționează semnalul ecou, care aduce indicații asupra obiectului din spațiu. Emițătorul prin impulsuri scurte are un avantaj important: el poate radia o putere (în impuls) de zeci și de sute de ori mai mare decît în cazul emisiei continue, dimensiunile și greutatea postului rămînînd neschimbate.

Pentru ca undele radioelectrice să fie reflectate cît mai bine de țintă, lungimea lor de undă trebuie să fie mai mică decît dimensiunile obiectului vizat. Undele lungi înconjară ușor obstacolele (mai ales mici) fără a se reflecta. De aici decurge necesitatea de a produce unde radio cu lungimi de undă foarte mici, de la cîțiva metri la cîțiva centimetri. Precizia cu care se determină poziția avionului în spațiu depinde de lungimea de undă λ a radiației electromagnetice folosite. Ea este cu atît mai bună cu cît λ este mai mică. Iată dece aparatele de detecție electromagnetică, care comandă focul artileriei, utilizează numai lungimi de undă foarte mici (aici precizia are un rol esențial).

O altă caracteristică a unui emițător este raza de acțiune (bătaia lui). Asupra acestei noțiuni vom reveni.

Evident ea depinde de puterea postului. Am văzut că pentru a obține o precizie mare în determinări sînt necesare unde foarte scurte; pentru o rază de acțiune mare trebuie și o putere mare, care la unde cu λ de ordinul centimetrului este foarte greu de obținut. De aceea la detectarea țintelor îndepărtate pentru care nu se cere o precizie mare se folosesc unde decimetrice și chiar metrice; pentru ele obținem ușor puteri de ordinul 1000 kW.

Simpla percepere a ecoului, care indică un obstacol în calea undelor, nu este de ajuns. Trebuie să cunoaștem și depărtarea și direcția țintei. În vederea acestui scop căutăm să obținem (ca și la proiectoare) o rază îngustă, cu care explorăm văzduhul (sau părți ale lui). În acest chip, raza electromagnetică își păstrează pe o distanță mare intensitatea constantă și devin accesibile chiar ținte foarte îndepărtate. O atare rază obținem, dacă situăm antena în centrul unei oglinzi metalice convexe, de dimensiuni suficient de mari.

Putem mări și mai mult raza de acțiune a stațiilor, dacă la recepție utilizăm o oglindă identică cu aceea folosită la emisie.

De cele mai multe ori o singură antena servește și pentru emisie și pentru recepție. În pauza dintre două emisii antena se conectează la receptor.

În ce privește găsirea direcției unui avion putem spune că ea corespunde direcției fasciculului care explorează o regiune a spațiului, pentru care avem un semnal-ecou maxim.

Schema bloc a unei instalații de radiolocație cu modulație în impulsuri. În cele ce urmează vom descrie două tipuri de stații și vom da indicații asupra altor cîteva tipuri.

a) *Stație cu antene deosebite pentru emisie și recepție.* În fig. 1 este arătată schema unei asemenea stații. S-a notat cu E emițătorul, care este comandat de modulatorul M și radiază prin antena de emisie A_E pachete de energie electromagnetică (impulsuri). Ele întîlnesc ținta, se reflectă și sub formă de radioecouri sînt captate de antena de recepție A_R; apoi ecoul intră într-un tub electronic amestecător — mixerul M_i — de tipul celor din superheterodine, unde se «bate» cu o oscilație (de o anumită frecvență) generată de oscilatorul local OL. Bătăile rezultate sînt amplificate ulterior de A_1, apoi demodulate în D (detector) și în fine, după o altă amplificare a anvelopei semnalului de radiofrecvență, se aplică unui tub cu raze catodice (de exemplu cartesian). Cu ajutorul acestui semnal se deviază după verticală fasciculul electronic al tubului

cu raze catodice. Pe orizontală el este deviat de o tensiune lineară în timp (bază de timp), care se repetă ciclic, începînd cu fiecare radioimpuls trimis spre țintă.

În acest fel ecoul apare pe ecranul tubului cu raze catodice, ca un «dinte» vertical, alături de semnalul emis la o anumită distanță de acesta. Dece apare și imaginea semnalului emis pe ecran este ușor de înțeles. În momentul emisiei avem o scăpare (directă) a semnalului către antena de recepție. Receptorul va face să apară imaginea semnalului direct, la fel cum făcea pentru ecou.

Dacă se cunoaște perioada bazei de timp și viteza de propagare a undelor radioelectrice, se poate etalona (grada) axa orizontală chiar în distanțe și prin lectură directă se obține distanța de la stație la obiect.

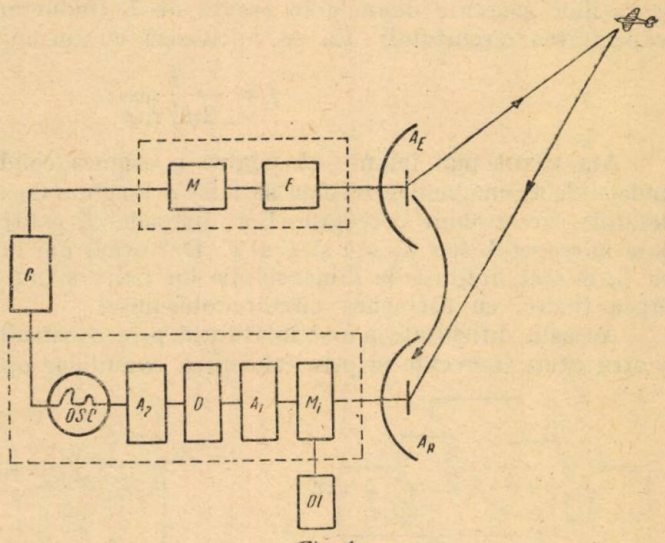


Fig. 1

În fine *G* reprezintă un etaj care generează impulsurile necesare pentru pornire (pentru comanda modulatorului, a bazei de timp etc.).

Schema-bloc a unei stații cu antenă comună pentru recepție și pentru emisie. În această schemă găsim o singură antenă împreună cu cutia transmisie-recepție; G.I.F. este generatorul de înaltă frecvență al emițătorului (magnetronul). *M* este modulatorul care comandă magnetronul și sistemul de indicare a distanței și a direcției (Ind *D*, *d*) (fig. 2). Se asigură în acest chip, sincronismul între emisia semnalului direct și intrarea în funcțiune a bazei de timp a indicatorului de distanță. După ce modulatorul pornește G.I.F. (magnetronul) acesta trimite spre antenă un impuls de înaltă frecvență pe care antena îl radiază în spațiu.

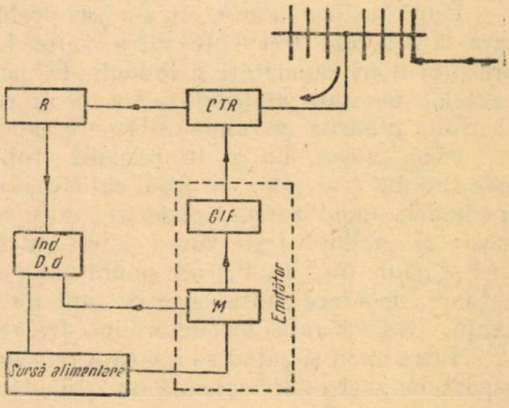


Fig. 2

Descrierea etajelor care alcătuiesc o stație radar. Vom începe această scurtă descriere cu prezentarea emițătorului. Parametrii fundamentali care-l caracterizează sînt: lungimea de undă a oscilațiilor folosite, puterea în impuls, puterea medie a emițătorului, frecvența de repetiție a impulsurilor radio, durata lor și

randamentul. Emiţătorul are două etaje importante: generatorul de foarte înaltă frecvenţă şi modulatorul.

Generatorul de foarte înaltă frecvenţă. Se ştie că un generator electronic de oscilaţii are drept element esenţial un circuit oscilant *LC* (fig. 3). Frecvenţa oscilaţiilor generate depinde în esenţă de *L* (inductanţa circuitului) şi de *C* (capacitatea circuitului). Ea se calculează cu formula

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Am văzut mai înainte că pentru a asigura condiţii optime de reflexie, undele electromagnetice trebuie să aibă o lungime de undă (λ) mai mică decît detaliile care trebuie detectate. Este limpede că pentru a mări frecvenţa trebuie micşorat *L* sau *C*, sau şi *L* şi *C*. Dar oricît am încerca să reducem pe *L* şi pe *C*, ei sînt limitaţi de dimensiunile lor fizice şi nu putem obţine frecvenţe supra înalte, cu asemenea circuite obişnuite.

Această dificultate a fost înlăturată prin construirea unor tuburi speciale pentru atari frecvenţe şi prin înlocuirea circuitelor oscilante obişnuite cu cir-

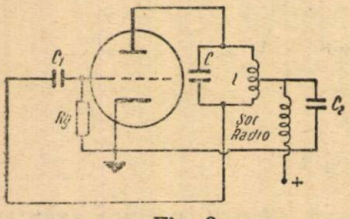


Fig. 3

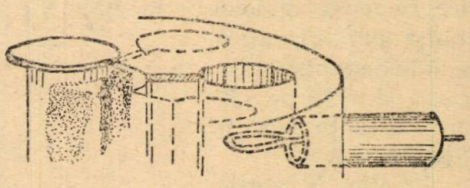


Fig. 4

cuite oscilante cu linii de transmisie, cabluri coaxiale şi cavităţi rezonatoare. Circuitele oscilante ca cavităţi rezonatoare sînt un fel de cutii din metal, de formă cilindrică, prismatică etc.

După realizarea acestora s-a pus problema construirii unor tuburi speciale, care să genereze frecvenţe ultra înalte. La aceste frecvenţe tuburile obişnuite prezintă mari capacităţi şi inductanţe parazite, care limitează atingerea frecvenţelor necesare staţiilor radar. S-au construit astfel tuburile ghindă, far, clistron, tuburile cu undă călătoare, magnetronul etc.

Magnetronul. Ca şi în celelalte tuburi electronice sursa de electroni este catodul (cu oxizi). În jurul catodului se află anodul (din cupru), care poate fi cilindric (anod întreg), secţionat sau cu cavităţi rezonatoare. În corpul metalic masiv al anodului (este vorba de cel cu cavităţi rezonatoare) sînt tăiate şanţuri şi găuri (fig. 4). Fiecare gaură cu şănţuleţul ei constituie o cavitate rezonatoare, deoarece şanţul este de fapt un mic condensator, iar gaura o inductanţă. Dimensiunile lor determină frecvenţa de lucru.

Între anod şi catod se aplică o tensiune continuă de 10—35 kV. Sub acest aspect magnetronul seamănă cu o diodă. Dar pe lîngă cîmpul electric radial creat între anod şi catod se mai creează un cîmp magnetic puternic dirijat de-a lungul axei tubului (600—15000 Oe). La o reglare potrivită a cîmpurilor electric şi magnetic electronii descriu buclă după buclă şi nu cad pe catod. Norul de electroni, zburînd între catod şi anod, excită în cavităţile rezonatoare oscilaţii. Electronii care, străbătînd cîmpul de înaltă frecvenţă din dreptul şănţuleţului, sînt frînaţi, cedează energia circuitului oscilant. După această

« epuizare » ei sînt curbaţi puternic în $\vec{H}$, recapătă « forţe » şi din nou pot ceda o parte din energia lor circuitului oscilant cu cavităţi. Frînarea şi accelerarea electronilor duce la gruparea lor în « pîlcuri » (ca spiţele unei roţi care se roteşte). Puterea medie pe care o poate da tubul este de cca 2,5 kW, iar puterea de vîrf de 2.5 MW. Oscilaţiile generate de magnetronul cu cavităţi au lungimi de undă de la cîteva zeci de centimetri pînă la cîţiva milimetri. Randamentul tubului este cuprins între 0,3 şi 0,65.

Modulatorul. Funcţia sa este să controleze forma, durata şi frecvenţa de repetiţie a impulsurilor de radiofrecvenţă. El trebuie deci, să creeze impulsuri dreptunghiulare de înaltă tensiune, care comandă tubul oscilator al emiţătorului (în speţă, magnetronul). În afară de aceasta el mai generează impulsuri de joasă tensiune, care declanşează sistemul indicator al staţiei radar. În acest fel se asigură sincronismul între radiaţia impulsurilor de înaltă frecvenţă şi intrarea în funcţiune a bazei de timp.

Cutia transmisie-recepţie (fig. 2). Între antenă şi receptor este intercalat comutatorul de antenă (C.T.R.). El permite folosirea unei singure antene pentru emisie şi recepţie. Se preferă o singură antenă, deoarece se realizează o economie considerabilă în greutate, spaţiu şi cost. Fără acest dispozitiv o parte însemnată din energia emisă ar pătrunde în receptor şi ar tulbura funcţionarea lui normală. Aşadar este necesar un dispozitiv care în timpul emisiei să apere receptorul de semnalul direct, iar în timpul recepţiei să dirijeze semnalul ecou numai spre el. Principiul de funcţionare al unui comutator de antenă este destul de simplu.

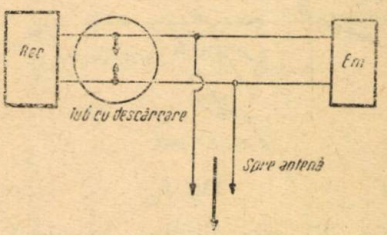


Fig. 5

Elementul de bază al acestui releu electronic (C.T.R.) îl constituie un tub cu descărcare, umplut cu gaz rarefiat (fig. 5). El este alcătuit din doi electrozi de formă conică, sudaţi într-un balon de sticlă. Un spaţiu foarte mic separă vîrfurile celor două conuri. Cînd magnetronul funcţionează, spaţiul dintre cele două conuri se i nizează şi se produce o descărcare. Scînteia rezultată pune în scurt circuit pereţii opuşi, oprind pătrunderea energiei în receptor. Totuşi o mică fracţiune din energia semnalului direct intră în receptor pentru a fixa pe ecran semnalul de depărtare nulă. După circa 1 μ s descărcarea încetează. Ecourile radioelectrice sosite la staţie fiind foarte slabe, nu vor reaprinde arcul. Ele nu vor intra nici în emiţător, fiindcă segmentul de linie care merge spre emiţător este dezacordat în pauză.

Descrierea C.T.R. este calitativă şi schematică, pentru a se putea înţelege mai bine principiul ei de funcţionare.

Antena emiţătorului. Antena serveşte pentru radiaţia impulsurilor directe şi pentru recepţionarea ecourilor reflectate de ţinte în intervalul dintre două emisii consecutive. Mai precis, antena transformă energia impulsurilor de foarte înaltă frecvenţă în energia pachetelor de unde electromagnetice, şi invers, energia undelor electromagnetice în energia impulsurilor de înaltă frecvenţă. Datorită caracterului directiv, antena ne permite să aflăm şi direcţia avionului.

În fig. 6 este reprezentată schema simplificată a instalaţiei de antenă. De la circuitul oscilant din anodul tubului se pleacă, în acest caz, prin doi condensatori de separare la o linie de transmisie bifilară. Se folosesc aceste linii

(neizolate), fiindcă acest sistem este foarte simplu. Receptorul se leagă şi el prin intermediul unei linii de transmisie la antenă. La distanţa $\frac{\lambda}{4}$ de punctul de ieşire al liniei se află un tub cu descărcare. Tubul şi segmentul de linie formează comutatorul de transmisie-recepţie.

Receptorul. Am văzut că emisia se face prin impulsuri. La fel este şi recepţia. Energia reradiată de ţintă ajunge la receptor în formă de pachete de unde de foarte scurtă durată. Semnalul primit trebuie amplificat şi detectat, pentru ca anvelopa să se aplice plăcilor (tubului cu raze catodice), care dau deviaţia pe verticală, în scopul materializării şi explicitării informaţiilor aduse de ecou despre ţinta interceptată. Timpul cît funcţionează (la un ecou) receptorul este de ordinul microsecundei, semnalul recepţionat fiind de ordinul microvoltului (μV). Se pune întrebarea: poate amplifica receptorul ecouri ori cît de slabe? Nu. El este limitat în acest sens de propriul său zgomot. Acesta maschează, înăbuşe, semnalele foarte slabe. Nu putem distinge din mulţimea dinţişorilor de pe ecran pe aceia care corespund unor ţinte lovite. Zgomotul receptorului reprezintă variaţii aleatoare ale tensiunilor şi curenţilor din circuitele lui. Zgomotele introduse de prim le etaje sînt cele mai importante şi mai supărătoare, ele fiind amplificate de întregul lanţ de amplificare şi apărînd la ieşire. Zgomotul dă deplasări pe verticală ale spotului. Apare aşa zisa « iarbă ». Fig. 7 ilustrează acest fapt.

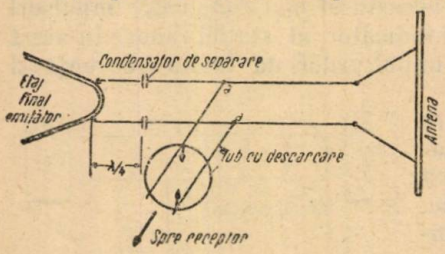


Fig. 6

Fig. 7

Deşi se lucrează pe o frecvenţă fixă, totuşi receptorul este prevăzut cu un mic condensator variabil, pentru a putea face faţă unor eventuale alunecări de frecvenţă.

În fig. 8 este reprezentată schema-bloc a unui receptor radar cu indicarea funcţiunilor diferitelor etaje.

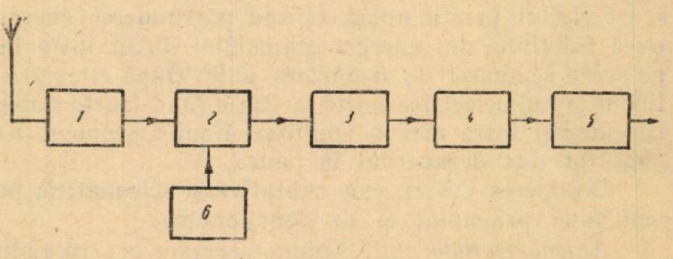


Fig. 8

1 — amplificatorul de înaltă frecvenţă; *2* — mixerul — etajul care amestecă două oscilaţii de frecvenţe diferite; *3* — amplificatorul de medie frecvenţă (frecvenţa oscilaţiei rezultată după mixer). *4* — detectorul; *5* — amplificatorul (după el urmează tubul cu raze catodice); *6* — oscilatorul local (similar cu acela din superheterodinele obişnuite).

Oscilatorul local. Acesta face parte integrantă din receptor. El produce o oscilaţie de foarte înaltă frecvenţă, care amestecată cu oscilaţia-ecou, dă prin fenomenul « bătăilor » — o oscilaţie cu o frecvenţă egală cu diferenţa dintre frecvenţele celor două oscilaţii. Oscilatorul local trebuie să îndeplinească mai multe condiţii, dintre care cea mai importantă este stabilitatea mare a frecvenţei generate. De aceea tensiunile de alimentare ale tubului oscilator sînt stabilizate.

De obicei drept oscilator local se foloseşte clistronul. În prezent se folosesc mai multe tipuri de clistroane: cu un circuit cu cavităţi, cu două sau chiar cu trei circuite cu cavităţi rezonatoare.

Tubul cu raze catodice. Acesta este elementul esenţial al sistemului indicator. În fig. 9 se arată părţile componente: tunul electronic, sistemul de deflecţie şi ecranul. Deosebim un catod — sursă de electroni, K, înconjurat de un cilindru C, la care este aplicat un potenţial negativ faţă de catod şi care serveşte la controlarea intensităţii fasciculului de electroni emişi de catod. Cilindrul C (Wehnelt) are rolul grilelor de comandă din tuburile amplificatoare obişnuite. După cilindrul Wehnelt se găseşte un anod-ecran A_1. El are o funcţiune analogă cu aceea a grilei-ecran de la tuburile de recepţie. Mai departe găsim două anode cilindrice A_2 şi A_3, care focalizează fasciculul de electroni. Ele au acelaşi rol ca şi lentilele convergente din optică; urmează, apoi, sistemul de deflecţie (deviere). El este alcătuit din două plăci orizontale $H-H$ şi două verticale $V-V$. Între ele se aplică tensiuni potrivite, care deviază fasciculul de electroni pe verticală şi pe orizontală.

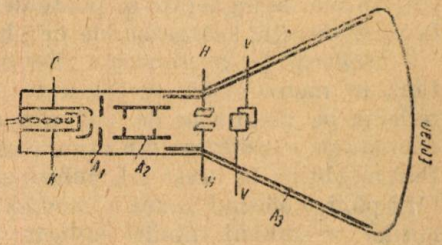


Fig. 9

În fine ultimul element al tubului cu raze catodice este ecranul, pe care se formează imaginile semnalelor directe şi ale ecourilor şi pe care citim distanţa care ne interesează. Ecranele sînt acoperite cu substanţe care sub loviturile razelor catodice devin fluorescente; excitate, ele pot avea culoarea albă, gălbuie, albastră sau verde după natura substanţei chimice folosite.

Folosirea radarului în scopuri civile. Posibilitatea pe care ne-o oferă radarul de a găsi distanţa pînă la o ţintă şi direcţia ei, a găsit multe aplicaţii în viaţa civilă. El înlocueşte aparatele optice pe timp de noapte, ceaţă, nori etc; determinările efectuate cu radarul sînt foarte precise (la distanţe de zeci de kilometri eroarea este de 20—30 m); el furnizează ştiri despre ţintele care se găsesc la zeci şi sute de kilomteri depărtare. Radiolocaţia se foloseşte în studiul Universului, la prezicerea vremii, în geodezie, cartografie, la observarea zborului meteorilor etc.

Radarul şi aviaţia. În aviaţie staţiile radar permit aflarea itinerariilor de zbor, pilotarea avioanelor pe un anumit traseu, aflarea înălţimii reale de zbor, preîntîmpinarea ciocnirii avioanelor în aer, aterizarea noaptea şi asigurarea zborului în condiţii atmosferice nefavorabile (ceaţă, nori denşi etc.). Amintim încă odată, serviciile nepreţuite pe care le aduce aviaţiei altimetrul absolut.

Pe aeroporturi există staţii radar speciale care permit să se cunoască situaţia aeriană din jurul aeroportului şi din imediata lui vecinătate (pînă la cîţiva zeci de km). După informaţiile furnizate de tubul indicator se poate stabili ordinea de aterizare şi decolare a avioanelor, se pot dirija avioanele spre zona de aşteptare, în cazul cînd ele nu pot ateriza imediat, se controlează şi se stabileşte înălţimea de zbor a avioanelor pentru a se evita ciocnirile, se controlează executarea corectă a comenzilor de către pilot etc.

Radarul şi navigaţia fluvială şi maritimă. Folosirea instalaţiilor de radiolocaţie pe vase simplifică mult navigarea pe timp de ceaţă şi în condiţii meteo-

rologice nefavorabile. Tubul indicator al staţiei se aşează pe puntea căpitanului sau lîngă cîrmă. Folosind o antenă rotitoare şi un tub cu raze catodice (cu post-luminiscenţă mare) se poate obţine harta (imaginea) împrejurimilor locului dat, ale vasului. Datorită faptului că altfel se reflectă undele radio de apă, uscat, poduri, case, vase şi luntri, toate acestea vor apare pe ecranul tubului indicator, constituind o hartă completă a împrejurimilor. Cîteodată totuşi, ţărmul nu apare clar. În aceste cazuri, pentru identificarea lui se folosesc proiecţiile hărţilor pe ecranul tubului sau hărţi transparente.

Instalaţiile radar de pe vase permit ca acestea să meargă cu o viteză medie mai mare, asigură o deviere minimă de la traseul fixat, contribuie la scurtarea drumului şi la ocolirea obstacolelor etc. Instalaţiile de radiolocaţie aduc mari servicii vaselor de pescuit, dîndu-le posilibitatea să descopere, de exemplu locul unde se află balene. Ele sînt foarte utile şi în caz de naufragii.

În mările îngheţate se poate determina uşor marginea gheţarilor şi trimite în acea direcţie spărgătoarele de gheaţă.

Radarul şi meteorologia. Pentru determinarea norilor de ploaie şi furtună în meteorologie se foloseşte proprietatea undelor centimetrice de a se reflecta pe picăturile de apă din atmosferă. Intensitatea undelor reflectate depinde de umiditatea din atmosferă. Ea creşte odată cu creşterea umidităţii. Putem obţine în acest fel, informaţii asupra caracterului norilor sau intensităţii ploii. Folosind anumite moduri de prezentare putem urmări uşor, mişcarea norilor pe ecranul tubului indicator. Staţiile meteorologice de pe aeroporturi sînt înzestrate cu instalaţii radar, pentru a se comunica avioanelor în timpul zborului, tot ceea ce le interesează.

Staţiile radar permit determinarea în orice anotimp a coordonatelor sondelor meteorologice. Depărtarea maximă şi precizia sînt mai mari decît a datelor obţinute cu mijloace optice. Baloanele-pilot, cu care se determină viteza şi direcţia vîntului, sînt urmărite uşor de staţiile de radiolocaţie. Mai mult, aparatele recepţie-emisie (în miniatură) instalate pe baloane pot transmite cifrat pe sol date privitoare la temperatura, presiunea şi umiditatea aerului.

Radarul în geodezie şi cartografie. Se ştie că mai există pe glob locuri ale căror hărţi precise nu au fost încă alcătuite. Sprijinul radarului şi în această direcţie este preţios. Geodezii caută să determine distanţele dintre anumite puncte fixate dinainte în regiunile care îi interesează. Această problemă devine complicată, cînd distanţa dintre punctele de reper este mare sau cînd între ele există obstacole naturale. În asemenea situaţii se procedează în felul următor: se aleg două puncte în care se instalează staţii de recepţie-emisie, la înălţimi cunoscute. Impulsurile emise de avionul pe care se află o staţie radar sînt recepţionate şi apoi retransmise din cele două puncte. Cunoscînd timpul de retransmitere se poate calcula şi distanţa dintre avion şi punctul respectiv. Dacă se cunoaşte înălţimea avionului şi înălţimile staţiilor de recepţie-emisie din cele două puncte se poate calcula uşor distanţa dintre cele două localităţi (o simplă rezolvare de triunghi oarecare). Prin accastă metodă se pot calcula distanţe de sute de kilometri.

Radarul şi astronomia. Şi în acest domeniu radarul a adus mari servicii. El facilitează observarea stelelor căzătoare, a meteorilor care zboară în atmosfera terestră etc. Studiul meteoriţilor poate furniza date atît asupra apariţiei Universului, cît şi asupra p oprietăţilor stratosferei. Meteoriţii zboară cu o viteză foarte mare. Pătrunzînd în atmosferă ei se încălzesc puternic şi formează în urma lor o « coadă » de aer ionizat. Aceasta este un reflector foarte bun pentru

undele metrice. Cu ajutorul radarului astronomii au descoperit fluxuri de meteoriți care nu erau cunoscuți. S-au putut determina coordontele, traiectoria și viteza de mișcare, nu numai în nopțile senine și întunecoase, dar și pe timp noros și ploios, ziua ca și noaptea, independent de urmele lor optice vizibile.

În 1946 s-au trimis semnale radio spre Lună, lungimea de undă folosită fiind de 2,69 m, iar durata impulsului de 0,25 s. Semnalul reflectat a sosit pe Pămînt după 2,6 s (sau după măsurări mai precise, după 2,5 s). Tot cu radarul au fost descoperite «radiostelele», locuri care au o radiație deosebit de puternică.

Cele expuse mai sus reprezintă numai cîteva spicuri din prețioasele utilizări ale radiolocației — ca disciplină a electronicii — în tehnică și în știință.

PREMIILE «GAZETEI MATEMATICE ȘI FIZICE» SERIA B PE ANUL 1956

Pentru activitatea deosebită, desfășurată de unii corespondenți, evidențiați pe anul 1956 în cuprinsul volumului VII din «Gazeta Matematică și fizică» seria B, se acordă premii și mențiuni. Cărțile ce se dau ca premii și mențiuni se vor anunța ulterior.

PREMII

1. *Panaitopol Laurențiu* (cl. 9 Giurgiu),
2. *Hulubei Valeriu* (cl. 10 Craiova),
3. *Pupăzan V. Nicolae* (școala militară Sibiu),
4. *Bucur D. Gheorghe* (cl. 10 Pucioasa),
5. *Stănciulescu Mihai* (cl. 9 Tîrgoviște),
6. *Grosu Gh. Florin* (cl.10 Galați),
7. *Focșeneanu I. Ioan* (cl. 9 P. Neamț),
8. *Gervescu M. Ion* (cl. 7 P. Neamț),
9. *Emanoil Alexandru* (cl. 10 s. m. 1 București),
10. *Popescu Paul Roger* (cl. 10 s.m. 11 București),
11. *Zilberman Mircea* (cl. 10 Bacău),
12. *Hodor Constantin* (cl. 7 Roznov),
13. *Draica Constantin* (cl. 9 s. m. 4 București),
14. *Păunescu Lucian* (cl. 10 s. m. 17 București),
15. *Nistreanu Valeriu* (cl. 10 s. m. 4 București),
16. *Bărbuică Nicolae* (cl. 10 Craiova),
17. *Stoian I. Gh.* (student București),
18. *Murărescu Gh.* (cl. 10 Roman),
19. *Roșianu C. Dragomir* (student București),
20. *Lupuțiu Ion* (student București),
21. *Pleniceanu A. Ion* (student Petroșani),
22. *Iorgulescu Alex.* (absolvent București),
23. *Stăncescu N. Emil* (cl. 10 Giurgiu),
24. *Baltag Vasile* (cl. 9 Ploești),
25. *Bigan Stan* (absolvent Giurgiu),
26. *Bogdan P. Mircea* (cl. 10 Ploești),
27. *Grigorescu D. Ion* (cl. 10 R.Vîlcea),
28. *Boloran Petre* (cl. 10 Giurgiu),
29. *Paulescu N. Dan* (cl. 10 R. Vîlcea),

30. *Ene I. Ion* (student Bucureşti),
31. *Delu Ştefan* (cl. 10 Corabia),
32. *Alexa I. Dumitru* (student Iaşi),
33. *Stănculescu Adrian* (cl. 10 Craiova),
34. *Şarpe I. Dumitru* (cl. 10 Corabia).

MENŢIUNI

1. *Stroe Radu* (student arhitectură Bucureşti),
2. *Voinea I. Alexandru* (cl. 10 Craiova),
3. *Ioniţă Tudor* (student Oraşul Stalin),
4. *Trifu Mircea* (cl. 8 Alba Iulia),
5. *Voinea C. Dorin* (cl. 10 s. m. 2 Craiova),
6. *Grofşoreanu Tudor* (cl. 7 s. m. 7 Bucureşti),
7. *Ţibuleac Florin* (cl. 9 Iaşi),
8. *Ştepan Ionel* (s. m. hidro Constanţa),
9. *Torjescu Florin* (student Bucureşti),
10. *Alexa Ion* (absolvent Sibiu),
11. *Schileru Dinu* (cl. 10 s. m. 1 Bucureşti),
12. *Şaganai Acic Nusfet* (cl. 10 s. m. 13 Bucureşti),
13. *Hegedüs Attila* (cl. 9 T. Mureş),
14. *Ianuş Stere* (cl. 9 Constanţa),
15. *Aniţescu N. Nicolae* (cl. 8 Tg. Jiu),
16. *Arsenovici Tiberiu* (cl. 10 Timişoara),
17. *Ancuţoiu I. Gheorghe* (cl. 9 R. Vîlcea),
18. *Colonati Cristian* (absolvent Moreni),
19. *Rotaru N. Constantin* (absolvent Suceava),
20. *Tudor M. Gheorghe* (cl. 10 s. m. 13 Bucureşti),
21. *Jurcă Valeriu* (cl. 10 Ploeşti),
22. *Florescu Gh. Mircea* (student Bucureşti),
23. *Bătineţu M. Dumitru* (absolvent Zimnicea),
24. *Cristea Aurel* (cl. 10 Focşani),
25. *Turiga M. Constantin* (absolvent Urziceni),
26. *Hoţă Marcel* (cl. 10 Tg. Mureş),
27. *Văgăunescu Gheorghe* (cl. 10 Ploeşti),
28. *Guiaşu Silviu* (student Bucureşti),
29. *Nerodea Tiberiu* (cl. 10 Timişoara),
30. *Predoiescu Marieta* (cl. 7 s.m. 10 Bucureşti),
31. *Vişinescu Mihai* (cl. 8 Giurgiu),
32. *Zorapapel Tiberiu* (cl. 9 s. m. 17 Bucureşti),
33. *Mihăileanu N. Constantin* (cl. 9 Timişoara),
34. *Matei Aurel* (cl. 9 P. Neamţ),
35. *Nicolau Gh. Cornel* (cl. 9 s. m. 4 Bucureşti),
36. *Şor Liber* (cl. 9 Iaşi),
37. *Vasiliev Lucia* (s. m. hidrotehnică Constanţa),
38. *Sin C. Alexandru* (cl. 10 Giurgiu),
39. *Iftimie Viorel* (cl. 10 Rădăuţi).

— *Premianţii* şi *menţionaţii* sînt rugaţi să ne trimită printr-o carte poştală, adresa unde urmează să li-se expedieze cărţile acordate ca premiu sau menţiune; iar după primirea lor, să ne confirme aceasta, pe adresa: Societatea de Matematică şi Fizică, Strada Academiei nr. 14, Bucureşti.

NOTE MATEMATICE

19. Generalizarea problemei 1548

Fie M un punct care împarte segmentul AB într-un raport K. Se duce un cerc tangent segmentului AB în punctul M. O secantă dusă din A taie cercul în punctele C şi D, iar o secantă oarecare dusă din B taie cercul în punctele E şi F. Dreptele CF şi DE taie dreapta AB respectiv în punctele G şi H. Între segmentele AG şi BH există relaţia:

$$\frac{K^2}{AG} - \frac{1}{BH} = \frac{K^2 - 1}{AB}.$$

Fie $I \equiv (AD, BF)$. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului AIB tăiat de transversalele FCG şi DEH obţinem:

$$(1) \quad \frac{CA}{CI} \cdot \frac{FI}{FB} \cdot \frac{GB}{GA} = 1$$

şi

$$(2) \quad \frac{HB}{HA} \cdot \frac{DA}{DI} \cdot \frac{EI}{EB} = 1.$$

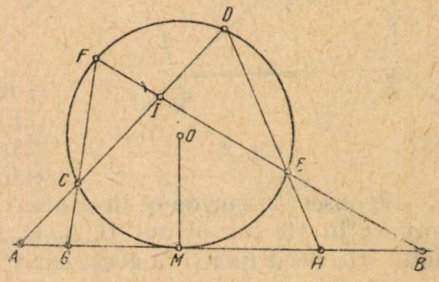


Fig. 1

Cum $AM = KMB$, rezultă:

$$(3) \quad AC \cdot AD = K^2 \cdot BE \cdot BF.$$

Puterea lui I faţă de cercul (O) este

$$(4) \quad IC \cdot ID = IE \cdot IF.$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2) şi ţinînd seama de (3) şi (4) obţinem:

$$\frac{K^2 \cdot BG \cdot BH}{AG \cdot AH} = 1 \quad \text{sau} \quad K^2 \frac{BG}{AG} = \frac{AH}{BH} \quad \text{sau}$$

$$K^2 \frac{AB - AG}{AG} = \frac{AB - BH}{BH} \quad \text{sau}$$

$$\frac{K^2 \cdot AB}{AG} = \frac{AB}{BH} + K^2 - 1 \quad \text{de unde}$$

$$\frac{K^2}{AG} - \frac{1}{BA} = \frac{K^2 - 1}{AB}.$$

Pentru $K = 1$ problema se reduce la problema 1548.

Gh. Şt. Mocanu, student matematici, Bucureşti

20. Asupra unei teoreme a lui Euler

În « *Culegerea de probleme de geometrie* » de G. Ţiţeica, ed. III 1956, revăzută şi adăugită de conf. univ. Gh. D. Simionescu, se găseşte sub nr. 1076 următoarea problemă:

« Se dă un poliedru convex avînd M muchii, F feţe şi V vîrfuri. Să se demonstreze formula lui Euler: $M - V = F - 2$ ».

Soluția ce se dă la pag. 313 și 314, este simplă și foarte interesantă [1]).

O soluție tot atît de cunoscută și de simplă se poate da însă și prin metoda inducției complete, în felul următor:

Să considerăm un poliedru cu F fețe, V vîrfuri și M muchii și să presupunem adevărată relația:

$$M - V = F - 2. \tag{1}$$

Luăm un vîrf A_i al poliedrului în care, pentru simplificare, am considerat că se întîlnesc 4 muchii (generalitatea demonstrației se menține). Demonstrăm că relația (1) e adevărată și pentru un poliedru cu $F_1 = F + 1$ fețe. Pentru a obține un poliedru cu $F_1 = F + 1$ fețe facem secționarea $B_1B_2B_3B_4$. Noul poliedru va avea:

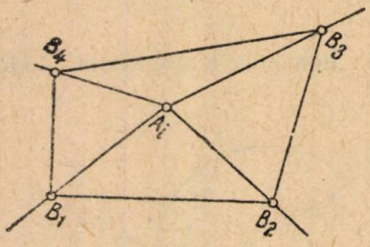


Fig. 2

$$\begin{aligned} F_1 &= F + 1 \text{ fețe} \\ M_1 &= M + 4 \text{ muchii} \\ V_1 &= V + 3 \text{ vîrfuri} \end{aligned} \tag{2}$$

și relația $M_1 - V_1 = F_1 - 2$ se reduce la relația (1), adică este adevărată. Cum pentru un tetraedru (1) este satisfăcută, înseamnă că este adevărată pentru orice poliedru convex.

Se observă ușor de ce în demonstrația de mai sus, poliedrul trebuie să fie convex; în alt caz planul $B_1\,B_2\,B_3\,B_4$ poate fi dus așa ca să genereze mai multe fețe decît una și în acest caz relațiile (2) nu s-ar putea scrie.

* * *

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

DOUĂ EXPERIENȚE DE ELECTROSTATICĂ

de **G. I. JEREHOV**

Din «Fizica v scole» — nr. 4 — 1956,

Electrizarea curelei de transmisie

CAUZA electrizării curelelor este lunecarea și îndepărtarea de pe suprafața volanturilor (roților). Fenomenul se intensifică în deosebi dacă se întrebuințează colofoniul. Scînteile care i-au naștere la electrizarea curelelor prezintă un mare pericol, mai ales cînd aerul conține vapori de substanțe combustibile sau praf inflamabil. Pentru a preîntîmpina electrizarea curelelor acestea se ung cu pastă conductoare sau se culeg sarcinile cu perii speciale.

Dispozitivul pentru demonstrarea electrizării curelelor constă dintr-un motor electric 1 (fig. 1), care învîrtește roțile 2 și 3. Acestea se confecționează

---

[1]) La sfîrșitul soluției (pg. 314, rîndul 5 de sus) s-a strecurat o greșală de tipar, anume: în loc de «8 unghiuri drepte = $(V+F+M)$. 4 unghiuri drepte», trebuie evident «8 unghiuri drepte = $(V+F-M)$. 4 unghiuri drepte».

din ebonită sau lemn. Cureaua 4 se confecţionează din piele sau hîrtie compactă. Dispozitivul reprezintă un model de transportor.

În mişcare cureaua se electrizează, ceea ce se poate constata apropiind de ea un pieptene matalic 5, fixat de un mîner izolator. Pieptenele se conectează

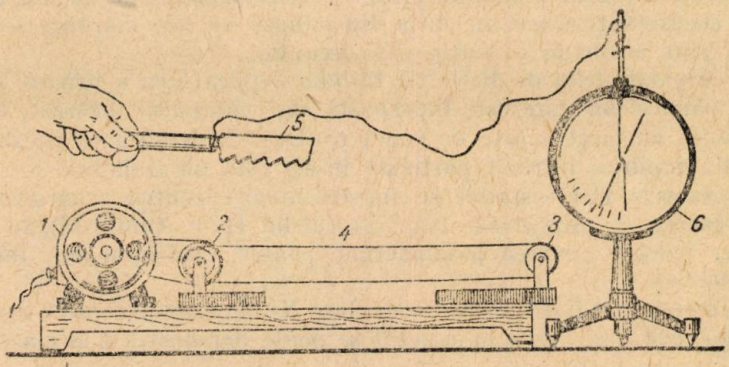


Fig. 1

la un electroscop 6. Dacă atingem suprafaţa interioară a curelei, acolo unde ea coboară de pe una din roţi, cu o tijă metalică pusă la pămînt, electrizarea se va micşora mult.

Separarea electrostatică a substanţelor

Dispozitivul reprezintă un model de separator electrostatic. Pe o stinghie de lemn de diametru potrivit se aşează un inel de sticlă 1, care se obţine din partea cilindrică a unei sticle. Suprafaţa sticlei se acoperă cu staniol. Tamburul separatorului, confecţionat în acest fel, se fixează pe un ax, prevăzut cu un mîner aşezat pe doi suporţi (fig. 2). Sub tambur se aşează două plane înclinate 2, pe care substanţele separate vor cădea în două cutioare 3. De tambur se reazemă lateral o placă de sticlă 4, a cărei parte superioară este acoperită cu o ţesătură moale. Ea serveşte pentru îndepărtarea de pe tambur a particulelor lipite de el.

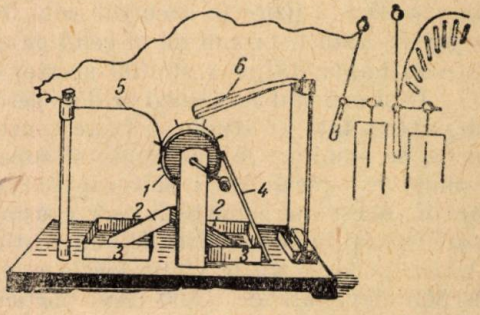


Fig. 2

De stratul de staniol se atinge o sîrmă 5, fixată pe un suport izolator. Sîrma este conectată la unul din polii maşinii Wimshurst. Deasupra tamburului pe placa de sticlă se fixează înclinat jgheabul 6, care reprezintă buncherul separatorului. Pe el se toarnă amestecul care urmează a fi separat. Prin rotaţia tamburului buncherul este scuturat prin intermediul unor cuişoare bătute în marginea stinghiei de lemn.

Dacă punem pe jgheab bucăţele mărunte de staniol şi încărcăm tamburul prin învîrtirea mînerului, foiţele de staniol, ajungînd pe tambur şi încărcîndu-se de la el, vor fi respinse şi vor zbura la stînga. Dacă însă înlocuim staniolul

cu hîrtie îmbibată în parafină, foiţele vor fi atrase de tambur. Placa 4 le va arunca în cutia din dreapta.

Astfel se demonstrează principiul separării conductorilor şi dielectricilor.

Se poate demonstra şi procedeul separării particulelor după mărime. Se toarnă în jgheab colofoniu pisat. Părticelele mari care nu pot fi reţinute de forţele electrostatice, cad în cutia din stînga, iar cele mărunte se lipesc de tambur şi sînt aruncate în cutia din dreapta.

Alipirea părticelelor de dielectric trebuie explicată ca o urmare a faptului că partea părticelelor care este îndreptată spre tamburul încărcat, se încarcă prin influenţă cu electricitate de semn contrar. Neutralizarea acestor sarcini nu se poate produce întrucît particula însăşi este un izolator.

Separatoarele electrostatice se întrebuinţează pentru separarea părticelelor de minereu de rocă sterilă (separatorul lui H. F. Olofinski), în atelierele siderurgice, pentru sortarea pămînturilor pentru confecţionarea formelor, şi în alte industrii.

Experienţele pot fi demonstrate în clasa X-a la studiul temei « Sarcini electrice şi cîmp electric ». Prima experienţă se poate demonstra şi în clasa a VII-a.

CU PRIVIRE LA ACTIVITATEA CERCURILOR DE ELEVI DIN ŞCOLI

Profesor **ION MUŞAT**

Directorul şcolii de 7 ani nr. 185 Chitila

AN de an, şcolile patriei noastre obţin succese remarcabile în educarea şi instruirea tinerii generaţii. Tineretul, căruia prin Reforma învăţămîntului din anul 1948, i s-au deschis larg porţile şcolii, se bucură de grija părintească a statului nostru democrat popular. Această grijă este oglindită în primul rînd, în Hotărîrile Partidului şi Guvernului în ceea ce priveşte învăţămîntul. Acum un an, Congresul al II-lea al Partidului Muncitoresc Romîn, prin Directivele elaborate, trasa şcolii sarcina de a acorda o mai mare atenţie ştiinţelor matematice şi fizice în decursul celui de-al doilea plan cincinal. În anul ce s-a scurs de atunci, primul an al celui de-al doilea cincinal, s-a şi observat o simţitoare îmbunătăţire a studiul acestor ştiinţe.

Deşi mai sînt încă elevi ce dovedesc o slabă pregătire şi manifestă un total dezinteres faţă de studiu — fapte constatate mai cu seamă cu prilejul examenelor de admitere în învăţămîntul superior — totuşi mulţi elevi au un bogat volum de cunoştinţe şi sînt capabili să-l folosească cu pricepere în diferite ocazii. Acest lucru poate fi uşor constatat şi din creşterea numărului de elevi participanţi la olimpiadele de matematică în anul 1956, faţă de anul precedent. Astfel, în acest an la etapa locală a olimpiadei de matematică au participat 10.800 elevi faţă de 9.800 elevi participanţi în 1955; iar la etapa regională, 1936 elevi faţă de 1.700 din anul precedent. De asemenea se constată antrenarea unui număr de şcoli din noi localităţi. În acest an numărul localităţilor din care s-au prezentat elevi la etapa regională a olimpiadei a crescut de la 95 cît era în 1955, la 126.

N-au trecut decît cîteva luni de la închiderea Congresului al II-lea al P.M.R. cînd Ministerul Învăţămîntului, acţionînd pe linia prevederilor din Directive, a pus în discuţia maselor largi de profesori, părinţi şi elevi propune-

rile sale cu privire la dezvoltarea și ridicarea învățămîntului de cultură generală din R.P.R. După ce aceste propuneri au fost larg dezbătute în întreaga țară și îmbunătățite cu propunerile venite din școli, ele au căpătat caracter de lege. Hotărîrea Consiliului de Miniștri al R.P.R. din vara aceasta, cu privire la îmbunătățirea învățămîntului, concretizează necesitățile actuale ale școlii noastre. Hotărîrea reglementînd activitățile extrașcolare și urmărind evitarea supraîncărcării elevilor, le crează condiții optime de studiu.

Acum, ca și în alte ocazii, revista noastră ține să arate elevilor rolul important al activităților extrașcolare la matematică și mai cu seamă al cercurilor de elevi care reprezintă formele de activitate cele mai larg răspîndite și în cadrul cărora se pot desfășura multe alte activități extrașcolare.

De la început ținem să arătăm care sînt scopurile și sarcinile activității extrașcolare la matematică în școala de cultură generală. Scopul acestei activități în condițiile țării noastre care construește socialismul, nu poate fi deosebit de scopul întregului învățămînt: educația multilaterală, politehnică, a tinerii generații prin însușirea bazelor matematicii, prin formarea unor deprinderi practice.

Sarcinile activității extrașcolare pe care cercurile de matematică din școli vor trebui să urmărească a le îndeplini sînt:

— lărgirea orizontului științific, completarea cunoștințelor de matematică, cunoașterea condițiilor istorice în care s-a dezvoltat matematica.

— crearea deprinderilor de calcul și perfecționarea lor, a efectuării lor în mod rațional și rapid, a aplicării cunoștințelor teoretice dobîndite la orele de curs, la rezolvări de probleme, construcții de corpuri și material didactic în general, executarea de planșe și lucrări practice;

— antrenarea în munca cercurilor și a elevilor cu nivel mediu de cunoștințe al căror interes pentru matematică nu a fost stîrnit și a căror curiozitate n-a fost dirijată și nici stimulată;

— formarea la elevi a voinței și perseverenței în muncă, a unei gîndiri logice și a exigenței științifice;

— consolidarea deprinderilor de muncă individuală a elevilor și îndreptarea lor spre încercări originale, înțelegînd prin aceasta: considerații asupra unor soluții de probleme, generalizări, note etc.;

— îndrumarea elevilor ce se disting în mod deosebit în activitățile din cadrul cercurilor, spre profesiuni de cercetare în învățămînt sau în alte domenii de activitate.

Bine înțeles că aceste sarcini nu se pot realiza exclusiv prin activitățile extrașcolare, munca din cadrul clasei avînd un rol primordial în îndeplinirea lor, iar activitățile extrașcolare fiind numai un prețios auxiliar.

Cele mai bune rezultate le-au obținut cercurile organizate pe clase paralele ca de pildă, cele organizate în cursul anului școlar 1955—56 la școala medie de băieți nr. 1 Ploești, școlile medii din Iași, școala medie de fete din Arad etc. Organizarea cercului pe clase paralele asigură un nivel mai omogen de pregătirea elevilor, interese asemănătoare vor stimula mult pe elevi în ce privește învățătura la clasă.

Se pot organiza și cercuri pe clase apropiate, așa cum au fost organizate în anul școlar precedent la școlile medii nr. 1 și 2 din Tg. Mureș, la Constanța etc.

Forma de bază a activității din cadrul cercului este ședința, care se poate ține săptămînal, bilunar sau lunar. Sîntem de părere că ținerea bilunară a ședințelor este cea mai indicată.

Organizarea unui astfel de cerc trebuie să înceapă cu popularizarea lui la gazeta de perete și în diverse acțiuni ale organizațiilor de tineret și să fie sprijinită de activele acestor organizații. Înscrierea în cerc este voluntară, elevii odată înscriși fiind obligați să frecventeze cu regularitate ședințele cercului. Nu vor fi admiși în cercul de matematică elevii care nu au note de trecere la toate obiectele de învățămînt.

Cercul se organizează în prima lună a anului școlar, dar primirea elevilor în cerc se poate face și în cursul anului pentru elevii care s-au ridicat peste nivelul mijlociu al clasei. Elevii care au o frecvență neregulată vor fi excluși din cerc. De datoria cercului este urmărirea mersului general la învățătură al membrilor lui și luarea de măsuri de îndreptare atunci cînd unul dintre membri obține note mici la vreun obiect de studiu. În cazul în care cu toate stăruințele depuse și cu tot sprijinul acordat, cel în cauză continuă să primească note slabe, el va fi exclus din cerc.

Evidența activității se ține într-un registru special în care se consemnează atît prezența cît și activitatea fiecărui membru. Este de dorit ca ședințele să se țină cu regularitate în zilele și la orele fixate.

O ședință obișnuită a cercului ar putea să decurgă astfel: se prezintă la începutul ședinței un referat întocmit de către unul din membrii cercului, pe baza unui material bibliografic cunoscut dinainte de către toți ceilalți membri. Se pun apoi întrebări pe marginea referatului și se fac completări. În a doua parte a ședinței se lucrează exerciții și probleme aplicative la tema referatului.

Nu toate ședințele trebuie să înceapă cu prezentarea unui referat. Pot fi și ședințe numai de rezolvări de probleme. În acest caz, materialul se face cunoscut cu o ședință mai înainte.

Tematica activității cercului trebuie să fie variată și adaptată condițiilor locale. Nu sîntem de părere să se trateze în cadrul cercului chestiuni din matematicile superioare care nu au contingență cu programa școlară. Este de dorit să se adîncească cunoștințele dobîndite la lecții. Subiecte pentru referate pot fi luate din «Gazeta matematică și fizică» seria B. Problemele care se propun spre rezolvare în ședințele cercului ar putea fi căutate de profesori, în numere mai vechi ale revistei sau în diferite culegeri de probleme. În nici un caz nu trebuie rezolvate în cadrul cercului probleme dintre cele propuse în ultimele numere ale revistei, aceasta pentru a nu împiedica pe membrii cercului să-și desfășoare și activitatea de rezolvitori de probleme din GMF-B. O parte din ședințe pot avea ca temă prezentarea unor figuri de matematicieni sau a unor etape importante din dezvoltarea matematicii.

În cadrul cercurilor elevii sînt îndrumați să participe la olimpiade, să organizeze excursii în cadrul cărora să efectueze diferite lucrări practice legate de cunoștințele căpătate. Tot cercul de matematică organizează și ședințe speciale de lucrări practice contribuind astfel, la stabilirea legăturii cu practica, la realizarea învățămîntului politehnic.

Una din formele cele mai folositoare de lucrări practice o constituie lucrările de măsurători pe teren, ca aplicații la geometrie și trigonometrie. Aceste lucrări dau elevilor posibilitatea de a cunoaște principiile de construcție a unor aparate folosite în practică, de a executa efectiv măsurătorile și de a cunoaște și posibilitățile de aplicare a matematicii în diferite domenii de activitate. Elevii își vor da astfel seama de utilitatea măsurătorilor geodezice și topografice, la construcția de căi ferate, poduri, diguri, șosele, în agricultură

la lucrări de irigare, asanare etc. Măsurătorile pe teren stimulează interesul elevilor pentru studiul matematicii, inițiativa și dezvoltarea deprinderilor practice.

În anul școlar 1955—56 în unele școli s-au obținut realizări însemnate în această direcție. Astfel, elevele claselor a IX-a și a X-a de la școala medie nr. 21 din Capitală au aplicat cunoștințele de trigonometrie la măsurarea unor distanțe inaccesibile. Elevele clasei a IX-a au măsurat o înălțime a cărei bază este accesibilă și alta a cărei bază este inaccesibilă — înălțimea coșului fabricii de conserve « Griviță » care se vede din curtea școlii. Elevele clasei a X-a au măsurat distanța dintre două puncte inaccesibile: distanța dintre coșul uzinelor « Matyas Rakosi » și turla unei biserici.

La clasa IX-a s-a arătat că determinarea înălțimii cu bază accesibilă se reduce în fond, la determinarea catetei unui triunghi drepunghic la care se cunosc unghiul ascuțit opus și cealaltă catetă. Pentru depterminarea înălțimii cu baza inaccesibilă s-au considerat două triunghiuri dreptunghice în același plan, avînd o catetă comună: înălțimea ce trebuia determinată.

La clasa a X-a s-au prezentat instrumentele necesare măsurătorii și s-a arătat cum trebuie folosite. S-a lucrat cu un teodolit.

La școala medie nr. 8 din București, lucrările practice s-au desfășurat și cu elevele claselor mai mici. Astfel, în cadrul cercului de matematică organizat cu elevele clasei a VI-a s-au făcut măsurători pe teren cu aplicații la geometrie, după ce în prealabil, cu sprijinul comitetului de părinți s-a confecționat un goniometru școlar, jaloane, țăruși și tot ceea ce este necesar lucrărilor practice. La început au fost executate cîteva lucrări simple (jalonarea unei distanțe, măsurarea ei, construirea unui unghi drept, intersecția a două drepte etc.), iar după aceea s-a măsurat distanța dintre două puncte dintre care unul este inaccesibil.

Asemenea lucrări practice la matematică au mai avut loc la Arad la Palatul Pionierilor și în alte puncte ale orașului, precum și în alte orașe ale țării.

Tot în cadrul cercurilor de matematică se pot organiza serate matematice. Seratele se pot organiza pe anumite probleme mari ale matematicii, altele pot fi consacrate unor mari matematicieni cu prilejul aniversării lor. O astfel de serată poate avea la ordinea de zi:

— prezentarea unui matematician (date biografice însoțite de descrierea operii lui),

— prelucrarea unor lucrări originale ale matematicianului comemorat.

Pentru a face ca serata să fie mai atractivă se pot introduce și probleme-glumă, paradoxuri matematice, curiozități matematice etc., materiale ce pot fi luate și din G.M.F. seria B din pagina « Caleidoscop matematic ».

La clasele V—VII se pot organiza victorine matematice, la care pot fi invitați și elevi din școlile învecinate. Dacă sînt condiții, elevii evidențiați în cadrul victorinelor este bine să fie stimulați prin premii în cărți, reviste etc.

În popularizarea tuturor acțiunilor în legătură cu activitățile extrașcolare la matematică, gazeta de perete matematică a școlii poate și trebuie să aibă un rol însemnat.

Un lucru foarte important în activitatea cercurilor este justa lor orientare în situațiile concrete ale școlii și orașului respectiv. Pentru a obține rezultate bune, conducătorii cercului trebuie să țină seamă de necesitățile clasei, să caute să împletească armonios diferitele activități extrașcolare.

Acționînd pe această linie, cerînd în permanență sprijinul profesorilor de specialitate și al organizațiilor de tineret din școli, elevii din școlile noastre, membri ai cercurilor de matematică, vor obține succese din ce în ce mai mari în pregătirea lor profesională, vor deveni oameni de mare folos patriei, vor avea satisfacția îndeplinirii îndatoririlor față de școală și față de poporul în mijlocul căruia trăiesc.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1984

Se dă piramida patrulată regulată $VABCD$ și se face o secțiune prin latura bazei AB și mijloacele M și N ale muchiilor VD și VC. Latura bazei acestei piramide este a, înălțimea este h. Să se determine volumul piramidei $VABMN$.

Radu Stroe, elev, Ploești

Soluție. — Pentru a afla volumul piramidei $VMNBA$ este necesar să cunoaștem aria $MNAB$ și înălțimea NH.

$$S_{MNAB} = \frac{(MN + AB)\,MM'}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right) MM'}{2} = \frac{3a \cdot MM'}{4}.$$

Avem:

$$DO = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$VD^2 = VO^2 + DO^2 = h^2 + \frac{2a^2}{4} = h^2 + \frac{a^2}{2}.$$

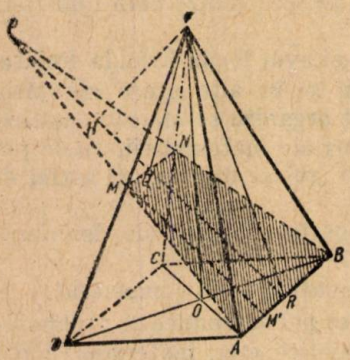


Fig. 1

MA fiind mediană în triunghiul VDA, avem:

$$MA^2 = \frac{VA^2 + DA^2}{2} - \frac{2\,VD^2}{8} =$$

$$= \frac{(DA^2 + VA^2)\,4 - 2VA^2}{8} = \frac{2DA^2 + VA^2}{4} =$$

$$= \frac{2a^2 + h^2 + \frac{a^2}{2}}{4} = \frac{5a^2 + 2h^2}{8}.$$

Mai departe:

$$M'A = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}, \text{ deci}$$

$$MM'^2 = MA^2 - M'A^2 = \frac{5a^2 + 2h^2}{8} - \frac{a^2}{16} = \frac{10a^2 + 4h^2 - a^2}{16} = \frac{9a^2 + 4h^2}{16},$$

$$MM' = \frac{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{4}.$$

Rezultă că

$$S_{MNAB} = \frac{3a\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{16}.$$

Mai avem de calculat pe VH. Din triunghiurile dreptunghice VQH și VRH avem:

$$VH^2 = QV^2 - HQ^2 \quad \text{și} \quad VH^2 = VR^2 - (QR + HQ)^2,$$

deci

$$QV^2 - HQ^2 = VR^2 - (QR^2 + HQ^2 + 2QR \cdot HQ),$$
$$QV^2 - HQ^2 = VR^2 - QR^2 - HQ^2 - 2QR \cdot HQ,$$
$$QV^2 = VR^2 - QR^2 - 2QR \cdot HQ,$$

însă $VQ = \frac{VR}{2}$, deci:

$$\frac{VR^2}{4} - VR^2 + QR^2 = -2QR \cdot HQ,$$

$$2QR \cdot HQ = VR^2 - \frac{VR^2}{4} - QR^2,$$

$$HQ = \frac{\frac{4VR^2 - VR^2}{4} - QR^2}{2QR} = \frac{3VR^2 - 4QR^2}{8QR} = \frac{3VR^2 - 4QR^2}{8MM'} = \frac{4VR^2 - 4M'M^2}{8MM'}.$$

Avem:

$$VR^2 = VO^2 + OR^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4h^2 + a^2}{4},$$

deci

$$HQ = \frac{\frac{12h^2 + 3a^2}{4} - 4\frac{9a^2 + 4h^2}{16}}{2\sqrt{9a^2 + 4h^2}} = \frac{12h^2 + 3a^2 - 9a^2 - 4h^2}{8\sqrt{9a^2 + 4h^2}} = \frac{8h^2 - 6a^2}{8\sqrt{9a^2 + 4h^2}} =$$
$$= \frac{4h^2 - 3a^2}{4\sqrt{9a^2 + 4h^2}}.$$

Deci

$$VH^2 = VQ^2 - HQ^2 = \frac{VR^2}{4} - HQ^2 = \frac{4h^2 + a^2}{16} - HQ^2 = \frac{4h^2 + a^2}{16} - \frac{(4h^2 - 3a^2)^2}{16(9a^2 + 4h^2)} =$$
$$= \frac{a^2h^2}{9a^2 + 4h^2}; \quad VH = \frac{ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}.$$

Rezultă în sfîrşit, că

$$V = \frac{S_{ABMN} \times VH}{3} = \frac{\frac{3a\sqrt{9a^2 + 4h^2}}{16} \cdot \frac{ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}}{3} = \frac{\frac{3a^2h}{16}}{3} = \boxed{\frac{a^2h}{16}}.$$

Problema este astfel rezolvată.

Problema 2096

Un cerc cu centrul în punctul comun a trei cercuri egale ce se taie în punctele A, B, C întîlneşte aceste cercuri în şase puncte astfel încît dreptele determinate de două puncte neconsecutive concură două cîte două în punctele A, B, C şi sînt egal înclinate pe laturile triunghiului ABC.

Gh. Dobrotescu

Soluţie. — Pentru uşurinţă, fie O_1 şi O_2 centrele a două cercuri din cele trei date care se taie în punctul A şi în punctul O comun celor trei cercuri date şi egale. Un cerc cu centrul în O taie cercurile O_1 şi O_2 în punctele B', C' şi B'', C''.

Din fig. 1 avem $\sphericalangle AB'O = \frac{\text{arc } AB''O}{2}$, $\sphericalangle AC'O = \frac{\text{arc } AC''O}{2} = \frac{\text{arc } AB'O}{2}$, iar din triunghiul isoscel $OB'C'$, $\sphericalangle OB'C' = \sphericalangle AC'O$ şi astfel, $\sphericalangle AB'O + \sphericalangle C'B'O = 180°$, relaţie care arată că dreapta $B'C'$ trece prin A. Analog pentru dreapta $B''C''$ şi pentru celelalte.

Din fig. 2 avem, $2 \sphericalangle C' = \text{arc } AC'B = \sphericalangle 2C''$, $\sphericalangle 2C = \text{arc } AB' + \text{arc } B'B'' + \text{arc } BA''$ sau $2 \sphericalangle C = \text{arc } AC'' + \text{arc } C''C' + \text{arc } C'B = \text{arc } AC'B = 2 \sphericalangle C'$, deci $\sphericalangle C = \sphericalangle C' = \sphericalangle C''$.

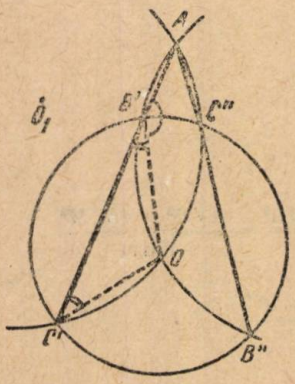


Fig. 1

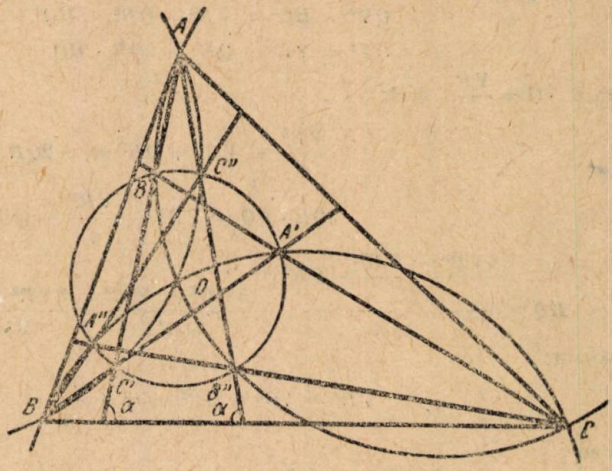


Fig. 2

Analog găsim $\sphericalangle B = \sphericalangle B' = \sphericalangle B''$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = \sphericalangle A''$ și astfel dreptele ce unesc două puncte neconsecutive sînt egal înclinate pe laturile triunghiului ABC.

Să notăm cu α acest unghi. Pentru $\alpha = 0°$ dreptele ce unesc două puncte neconsecutive devin paralele cu AB, BC, CA și triunghiul $A'B'C'$ coincide cu triunghiul $A''B''C''$ obținîndu-se anticomplimentarul triunghiului ABC. În acest caz de figură, cercul $A'B'C'$ devine tritangent celor trei cercuri egale de punct comun O și deci, cercul ABC este egal cu cele trei cercuri date.

Notă. În 1908, la concursul «Gazetei Matematice» din acel an, *Gh. Țițeica* propune următoarea problemă:

«Printr-un punct O al planului se duc trei cercuri egale care se mai taie afară de punctul O în punctele A, B, C. Să se demonstreze că cercul ABC este și el egal cu cele trei date».

Această simplă și frumoasă teoremă de geometrie a fost numită «problema piesei de 5 lei», deoarece Țițeica spunea că a găsit-o întîmplător, folosind o asemenea monetă. Ea a format multă vreme pasiunea cercetătorilor romîni care lucrau pe atunci geometrie elementară.

Problema 2097

Să se demonstreze identitatea:

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c)(\alpha c + \beta a + \gamma b)(\alpha b + \beta c + \gamma a) -$$
$$- (\alpha c + \beta b + \gamma a)(\alpha b + \beta a + \gamma c)(\alpha a + \beta c + \gamma b) =$$
$$= (\alpha - \beta)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(a - b)(b - c)(c - a).$$

Mircea Adam

Soluție. — Dacă facem $\alpha = \beta$ prima parte a identității din enunț devine:

$$[\alpha(a + b) + \gamma c][\alpha(c + a) + \gamma b][\alpha(b + c) + \gamma a] -$$
$$- [\alpha(b + c) + \gamma a][\alpha(a + b) + \gamma c][\alpha(c + a) + \gamma b] = 0$$

și la fel, dacă facem $a = b$, etc. rezultă că partea a doua a identității va fi de forma:

$$k(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(a - b)(b - c)(c - a)$$

și făcînd $\alpha = a = 0$, $\beta = b = 1$, $\gamma = c = 2$ găsim $k = 1$.

Problema 2240

Să se arate că $4^n + 15n - 1$ *se divide cu* 9.

* * *

Soluție. — Procedăm prin inducție completă.

Pentru $n = 1$ avem $4 + 15 - 1 = 18 = M9$.

Presupunem că $4^k + 15k - 1 = M9$. Trebuie să arătăm că este valabilă și pentru $k + 1$.

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = M9$$

sau

$$4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = M9$$

însă,

$$(4^k + 15K - 1) = M9,$$

deci prin scădere obținem:

$$3(4^k + 5) = M9,$$

însă $4 = 3 + 1; 5 = 3 + 2$, deci: $3(M3 + 1^k + 2) = M9$, ceeace este evident.

Notă. Această problemă trimisă de un rezolvitor, se mai găsește în *Cours d'arithmétique* de A. Tartinville, pag. 138.

Problema 2248

Se consideră un patrat $ABCD$ *și un punct* M *situat în planul său. Se notează:* $AB = BC = CD = DA = m$; $MA = a$, $AB = b$, $MC = c$.

1° *În cazul particular* $m = \sqrt{10}$, $a = 5$, $c = 1$, *punctul* M *poate avea două poziții:* M_1 *și* M_2. *Să se calculeze:* $M_1B = b_1$; $M_2B = b_2$.

2° *Revenind la cazul general, să se arate că între lungimile* m, a, b, c, *avem relația:*

$$(a^4 + c^4) - 2(a^2 + c^2)(b^2 + m^2) + 2(b^4 + m^4) = 0.$$

Să se aplice la rezolvarea punctului 1°.

3° *Dîndu-se valorile:* $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, *să se deducă latura patratului.*

4° *Să se dea o construcție geometrică a patratului cînd se cunosc distanțele* $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. *Să se facă efectiv construcția pentru* $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$.

5° *Se presupune acum, că distanțele* a *și* c *păstrează valorile* $a = 5$, $c = 1$ *de la punctele* 3° *și* 4° *ale problemei, dar că distanța* b *poate lua și alte valori decît* $b = 3$.

Care sînt valorile ce pot fi date lui b *pentru ca determinarea patratului să fie posibilă? Care sînt valorile laturii patratului ce corespund valorilor extreme ale lui* b?

6° *(facultativ) Să se generalizeze punctul* 5° *pentru* a *și* c *oarecari dați.*

7° *(facultativ) Relația de la punctul* 2° *nu se schimbă dacă schimbăm între ele* b *și* m *(adică este simetrică în raport cu* b *și* m*). Să se explice geometric acest fapt.*

Observație. **Toate cele 7 puncte ale problemei pot fi tratate independent între ele. La punctele 3°, 5°, 8°, 7° se permite folosirea relației dela punctul 2°, chiar dacă acest punct nu a fost studiat de candidat. Deasemenea este posibilă abordarea directă a punctului 6° și tratarea punctului 5° drept aplicație.**

(Lucrare scrisă pentru clasa IX-a. Olimpiada Matematică 1956).

Soluție. — 1° *Construcția grafică.* Se desenează un patrat $ABCD$ cu latura $\sqrt{10} \simeq 3{,}16$; se descriu cercuri cu centrele în A și C de raze 5 și 1 respectiv; la intersecția lor avem punctele M_1 și M_2.

Calculul distanțelor M_1B *și* M_2B. — În triunghiul ACM_1 cunoaștem laturile și putem calcula unghiul $\alpha = CAM_1$:

$$\overline{M_1C}^2 = \overline{M_1A}^2 + \overline{CA}^2 - 2\,\overline{M_1A} \cdot \overline{CA} \cos \alpha$$

adică,

$$1 = 25 + 20 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{20} \cos \alpha,$$

de unde

$$\cos \alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}, \text{ și deci } \sin \alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

Notînd $\varphi_1 = BAM_1$, avem $\varphi_1 = 45^2 + \alpha$, deci,

$$\cos \varphi_1 = 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha = \frac{9}{5\sqrt{10}}.$$

Din triunghiul BAM_1, avem:

$$\overline{BM_1}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AM_1}^2 - 2\,\overline{BA} \cdot \overline{AM_1} \cdot \cos \varphi_1 =$$

$$= 10 + 25 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 5 \frac{9}{5\sqrt{10}} = 17,$$

$$\overline{BM_1} = \sqrt{17}.$$

Analog, $\varphi_2 = 45 - \alpha$; $\cos \varphi_2 = \frac{13}{5\sqrt{10}}$; $BM_2 = 3$.

2°. — Relația cerută se obține astfel: Fie P și Q proiecțiile lui M pe AB, BC. Calculăm segmentul PB din triunghiul ABM (prin teorema lui Pitagora generalizată), apoi segmentul QB din triunghiul CBM; rezultatele obținute le înlocuim în relația $\overline{PB}^2 + \overline{QB}^2 = \overline{MB}^2$. Avem:

$$\overline{MA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{MB}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{PB},$$

$$a^2 = m^2 + b^2 - 2m \cdot \overline{PB},$$

de unde,

$$\overline{PB} = \frac{m^2 + b^2 - a^2}{2m}.$$

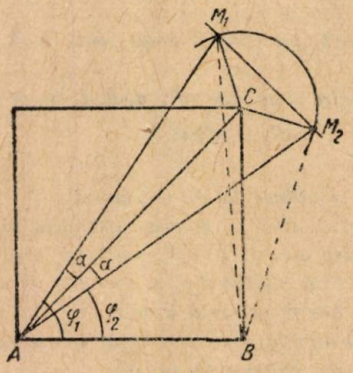


Fig. 1

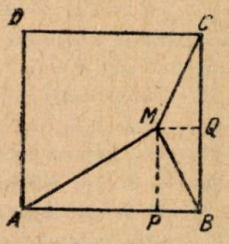


Fig. 2

La fel, $\overline{QB} = \frac{m^2 + b^2 - c^2}{2m}$. Înlocuind, obținem:

$$\frac{(m^2 + b^2 - a^2)^2}{4m^2} + \frac{(m^2 + b^2 - c^2)^2}{4m^2} = b^2.$$

Efectuînd calculele și grupînd termenii, obținem relația

$$a^4 + c^4 - 2(a^2 + c^2)(b^2 + m^2) + 2(b^4 + m^4) = 0.$$

Înlocuind $a = 5$, $c = 1$, $m = \sqrt{10}$, obținem $b^4 - 26b^2 + 153 = 0$.

de unde $b_1 = \sqrt{17}$; $b_2 = 3$.

3° Înlocuind în relație pe a,b,c cu valorile date, obținem

$$m^3 - 26m^2 + 160 = 0$$

de unde $m_2 = \sqrt{10}$; $m_2 = 4$.

Prima valoare a lui m corespunde cazului de la punctul 1° (valoarea $b_1 = 3$). A doua valoare corespunde unei figuri în care punctul M este pe latura BC.

4° Să luăm în plan un segment MB avînd valoarea dată şi să căutăm poziţiile punctelor A şi C. Să facem următoarea observaţie.

Punctul C se poate deduce din punctul A, printr-o rotaţie de 90° a punctului A în jurul punctului B.

În consecinţă, dacă punctul B este fix, iar punctul A descrie o curbă atunci punctul C descrie curba obţinută din cea descrisă de punctul A printr-o rotaţie de 90° cu centrul în B.

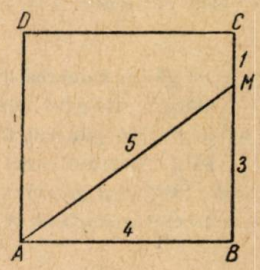


Fig. 2 bis

Să aplicăm cele spuse la construcţia cerută. Anume, vom determina poziţia punctului C prin metoda intersecţiei locurilor geometrice.

a) Condiţia $MC = c$ (c fiind dat), arată că punctul C descrie un cerc cu centrul în M de rază c. Să notăm cu (C') acest cerc.

b) Condiţia $MA = a$ (a fiind dat), arată că punctul A descrie un cerc cu centrul în M de rază a; să notăm acest cerc cu (A). Conform celor spuse mai sus, în acest caz punctul C va descrie un cerc, ce se obţine din cercul (A) printr-o rotaţie de 90° în jurul punctului B; să notăm cu (C'') acest cerc. Centrul cercului (C'') este punctul N obţinut din M printr-o relaţie de 90° în jurul punctului B, iar raza cercului (C'') este egală cu raza cercului (A), adică este a.

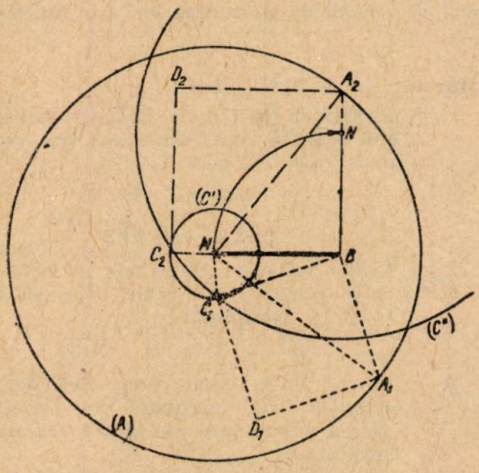


Fig. 3

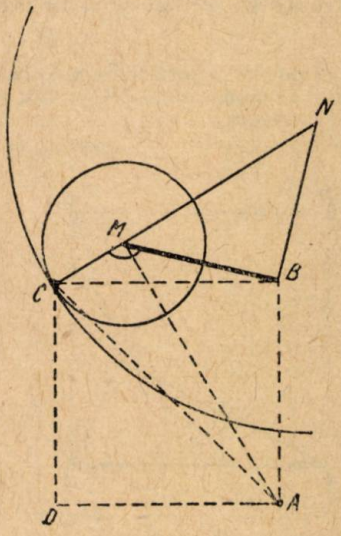


Fig. 4

Punctul C se află la intersecţia cercurilor (C') şi (C''). Aceste cercuri se taie în două puncte, C_1 şi C_2. Odată cunoscute aceste puncte, reconstituirea patratului este imediată. Se obţin patratele $A_1B_1C_1D_1$ (linii scurte) şi $A_2B_2C_2D_2$ (linii lungi).

5° Acest punct (împreună cu punctul 6°) sînt generalizarea şi discuţia punctelor 3° şi 4°,

Tratarea geometrică. — Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca cercurile (C') şi (C'') să se intersecteze. Distanţa centrelor este $MN = b\sqrt{2}$, iar razele sînt a şi c. Presupunînd pentru fixarea ideilor, $a > c$, condiţia de posibilitate este

$$a - c \leqslant b\sqrt{2} \leqslant a + c,$$

de unde

$$\frac{a-c}{\sqrt{2}} \leqslant b \leqslant \frac{a+c}{\sqrt{2}}.$$

În cazul particular $a = 5$, $c = 1$, obținem

$$2\sqrt{2} \leqslant b \leqslant 3\sqrt{2}.$$

Să găsim valoarea laturii patratului ce corespunde unei valori extreme a lui b.

Dacă b este egal cu una din valorile extreme, atunci cercurile (C') și (C'') sînt tangent și avem pentru punctul C o singură poziție pe linia centrelor, adică pe dreapta MN.

Să considerăm cazul cînd cercurile sînt tangente interior. În acest caz, unghiul BMC este de 135°, deci patrulaterul $ABMC$ este inscriptibil.

În consecință, unghiul AMC este drept și avem:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2$$

adică,

$$2m^2 = a^2 + c^2 \quad ; \quad m = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

La același rezultat se ajunge dacă cercurile sînt tangente exterior. În cazul particular $a = 5$, $c = 1$, obținem $m = \sqrt{13}$.

Tratare algebrică. — Înlocuind $a = 5$ și $c = 1$ obținem ecuația:

$$m^4 - 26m^2 + b^4 - 26b^2 + 313 = 0.$$

Valorile lui m^2 trebuie să fie reale și pozitive. Însă produsul rădăcinilor,

$$b^4 - 26b^2 + 313 = (b^2 - 13)^2 + 144,$$

este pozitiv pentru toate valorile lui b, iar suma rădăcinilor de asemenea, deci este suficient ca discriminantul să fie pozitiv sau nul.

Avem:

$$\Delta = 13^2 - (b^4 - 26b^2 + 313) = -(b^4 - 26b^2 + 144).$$

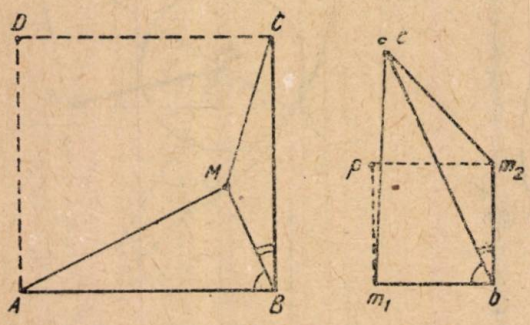


Fig. 5

Rădăcinile (în b^2) ale discriminantului sînt 8 și 18, deci discriminantul este pozitiv sau nul cînd:

$$8 \leqslant b^2 \leqslant 18,$$

$$2\sqrt{2} \leqslant b \leqslant 3\sqrt{2}.$$

Pentru valorile extreme ale lui b rădăcinile ecuației sînt egale între ele și egale cu semisuma:

$$m^2 = 13 \quad ; \quad m = \sqrt{13}.$$

6° În tratarea geometrică, generatoarea este conținută în punctul precedent; rămîne să facem tratarea algebrică.

Ordonînd în raport cu m^2, obținem

$$2m^4 - 2(a^2 + c^2)m^2 + [2b^4 - 2(a^2 + c^2)b^2 + a^4 + c^2] = 0.$$

Suma rădăcinilor este pozitivă, iar produsul se scrie:

$$b^4 - 2a^2b^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + c^4 = (b^2 - a^2)^2 + (c^2 - a^2)^2,$$

adică este de asemenea pozitiv. Discriminantul este:

$$(a^2 + c^2)^2 - 2[2b^4 - 2(a^2 + c^2)b^2 + a^4 + c^4] = -4b^4 + 4(a^2 + c^2)b^2 - (a^2 - c^2)^2.$$

Considerîndu-l ca un trinom în b^2, se regăsesc rădăcinile sale în b^2:

$$b_1^2 = \frac{(a+c)^2}{2} \quad ; \quad b_2^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

Discriminantul este pozitiv (sau nul) dacă $\frac{(a-c)^2}{2} \leqslant b^2 \leqslant \frac{(a+c)^2}{2}$ sau, luînd pentru fixarea ideilor $a > c$, $\frac{a-c}{\sqrt{2}} \leqslant b \leqslant \frac{a+c}{\sqrt{2}}$.

Dacă b este egal cu una din valorile extreme, valorile lui m sînt egale cu semisuma rădăcinilor:

$$m^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}.$$

7° Din punct de vedere geometric, simetria relației înseamnează lucrul următor:

Dacă avem un patrat cu latura m, pentru care cele trei distanțe sînt a, b, c, atunci avem un patrat de latură b pentru care cele trei distanțe sînt a, m, c.

Fie $ABCD$ primul patrat, M un punct în planul său. Să luăm triunghiurile ABM, CBM — care au laturile AB și BC egale — și să le alipim dealungul acestor laturi. Vom obține figura am_1bm_2 în care: $bm_1 = BM$, $bm_2 = BM$, deci $bm_1 = bm_2$ și deasemenea,

$$\sphericalangle m_1 bm_2 = \sphericalangle m_1 b a + \sphericalangle m_2 b c = \sphericalangle MBA + \sphericalangle MBC = 90°.$$

Rezultă că figura am_1bm_2 poate fi completată pînă la un patrat cu ajutorul unui punct p.

Problema 2264

Dispunem de două elemente galvanice identice, cărora vrem să le determinăm forța electromotoare și rezistența interioară. În acest scop se montează întîi în serie, apoi în paralel, și în ambele cazuri montajul este făcut să debiteze curent într-o rezistență de 2 ohmi. Se constată că în primul caz curentul este de 0,75 A, iar în al doilea caz este 0,6 A. Să se afle caracteristicele acestor elemente.

(Cercul de fizică, București)

Soluție. — Să notăm cu E forța electromotoare a unui element și cu r rezistența sa interioară.

Dacă elementele sînt montate în serie, ele echivalează cu un element avînd f.e.m. de $2E$ și rezistența interioară $2r$; rezistența totală fiind $2r + 2$, avem:

$$0{,}75 = \frac{2E}{2r + 2}.$$

Dacă elementele sînt montate în paralel, ele echivalează cu un element avînd f.e.m. E și rezistența interioară $\frac{r}{2}$; rezistența totală fiind $\frac{r}{2} + 2$, avem:

$$0{,}6 = \frac{E}{\frac{r}{2} + 2}.$$

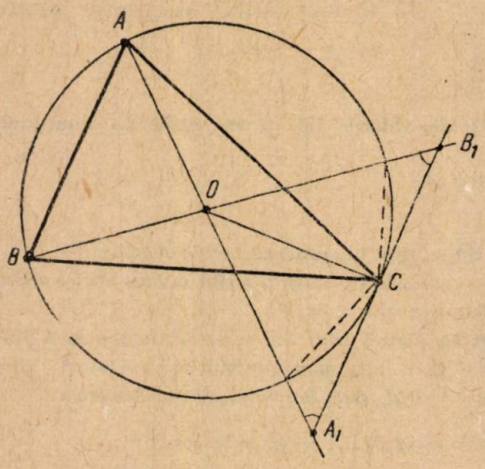
Rezolvînd sistemul obținut, găsim $E = 1{,}5\ V$; $r = 1\ \Omega$.

Problema E: 755

Într-un cerc de centru O și rază R se înscrie un triunghi ABC. Razele AO și BO întîlnesc tangenta în C la cerc, respectiv în punctele A_1 și B_1. Să se găsească unghiurile triunghiului OA_1B_1 cunoscînd unghiurile triunghiului ABC.

Dragomir Șt. Donescu, student

Soluție. — Avem: $\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle AOB$ ca opuse la vîrf. Însă $\sphericalangle AOB = 2C$, deci $\sphericalangle A_1OB_1 = 2C$ (vezi figura).



În triunghiul AA_1C avem:

$$\sphericalangle OA_1B_1 = 180° - (\sphericalangle ACA_1 + \sphericalangle A_1AC).$$

Însă

$$\sphericalangle ACA_1 = 180° - \sphericalangle ACB_1 = 180° - \sphericalangle B$$

$$\sphericalangle A_1AC = 90° - \sphericalangle B,$$

deci:

$$\sphericalangle OA_1B_1 = 2B - \sphericalangle 90°.$$

Deasemenea, în triunghiul avem: $\sphericalangle OBC$

$$BB_{11}C = 180° - (\sphericalangle BCB_1 + \sphericalangle CBB_1).$$

Cum $\sphericalangle BCB_1 = 180° - \sphericalangle BCA_1 = 180° -$

$$- \sphericalangle A \text{ și } \sphericalangle CBB_1 = 90° - A,$$

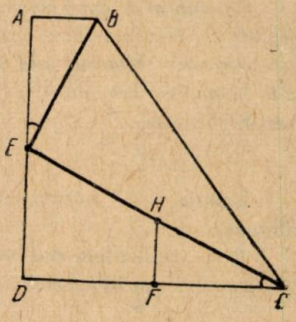
rezultă:

$$\sphericalangle OB_1C = 2A - 90°.$$

Problema E: 756

În trapezul dreptunghic $ABCD$ de baze AB, CD fie E mijlocul înălțimii AD și $AD = DC$. Să se arate că dacă BE este perpendicular pe EC, atunci suprafața trapezului $ABCD$ este egală cu $10 \cdot AB^2$.

Gh. Dobrotescu, Predeal



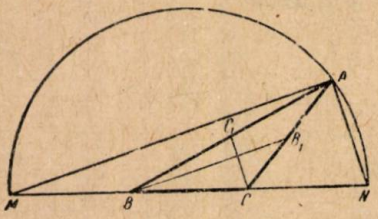
Soluție. — Se observă că $\sphericalangle DCE = \sphericalangle AEB$, avînd laturile perpendiculare. Dacă luăm mijlocul F al bazei DC și ridicăm perpendiculara, obținem triunghiul HFC egal cu triunghiul ABE. Avem: $HF = AB = \frac{AD}{4}$ și suprafața trapezului este:

$$S = \frac{(AB + 4\,AB)\,4\,AB}{2} = \frac{20\,AB^2}{2} = 10 \cdot AB^2.$$

Problema E: 760

Să se afle locul geometric al vîrfului A al unui triunghi oarecare ABC pentru care BC fiind fixă, medianele corespunzătoare laturilor AB și AC rămîn perpendiculare.

Stănășilă Octavian, absolvent, București



Soluție. — Fie ABC un triunghi în care medianele BB_1 și CC_1 sînt perpendiculare. Ducînd prin vîrful A cîte o paralelă la medianele BB_1 și CC_1, fie M și N intersecțiile acestor paralele cu latura BC. După o cunoscută teoremă vom avea:

$$BC = BM = CN.$$

$\sphericalangle MAN$ și $\sphericalangle (BB_1, CC_1)$ avînd laturile paralele, avem: $\sphericalangle MAN = 90°$. Punctele M și N fiind fixe locul geometric al vîrfului A va fi cercul de diametru $MN = 3BC$ de centru A_1, mijlocul lui BC.

PROBLEME PROPUSE *)

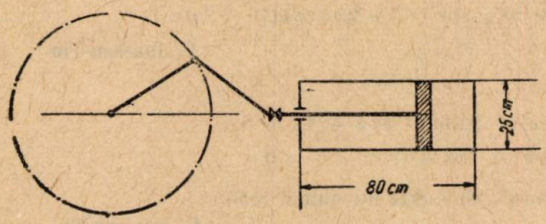
2418. — *a)* Un obiect este așezat în fața unei lentile convergente care formează o imagine de 4 ori mai mare decît obiectul. Distanța dintre obiect și imagine este de 100 cm. La ce distanță de lentilă se găsește obiectul și cît de mare este distanța focală a lentilei?

b) Echivalentul mecanic al caloriei. Legea conservării energiei în procesele mecanice și termice.

c) Fenomenul de inducție electromagnetică. Legea lui Lenz.

(Admiterea în Facultatea de matematică și fizică, București 1956)

2419. — *a)* Pistonul unei mașini cu vapori, lucrînd pe ambele fețe, are o cursă de 80 cm și un diametrul de 25 cm. Presiunea medie a vaporilor pe piston este de 6 kgf/cm². Mașina efectuează 150 rot/min. Se cere:



— puterea mașinii în *CP* (cai putere) și în kW (kilowați);

— cantitatea de căldură (în kilocalorii) ce se transformă pentru obținerea acestei puteri.

Se neglijează pierderile de căldură și diametrul tijei pistonului

b) Forța și masa. Unitățile lor de măsură. Densitate (masă specifică) și greutate specifică. Expresiile lor matematice și relațiile dintre ele.

c) Transformarea energiei electrice în energie calorică. Legea lui Joule-Lenz.

(Admiterea în Inst. tehnic, Galați)

2420. — Socotindu-se că tot sulful din pirită se transformă în SO_2 să se calculeze cîți litri de H_2SO_4 se vor obține din 1500 kg pirită dacă pierderile din instalație sînt de 14%.

2421. — Se consideră un punct M în planul patrulaterului $ABCD$. În M se duce perpendiculara MN egală cu AM, pe AM. Să se arate că raportul $\frac{BM}{CN}$ nu depinde de poziția punctului M.

Gh. I. Andricioaiei, elev, Botoșani

2422. — Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare și r raza sferei înscrise tetraedrului. Se duc plane tangente la sfera înscrisă, paralele respectiv cu fețele tetraedrului și se obțin astfel patru tetraedre. Dacă r_a, r_b, r_c, r_d, sînt razele sferelor înscrise respectiv în tetraedrele obținute, să se arate că există relația:

$$r_a + r_b + r_c + r_d = 2r.$$

Simon St. Petre

2423. — Fie ABC un triunghi oarecare și dreapta mobilă B_1C_1 antiparalelă cu BC Perpendicularele în B_1 și C_1 pe laturile AC respectiv AB se intersectează în M. Se cere:

a) locul geometric al punctului M; *b)* locul geometric al centrului cercului circumscris patrulaterului BCD_1C_1.

Valeriu Hulubei, elev, Craiova

---

*) Clasa VIII: (2420, 2424, 2432, 2434, 2438, 2439, 2440).

2424. — Să se formeze ecuația de gradul al doilea dacă între rădăcinile ei există relațiile:

$$2x_1x_2 - x_1 + x_2 = 1 \quad ; \quad (x_2 - 1)(x_1 + 1) = m - 5$$

unde m este un parametru.

Să se găsească m din ecuația de mai sus astfel ca o rădăcină să fie dublul celeilalte rădăcini.

P. Mecea, Dej

2425. — Să se arate că dacă $n+5$ este patratul unui număr întreg mai mare decît 3, expresia $E = (n + 1)(n^2 - 16)\sqrt{n + 5}$ se divide exact prin 5040 cînd n este impar și prin 40 320 cînd n este par.

C. I. Ț.

2426. — Să se arate că dacă $0 < x < 10°$, avem:

$$\sin(50° + x)\cos(20° + x) > \sin(40 + 2x)\cos(10 + 2x).$$

C. Ionescu-Țiu

2427. — Să se rezolve ecuațiile:

$$5x^3 - (5a - 6)x^2 - 2(3a - 5)x + 12 = 0,$$

$$2x^3 - (2a + 3)x^2 + (3a + 4)x - 6 = 0,$$

știind că admit cel puțin o rădăcină comună, iar a este un număr real.

C. Ionescu-Țiu

2428. — Fie un triunghi ABC și AA_1, BB_1, CC_1 trei ceviene concurente în P. Paralelele din C_1 și B_1 la BB_1 și AA_1 taie pe AC respectiv în S și T; iar paralela din B_1 la AB taie pe BC în R.

Să se arate că punctele R, S, T, sînt colineare.

Gh. I. Bercea

2429. — Să se arate că:

$$n(n + 1)(n + 2)\ldots(2n - 2) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n - 3) \cdot 2^{n-1}.$$

* * *

2430. — Dacă într-un triunghi patratele laturilor sînt în progresie artitmetică în ordinea a^2, b^2, c^2, atunci unghiul B poate fi cel mult egal cu 60°.

N. Gheorghiu, Iași

2431. — Două pendule electrice avînd lungimile de 20 cm, sînt suspendate în același punct. Masa fiecărui pendul este de 0,1 g iar unghiul dintre firele de suspensiune este de 90°.

Să se determine sarcina electrică de pe fiecare pendul, sferele avînd aceiași sarcină.

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2432. — O bară cu secțiunea rotundă, avînd diametrul $d = 1$ cm, cu lungimea $l = 1$ m la temperatura de 0°C este încălzită pînă la 300°C. Știind că materialul din care este făcută bara are un coeficient de dilatare liniară $\alpha = 10^{-5}$ și un modul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², să se calculeze mărimea forței de întindere sub acțiunea căreia bara va suferi aceiași alungire ca în cazul încălzirii.

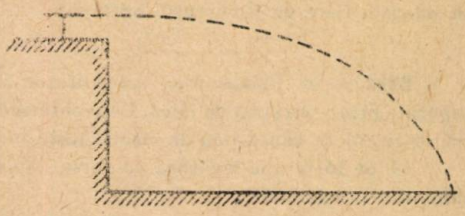
(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2433. — Imaginea unui obiect într-o oglindă concavă este de 3 ori mai mare decît obiectul. Știind că distanța dintre obiect și imagine este de 10 cm, să se afle raza de curbură a oglinzii.

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2434. — Un tun este așezat pe un deal ca în figură:

Înălțimea dealului este de 100 m. Tunul trimite proiectilul după o direcție orizontală Proiectilul atinge pămîntul la o distanță de 3 km de baza dealului.



Să se calculeze lungimea țevii tunului știind că mișcarea proiectilului în tun este uniform variată și timpul cît proiectilul se mișcă în tun este $t=10^{-2}$ s. Se consideră că nu există frecare.

(Inst. Politehnic, Orașul Stalin)

2435. — Să se construiască un triunghi cunoscînd valoarea unui unghi și lungimile a două din laturile triunghiului ortic.

Gh. Buicliu

2436. — Să se determine extremele expresiei:

$$E = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x.$$

Gh. I. Stoian, student București

2437. — Dacă M este un punct mobil pe arcul AB al cercului circumscris patratului $ABCD$ și notăm cu A_1, B_1 intersecțiile lui MD, MC cu AB să se arate că:

$$\frac{1}{AA_1^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BB_1^2} = 2\left(\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{BM^2}\right.$$

N. Păun, R. Vîlcea

2438. — Un automobil are o viteză inițială de 10 m/s. Cînd frînează, își micșorează viteza timp de 3 secunde pînă la viteza de 6 m/s. Să se afle accelerația și distanța parcursă de automobil în timpul frînării.

G. Văgăunescu, elev, Ploești

2439. — Într-un triunghi oarecare ABC, fie A_1, B_1 picioarele înălțimilor duse din A și B, iar H ortocentrul; Cx și Cy simetricele lui CH în raport cu AC și BC; iar A_2 și B_2 proiecțiile lui A și B respectiv pe Cx și Cy. Să se demonstreze că punctele A_2 A_1 B_1B_2 sînt colineare.

C. Munteanu, Tecuci

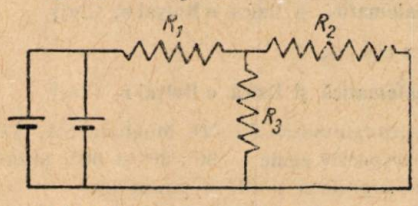
2440. — Să se găsească numerele de trei cifre de forma abc $(a \neq 0)$ care să fie egale cu dublul patratului sumei cifrelor lor.

Al. Țigănoiu

2441. — Se consideră o rețea de pătrate de latură dată, care acoperă întreg planul. Să se demonstreze că nu există nici un triunghi echilateral ale cărui vîrfuri să fie noduri ale rețelei.

* * *

2442. — Dispunem de două elemente galvanice identice, a căror forță electromotoare a fost determinată prin măsurarea în circuit deschis și găsită egală cu 2 V. Rezistența interioară este necunoscută.



a) Se montează între bornele unui element o rezistență R de 3 ohmi și se constată că se obține un curent de 0,5 A. Care este rezistența interioară a elementului?

b) Dacă se montează cele două elemente în serie, ce curent vor da ele în rezistența R?

c) Ce curent vor da elementele în rezistența R dacă sînt montate în paralel?

d) Se taie rezistența R în trei bucăți identice între ele, R_1, R_2, R_3 care se montează ca în schemă. Care va fi curentul obținut?

(Cercul de fizică, București)

2443. — *a)* Plăcile unui condensator au 1 dm², distanța între ele este 1 mm și sînt separate printr-un strat de mică. Condensatorul se încarcă de la o sursă cu tensiunea de 5000 V. Să se calculeze cantitatea de electricitate înmagazinată și energia condensatorului.

b) Se întrerupe legătura cu sursa, apoi se scoate placa de mică, celelalte elemente rămînînd neschimbate.

Ce devine diferența de potențial între plăci și energia condensatorului?

Cum se aplică în cazul de față principiul conservării energiei? Se dă constanta dielectrică pentru mică = 7.

* * *

CHESTIUNI DE EXAMEN

DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTE ȘI FACULTĂȚI ÎN AUGUST 1956

2444. — Două persoane A și B pleacă în același moment din două localități P și Q. Una merge din P spre Q și înapoi, cealaltă din Q spre P și înapoi, ambele fără oprire și cu viteze constante. Cele două persoane se întîlnesc de două ori: prima dată la 6 km de P, iar a doua oară, cu 3 ore după prima întîlnire, la 4 km de Q. Să se găsească distanța PQ și vitezele cu care merg cele două persoane.

(La facultatea de matematică și fizică «Bolyai» Cluj)

2445. — Să se rezolve sistemul:

$$x + y = \frac{5}{6}\, xy,$$

$$x^2 + y^2 = 13.$$

(La facultatea de matematică și fizică «Bolyai», Cluj)

2446. — Știind că $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$; $\frac{1}{a+b}$ sînt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, să se demonstreze că și numerele a^2, b^2, c^2 formează o progresie aritmetică.

(La facultatea de matematică și fizică «Bolyai», Cluj)

2447. — Se dă un triunghi oarecare ABC și se duce bisectoarea AD. Să se demonstreze relația: $AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC$.

Să se calculeze bisectoarea AD a triunghiului ABC dacă $AC = 6$ cm, $AB = 8$ cm și $BC = 7$ cm.

(La facultatea de matematică și fizică «Bolyai», Cluj)

2448. — Să se rezolve ecuația: $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$.

(La facultatea de matematică și fizică «Bolyai», Cluj)

2449. — Se dă piramida $SABCD$ cu baza dreptunghiulară $ABCD$. Muchiile SA, SB și SD determină cu planul dreptunghiului, unghiuri respectiv egale cu 90°, 30° și 60°. Știind că înălțimea piramidei este de 10 cm să se calculeze suprafața totală a piramidei.

(La facultatea de matematică și fizică «Bolyai», Cluj)

2450. — Să se determine k astfel ca între rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $(14k - 1)x^2 - 2kx + 1 = 0$ să existe relația $3x_1x_2 = 2x_1 - x_2$.

(La facultatea de matematică și fizică « Bolyai », Cluj)

2451. — În triunghiul dreptunghic ABC ($C = 90°$) se ia punctul O astfel ca triunghiurile OAB, OBC și OCA să aibă arii egale. Să se arate că $OA^2 + OB^2 = 5\,OC^2$.

(La facultatea de matematică și fizică « Bolyai », Cluj)

2452. — Să se rezolve ecuația: $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$.

(La facultatea de matematică și fizică, Timișoara)

2453. — În triunghiul dreptunghic ABC, înălțimea AD determină pe ipotenuza BC, segmentele $BD = 3$ cm și $CD = 12$ cm. Se cere: 1) Să se construiască triunghiul ABC; 2) Să se calculeze aria totală a piramidei $VABC$ care are triunghiul ABC ca bază, iar muchia VA perpendiculară pe planul triunghiului ABC și egală cu 8 cm.

(La facultatea de matematică și fizică, Timișoara)

2454. — Într-un triunghi oarecare ABC avem $B = 60°$, $C = 15°$ și segmentul DB, D fiind piciorul înălțimii din A, egal cu 1 cm. Se cere: 1) să se rezolve triunghiul ABC fără a întrebuința tablele de logaritmi; 2) să se calculeze volumul solidului obținut prin rotirea completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC.

(La facultatea de matematică și fizică, Timișoara)

2455. — Să se raționalizeze numitorul fracției $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

(Inst. pedagogic, Timișoara)

2456. — Să se calculeze expresia:

$$E = \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right)\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{1 - \dfrac{1+ab}{a(b-a)}}{a + \dfrac{b-a}{1+ab}} - \frac{1}{ab(a-b)}.$$

(La inst. pedagogic, Timișoara)

2457. — Să se demonstreze că ecuația $\dfrac{2a}{x-a} + \dfrac{2b}{x-b} = 1$ are rădăcini reale oricare ar fi numerele reale a, b.

(La inst. pedagogic, Timișoara)

2458. — Din mijlocul D al catetei AB a triunghiului dreptunghic ABC se coboară perpendiculara DE pe ipotenuza BC. Să se arate că avem relațiile:

$$(1)\quad EC^2 - EB^2 = AC^2,$$

$$(2)\quad EC^2 + EB^2 = \frac{BC^4 + AC^4}{2\,BC^2}.$$

2459. — Să se rezolve sistemul: $x - y = 15°$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}$.

(La inst. pedagogic, Timișoara)

2460. — Într-un vas în formă de con circular drept cu raza bazei $R = 1{,}5$ cm și înălțimea $H = 2$ cm se află o sferă metalică, care atinge pereții; iar spațiul dintre sferă și vas e plin cu apă. Să se afle înălțimea h cm la care se ridică apa din vasul așezat pe baza sa, care este orizontală, dacă scoatem sfera.

(La inst. pedagogic, Timișoara)

2461. — Să se restrîngă expresia:

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}:\left[\frac{\sqrt{b}-\frac{a}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}}{1-a}-\sqrt{ab}\right]+\frac{a}{b}\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

(La inst. pedagogic, Timișoara)

2462. — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}=\sqrt{5}.$$

(La inst. pedagogic, Timișoara)

2463. — Să se rezolve inecuația:

$$3-\frac{2x-17}{x-5}>\frac{x-5}{x+2}.$$

(La inst. pedagogic, Timișoara)

2464. — Locomotiva unui tren are 50 tone și remorchează 20 vagoane a cîte 10 tone. Pentru a pune trenul în mișcare, locomotiva trage cu o forță constantă de 7000 kgf timp de 50 secunde. După acest timp trenul a ajuns la viteza necesară v. De aici încolo, mișcarea trenului este uniformă timp de 30 minute. Să se determine:

1. accelerația pe care o ia trenul în decursul celor 50 secunde;
2. viteza v cu care se mișcă trenul (în km/oră);
3. drumul parcurs de tren în cele 50 secunde;
4. drumul parcurs de tren în 30 minute (în km);
5. puterea locomotivei (în cai putere).

(La facultatea de matematică și fizică, Timișoara)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 899. — Trei frați: Mihai, Nicolae și Petru, au cumpărat o casă care costă 32 000 lei. Mihai spune că el ar putea să plătească suma întreagă dacă Nicolae i-ar da 5/8 din banii pe care îi are. Nicolae zice că el ar plăti dacă Petru i-ar da 8/9 din banii săi. În sfîrșit, Petru zice că pentru a achita suma întreagă ar avea nevoie de jumătatea sumei lui Mihai și încă 3/16 din banii lui Nicolae. Cîți bani posedă fiecare?

Mircea Trifu, elev, Alba Iulia

E: 900. — Pentru 6 m pînză muncitor și 8 m barchet s-au plătit 174 lei. După reducerea prețurilor cu 10 % la pînza muncitor și cu 5 % la barchet, s-a plătit pentru 8 m pînză muncitor și 6 m barchet cu 23,7 lei mai puțin decît prima dată. Să se afle prețul unui metru de pînză muncitor și al unui metru de barchet înainte de reducerea prețurilor.

B. I. Baieră

---

*) Clasa V: (E: 899, 900, 902); VI: (E: 901, 905, 906, 909): VII: (E: 903, 904, 907, 908).

E: 901. — Să se găsească cifrele înlocuite prin steluțe în înmulțirea:

$$\begin{array}{r} *\,9\,* \\ 9\,* \\ \hline *\,9\,*\,* \\ *\,*\,*\,* \\ \hline *\,*\,*\,*\,0 \end{array}$$

E: 902. — O gospodărie agricolă colectivă și-a valorificat prin cooperativă cele 185 păsări îngrășate pentru care a primit 6810 lei. Știind că o gîscă costă 54 lei, o rață 32 lei iar o găină 18 lei, se întreabă cîte păsări au fost din fiecare fel dacă numărul păsărilor de-apă este de 4 ori mai mare decît acela al găinilor.

I. N. Munteanu, Zăpodeni

E: 903. — Să se rezolve sistemul:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2},$$

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2},$$

$$x-y=2z.$$

C. Bulucea, elev, R. Vîlcea

E: 904. — Într-un patrulater ABC, o dreaptă variabilă ce trece prin punctul comun diagonalelor AC și BD taie laturile AB și CD în punctele M și N. Să se arate că:

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=\text{constant.}$$

Gh. Dobrotescu, Predeal

E: 905. — Să se arate că:

$$\frac{a(a^2+b^2-c^2)}{b+c}+\frac{b(b^2+c^2-a^2)}{a+c}+\frac{c(c^2+a^2-b^2)}{a+b}=$$

$$=\frac{a(a^2+c^2-b^2)}{b+c}+\frac{b(b^2+a^2-c^2)}{a+c}+\frac{c(c^2+b^2-a^2)}{a+b}.$$

Kiss Elemer

E: 906. — Un obiect de aur are titlul 0,850 și altul are titlul 0,750. Cîte grame trebuie să luăm din fiecare obiect pentru a forma un aliaj în greutate de 4000 g și cu titlul 0,815?

C. I. Ț.

E: 907. — Să se construiască un trapez cînd se cunosc cele două laturi paralele și cele două diagonale. În ce caz problema este posibilă?

Zilberman Mircea, elev, Bacău

E: 908. — Să se demonstreze că suprafața unui trapez isoscel care are diagonalele perpendiculare este echivalentă cu aceea a patratului cu latura cît înălțimea trapezului.

Marieta Predoiescu, elevă, București

E: 909. — Dacă la produsul a trei numere consecutive se adaugă numărul din mijloc, se obține cubul acestui număr.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 10 septembrie 1956 *s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme*:

Vișinescu M. Mihai (cl. 8 Giurgiu), *Emanoil Alexandru* (student electrotehnică București), *Păunescu I. Lucian* (cl. 10 s. m. 17 București), *Bucur Gheorghe* (absolvent Pucioasa), *Focșăneanu Ion* (cl. 10 Tg. Neamț), *Stroe Radu* (student arhitectură București), Baltag *Vasile* (cl. 9 Ploești), *Gervescu M. Ion* (cl. 8 P. Neamț), *Iftimie Viorel* (cl. 10. Rădăuți), *Iorgulescu Alex.* (absolvent s. m. 20 București), *Velicescu T. Mircea* (cl. 7 Tg. Jiu), *Glasberg Vladimir* (cl. 8. s. m. 12 București), *Landman Alex.* (student Energetică București), *Ioniță Teodor* (student Orașul Stalin), *Colonati Cristian* (absolvent Moreni, Ploești), *Gheorghe A. Cezar* (cl. 8 Buzău), *Tudor M. Const.* (absolvent Tîrgoviște), *Mandl Robert* (cl. 9 Alba Iulia), *Ignat Maria* (cl. 7 Păunești-Băcău), *Enulescu C. Alexandru* (cl. 8 s. m. 20 București), *Tagă S. Mihail* (cl. 8 Ploești), *Hioi C. Constantin* (cl. 8 Roman), *Drăgușin Mircea* (cl. 10 Tg. Mureș), *Isbășescu Mihai* (cl. 8 s. m. 1 București), *Bătinețu M. Dumitru* (absolvent Giurgiu), *Șaganai Nusfet* (absolvent București), *Angheluș M. Ion* (absolvent Cîmpina), *Șerban Ligia* (cl. 7 Păunești Bacău), *Anițescu N. Nicolae* (cl. 8 Tg. Jiu), *Schiopulescu Dan* (cl. 8 s. m. 11 București), *Șor Liber* (cl. 9 Iași), *Nistreanu Valeriu* (cl. 10 s.m. București), *Cristea P. Aurel* (cl. 10 Focșani), *Mitroi Valeriu* (absolvent Roșiorii de Vede), *Bardan I. Ion* (absolvent Strehaia, Craiova), *Vidrașcu Traian* (cl. 8 Tecuci), *Țibuleac Florin* (cl. 9 Iași), *Stănescu N. Emil* (cl. 10 Giurgiu), *Marin Maria* (cl. 9 Ploești), *Rădulescu D. Const.* (cl. 9 s. m. 5 București), *Grofșoreanu T. Gelu* (cl. 7 s. m. 7 București), *Grigoraș Vasile* (cl. 8 Bacău), *Trifu Mircea* (cl. 8 Alba Iulia), *Rădescu Eugen* (cl. 8 Focșani), *Oprica Mihai* (cl. 8 s. m. 17 București), *Motronea N. Valer* (cl. 9 Tg. Mureș), *Brișcă Virgil* (cl. 8 Giurgiu), *Cărbunaru M. Constantin* (absolvent Tîrgoviște), *Profirescu D. Marcel* (cl. 8 Giurgiu), *Șerbănescu Cornelia* (cl. 7 Păunești-Bacău), *Sevasie I. Gheorghe* (absolvent Tecuci), *Arion Adrian* (cl. 9 Botoșani), *Donea Sorin* (student Iași), *Tomoiagă Doru* (cl. 8 Sighet), *Popa Adrian* (cl. 10 s. m. 17 București), *Pașa Florin* (cl. 8 s. m. 17 București), *Dudă Nicușor* (absolvent Călărași), *Draica Constantin* (cl. 9 s. m. 4 București), *Stancu Florica* (cl. 9 s. m. 10 fete București), *Lerner Emil* (cl. 9 s. m. 13 București), *Ciorănescu Ioana* (cl. 8 s. m. 22 București), *Mihăileanu I. Viorel* (cl. 8 Caracal), *Nerodea Tiberiu* (cl. 10 Timișoara), *Stan C. Dumitru* (absolvent Ploești), *Schein Teodor* (cl. 10 s. m. 1 București), *Popescu Claudia* (cl. 9 Iași), *Florea Dorel* (cl. 9 Lugoj), *Costinescu Anca* (cl. 9 Iași), *Bănică Radu* (cl. 9 Ianca, Galați), Corbu Ion (abs. s.m. 11 Buc.).

Pînă la 10 Sept. 1956 *s-au mai primit cîte cel puțin zece soluții bune de la următorii rezolvitori de probleme*:

ADJUD (Bacău). — Clasa X-a. Chiorcea N. Nicolae (2162, 65, 73-75, 78, 79, 82—86, 88, 93, 207, 11). *Școala de 7 ani Șipote.* Clasa V-a. Grigoraș Didi (E: 806, 13, 19, 25, 28, 34, 36, 37, 43, 45, 48).

AIUD. — Clasa IX-a. Bucurenciu Sorin (2050, 162—64, 66, 67, 71—75, 77, 79, 80, 82—84, 86, 88, 99, 224, 29, 30, 24). Clasa X-a. Mișu Mircea (2043, 66, 102, 11, 23, 29, 38, 57, 72, 75, 86, 87, 210). Suciu I. Ion (2163, 72, 73, 75, 77, 82, 82, 86, 87, 89, 92 209).

ALBA IULIA. — Clasa VIII-a. Patzer H. (1938, 97, 2042, 109—11, 18—22, E: 23, 27, 30, 83, P), *Trifu Mircea* (1997, 2042, 45, 48, 86, 102, 07, 09, 10, 12, 18—21, 24, 26, 28, 29, 31, 32, 36, 71, 73, 77, 80, E: 780, 97, 801, 04, 08, 12, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 31, 33—35). Clasa IX—a. Avram Nicolae (2109, 12, 20—23, 25, 26, 28, 29, 32, 35, 64, 73—77, 79, 84, 86, 93), *Mandl Robert* (1998, 2015, 23, 109, 12, 20—23, 25—33, 35—39, 53, 56, 57, 59, 61, 64, 65, 67, 70, 71—79, 82, 85—88, 91—93, 95, 201, 03, 08, 10, 12).

ALEXANDRIA. — Clasa IX-a. Ploeșteanu Ion (2163, 70, 74, 75, 79, 85—88, 92, 93 211), Stoican Ștefan (2090, 111, 18, 19, 35, 37, 56, 61, 64, 74—76, 82, 86, 97, 98, 210).

ALUNIȘ (Ploești). — Istrate I. Gheorghe (2118—21, 25, 27—29, 31, 70, 75).

ARAD. — Clasa VIII-a. Balint Ioan (2042, 102, 04, 11, 18—20, 25, 29, E: 765, 76, 84, 94, 804, 05), Savin Virgil (2109, 126, 28, 29, 23, 71, 79, 88, 91, 93, 224, 30, E: 794, 99, 804, 07, 08, 10, 22, 24, 27, 30, 34, 35, P), Sîrb Petre (2042, 48, 82, 86, 102, 10, 11, 18—20, 22, 29, 74—77, 91, E: 776, 78, 85, 90, 94, 97, 807, 08, 10).

BACĂU. — *Școala medie de băeți.* Clasa VIII-a. Dobronăuțeanu Silviu (1997, 2125, 31, 53, 62, 73, 75, 77, 93, E: 809, 12, 15, 18, P), *Grigoraș Vasile* (2162, 63, 73, 75, 79, 82, 87, 88, 93, 236, 42, 57, 48, 61, P; E: 819, 20, 22, 24—37, 398, 50). *Școala de 7 ani Păunești — Adjud.* — Clasa VI-a. Novac Gh. Gheorghe (2120, 27, 32, 79, 95, 98, E: 766, 70,79, 82, 89, 91, 92, 97, 802, 03, 06, 08, 09, 11, 12, 18—21, 23—25, 31, 36), Pintilie Florica (2064, 111, 24, 25, 27, 73, 79, E: 760, 65, 67, 82, 91, 92, 802, 03, 06, 08, 11, 13, 14), Vasilichi Zarafina (2024, 124, 25, 78, 79, 87, 88, 98, E: 760, 62, 67, 78, 82, 87, 91, 802, 03, 08,

11, 12, 18—20, 22, 24, 25, 31—33). Clasa VII-a. Apostu C. Ioana (1955, 2004, 24, 64, 86, 111, 20, 24, 28, 32, 73, 97, 87, 88, 98, 98 E: 762, 67, 82, 87, 91, 96, 803, 08, 14, 19—28, 31, 33), *Ignat Maria* (1955, 2004, 24, 64, 69, 75, 86, 102, 11, 24, 28, 32, 73, 75, 79, 83, 87, 88, 98, 203, E: 760, 64, 70, 82, 87, 89, 91, 96 97, 99, 800, 02, 03, 06, 08, 11—13, 19—28, 31, 32), Stoica Neculae (2064, 70, 127, 73, 75, 79, 87, 95, 240, 58, E: 770, 78, 82, 800, 03, 07, 08, 11—14, 18—20, 22, 25, 27, 31, 32, 36, 37, 44, 45,) *Şerban Ligia* (1955, 74, 2004, 69, 75, 86, 102, 11, 20, 24, 28, 32, 73, 75, 78, 79, 83, 87, 98, 221, 45, E: 740, 69, 70, 87, 91, 96, 800, 02, 03, 06, 808, 11—13, 19—28, 30, 31—33), *Şerbănescu Cornelia* (1995, 2004 64, 69, 80, 86, 102, 25, 27, 28, 73, 75, 87, 88, 98, E: 762, 68, 69, 82, 91, 82, 96, 97, 801—03 06, 08, 12, 13, 18, 19, 24, 28, 29, 31).

BAIA DE ARIEŞ. Clasa VII. Taica Silvia (E: 797, 99, 808, 11, 13, 45, 47), Mureşan Dumitru (2110—12, 14, 16, 18, 20—26, 32, 34, 35, 42, 46).

BEIUŞ (Oradea). — Clasa IX. Huplea Cornelia (2116, 31, 65, 72—75, 77, 80, 86).

BLAJ. — Absolvenţi: Pop Alexandru (2110—20, 23, 26—32, 34, 35, 69, 74, 92), Purea Olivia (2109, 11—13, 15—20, 23, 25—32, 34, 35, 69, 74, 93).

BOTOŞANI. Clasa VII-a. Bălan Traian (E: 776, 80, 84,88—90, 98, 804, 08, 10, 13), Mocanu St. Nicolae (E: 754, 55, 57, 50, 89, 806, 908, 11, 13, 18). Clasa IX. Andricioaiei Gheorghe 1959, 2047, 128, 64—66, 71—75, 80, 82, 84, 86, 88, 91, 93, 203, 09), *Arion Adrian* (2042, 43, 48, 54, 92, 94, 100, 02, 04, 09—13, 16, 18—22, 24—29, 31, 32, 34, 63—65, 67 73 75, 77, 82, 84, 86, 93), Dragomir Bujor (2109, 11—14, 16, 18, 20, 25, 26, 28—30), Velicu Gezar (2045, 59, 109, 11, 18—20, 23, 25, 29, 73, 84). Clasa X-a. Ciocan V. Mihai (2111—14, 16, 18, 25—29, 51, 63, 64, 73, 75, 84, 93), Georgescu Laurian (2129, 31, 33, 68, 72—75, 77—79, 82, 84, 86, 93, 211), Gherman Corneliu (2163—67, 71—75, 79, 84, 86, 92), Urse Ştefan (2005, 08, 02, 23, 41—43, 50, 56, 78, 88, 89, 104, 09, 11—13, 16, 18, 25, 27), absolvent Grossu Gh. (2171—75, 77, 78, 82, 85, 86, 91, 99, 211, 25, P).

BREAZA. — *Şcoala militară « D. Cantemir »*. Clasa VIII. Guggenberger Heidrun (2118, 24, 25, 29, 71, 73—75, 80, E: 99, 804, 11—13, 18). Clasa IX-a. Lache F. (2111, 13, 14, 18, 20, 26, 28, 75, 93), Motoroagă D. (2109—11, 18—20, 22, 24, 25, 27—29, 34, 36, 56), Zinca Vasile (2081, 111, 18—25, 64, 73, 82, 85).

BUCUREŞTI. — *Studenţi*: *Emanoil Alexandru* (Fac. electrotehnică) (2109—27, 20—38, 42, 43, 46, 62—68, 70—74, 77—80, 90, 92, 97 99, 203, 09—11, 15, 16, 18—21, 24, 25, 29, 30, 35, 36, 40, 42, 43, 83, P), Hulubei T. Valeriu (Fac. mecanică) (P, N, « Unele proprietăţi ale triunghiului), *Landman Alex.* (an I energetică) (2109—14, 16—39, 44, 45, 51, 55—57, 60—68, 70—79, 81—87, 90—92), Moraru Florentin (an I. A. T. M.) (2167, 90 93, 97, 203, 04, 11, 24. 35, 84, P), Moraru Victor (an IV construcţii) (2142, 62-74, 76—70, 82—86 88, 91—93, 95, 96, 201, 04, 07, 11, 14), Popovici I. Radu (an I mecanică) (2117, 18, 20—22, 27, 29. 73—76, 78, 79, 82, 84, 86, 93, 235, 46, 58, 84), *Stroe Radu* (arhitectură) (2025, 72, 76, 93, 98, 110—14, 16—21, 23, 25, 26, 28, 29, 31—35, 42—44, 46, 49, 55, 62, 63, 56—67, 69, 71, 72, 74, 75, 77, 79, 80, 82—84, 86, 90, 93, 94, 99, 200, 03, 04, 09, 12, 19, 32, 42, P), Tofan Liliana (an II matematici f. f.) (2162, 63, 65—67, 69—74, 77—80, 88, 93. 95, 96, 99, 210, 04, 07, 11, 12, 14, 35). Absolvenţi: Buriman Adrian (2111, 12, 14, 31, 38, 72, 86, 211, 35, P), Ciuda Gheorghe (1998, 2023, 111, 12, 15—19, 21—25, 27, 29, 30, 33, 35—39, 42, 61—67, 71, 72, 89, 90, 92), Corbu Ion (2138, 42, 66, 68, 75, 77—79, 82—84, 86, 88, 92, 97, 98, 202, 11, 20, 35, 42, P), Ionescu (2100—16, 19—21, 23—26, 29, 21, 32, 34, 35, 38, 51, 55), Mavrogheorghe Vanghele (2098, 101, 35, 49, 51, 62—67, 72, 75, 80, 81, 83, 84, 86, 90, 91, 93, 200), *Stan C. Dumitru* (2109, 11—15, 18—21, 23—27, 29, 31—34, 63—65, 67, 71—75, 77, 79, 82, 84, 86, 88, 93, P), Tomescu Mihai (2164, 65, 67, 70—75, 79, 82, 84—86, 88, 91, 93).

Şcoala medie nr. 1. Clasa VII. Zamfirescu Tudor (E: 806, 08, 10—14, 17—19, 22). Clasa VIII. Ghelmeziu N. Nicolae (2118—20, 24, 25, 73, E: 794, 97—99, 801, 03—08, 10, 13, 15, 17—19, 24, 31), Ioachim Alex. (E: 822, 24, 25, 27, 30—32, 34, 35, 44, 47 49), *Isbăşescu Mihai* (2042, 45, 48, 53, 58, 61, 64, 82, 86, 100, 02, 04, 05, 09—11, 18—27, 34, 36, 62, 63, 71, 73, 75, 79, 81, 82, 84, 87, 93, 209, E: 783, 89, 809, 12, 15, 17), Schileru Cristian (2111, 18—20, 24, 25, E: 794, 97, 89, 804, 05), Zăgănescu Adrian (E: 764—67, 71—74, 76, 80, 81, 87, 801, 08, 11, 12). Clasa IX. Bodea C. Mircea (2164—67, 70, 73—75, 77, 78, 82—84, 93, 99). Cipere I. Lucian (2109, 11—14, 16, 28, 19, 61, 64—66, 71, 73, 74, 84, 93, 224, 30, 55, 57, 58), Ionescu C. Traian (2162, 63, 73—79, 84, 88, 93), Martin Traian (2081, 102, 11, 12, 18, 21, 22, 24, 25, 27, 35, 39), Miulescu A. Alexandru (2019, 11, 12, 24 — 26, 29, 34, 73, 84, P), Popescu Victor (2111 — 14, 18, 21 — 24, 35, 37, 61). Clasa X. Cocieru Ion (2142, 66, 67, 200, 09, 11, 30, 31, 35, 36, 42), Cristea Paul (2109—14, 16—27, 29—31, 37, 39, 42), *Schein Teodor* (2042, 43, 45, 47, 53, 56, 64, 78, 79, 109—11, 14, 15, 18—21, 23, 24, 26, 27, 31, 34, 63—65, 72—75, 80, 81, 82, 91, 93), Tureanu Aurel (2006, 10, 15, 21, 24, 97, 109, 11, 23—26, 36, 64, 70, 84, 90, 235).

Şcoala medie nr. 2. Clasa IX. Jianu Ion (2048, 50, 54, 55, 114, 22. 25, 29, 31—33, 36, 37, 49, 56, 61, 64, 70, 73, 74, 78, 79, 87, 90, 93). Clasa X. Teodorescu Nicolae (2075, 112, 18, 19, 21, 22, 25, 30, 31, 33, 34, 73, 84, 87, 93, 204, 16—21, 24, 27, 29, 30, 33, 35, 42, 43, P).

Şcoala medie nr. 3. Ioachim Alex. (2120, 93, 231, 34, E:, 794, 95, 98, 99, 801, 04, 07, 08, 17, 18).

Şcoala medie nr. 4 *« Aurel Vlaicu » Griviţa Roşie.* Clasa VIII. Constantinescu M. Remus (E: 819, 22, 24, 26, 29—34), Ionescu Cornel (2109, 11, 18, 19, 24, 26, E: 794, 97—99, 801), Ivan Constantin (E: 727, 29, 31, 35, 37, 38, 42, 45, 47, 73), Mincu I. Horst (2109, 11, 18—22, 24, 25, 27, 64, 91, E: 791, 92, 94, 95. 97—99, 801, 02, 04, 05, 08, 10, 13, 15, 19, 24, 26, 32), Nicolau Cornel Virgil (2128, 29, 73—75, 77, 79, 87, 93, 203, 16, 20, 42, E:, 808, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 24, 27, 29—35). Clasa IX. *Draica Constantin* (2041, 53, 62, 70, 73, 74, 78, 81—84, 88, 100, 02, 51, 62—67, 70—75, 77—80, 82—86, 88, 93, P), *Stanaloiu Petre* (2109, 11—14, 16, 18—28, 31, 32, 34, 51, 62, 64—66, 70, 71, 73, 75, 81, 82, 84, 88, 93, 95, 200, 01, 03, 06, 11, 14, 30, 33, 43, 44, 46, 52, 54, 57, 60, 84), Teodorescu Ioan (2114, 20, 23, 26, 31, 35, 72, 73, 75, 77, P). Clasa X. Laurenţiu Dumitru (2109-38), Marin C. Const. (2112, 17-19, 23, 29, 72, 74, 75, 77, 86, 93, 207, 11, P), *Nistreanu N. Valeriu* (2126, 30—34, 37, 38, 42, 61—70, 77—80, 83, 85, 88, 91, 97, 200, 10, 30, 31, 35, 47, 49, 52, 54, 56, 61, 64, 65, 78, 84), *Rădulescu D. Const.* (2000, 04, 24, 94, 109, 11—14, 16, 18, 19, 20, 22—32, 34, 35, 51, 62, 64—66, 70, 71, 73—75, 79, 81—84), Viscopoleanu Octavian (1997, 12. 13, 16, 18, 23, 15, 27—29, 70, 72—75, 77, 80, 84, 86, 93, 200).

Şcoala medie de fete nr. 5. Clasa VIII. Dinu P. Coralia (2109, 18, 25, E: 794, 98).

Şcoala medie nr. 7 « I. L. Caragiale ». Clasa VII. *Grofşoreanu T. Gelu* (2111, 18—25, 27, 29, 34—39, 53, 56, 61, 72, 73, 75, 79, 82, 86, E: 791, 94, 97—99, 801, 03—08, 11, 13, 18).

Şcoala medie de fete nr. 8. Clasa VI. Mazilu Luminiţa (2119, 21, 25, 27, 33, 34, 73, 79, 82, E: 791, 92, 801, 03, 07, 08, 13, 18). Clasa IX. Ciobodaru Lucia (2042, 45, 54, 62, 102, 04, 11—14, 18, 20, 21, 23—25, 27, 29, 34, 37, 64, 67, 73, 82, 86, 93, 99), Marinaş Liana Marina (12051, 110, 18, 26, 27, 34, 35, 64, 65, 71, 73, 75, 80, 82, 84, 85, 93, 209, P).

Şcoala medie de fete nr. 10. Clasa VII-a. Predoiescu Marieta (2111, 18, 20, 22, 24, 34, 73, 75, 78, 83, 88, E: 778, 79, 84, 89, 90, 94, 97—99, 802, 05, 08, 11, 13). Clasa VIII. Repciuc Rodica (2125, 40, 46, 48, 75, 93, 206, 09, E: 797, 818). Clasa IX. *Stancu Florica* (2059. 108, 11—14, 18—27, 29, 34, 37, 61—67, 73—75, 82, 84, 85, 99, 201, 09). Clasa X-a. Wagenberg Fani (2164, 71, 73, 75, 77, 83, 93, 99, 221, 55).

Şcoala medie Nr. 11. *de băieţi « D. Cantemir ».* Clasa VIII. Antoniu I. Sorin (2110, 18—21, 23—27, 29, 31. 36, 63, 93, 211. E: 794, 97, 99, 815), *Şchiopulescu Dan* (2079, 102, 04, 11, 18—20, 25, 26—29, 36, 56, 71, 73—75, 77, 79, 80, 82, 83, 91, E: 797, 98, 806, 08 10, 11, 13, 19, 22, 24, 29, 32, 36, 37, 43—45, 47). Clasa IX. Eremia Mircea (2042, 43, 54, 111, 24, 25, 27, 29, 35, 37). Clasa X. Popescu Paul Roger (2109, 33, 35, 37, 41, 43, 44, 50, 55, 61, 72, 80, 94, 204. 24, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 46, 48, 84, N, P). Stoica I. Dan (2041—43, 52, 54, 62, 78, 83, 88, 89, 90, 100, 04, 88, 89, 90, 100, 04, 77, 79, 84, 86, 207, 11).

Şcoala medie nr. 12. Clasa VIII. *Glasberg Vladimir* (2112, 13, 18, 20, 22—26, 30, 31, 36, 51, 62, 63, 73, 75, 77, 79, 82, 85, 91, 93, 95, 211, 24, 25, 30, 42, E: 792—95, 97—99, 801, 02, 04, 05, 07, 08, 10—13 16, 18—20, 22—27, 29—35).

Şcoala medie nr. 13. Clasa VIII. Bănică Dan (2111, 20, 24, 48, E: 791, 92, 95—97, 802—04, 07—12, 15—19, 20, 31, 32). Clasa IX. *Lerner Emil* (2118, 24—26, 32, 34, 46, 55, 63—65, 67, 73, 79, 82, 84, 90, 91, 93, 200, 03, 06,09, 33, 35, 35, 40, 42, 45, 54, 67, 73, 84, P), Tudor M. Gheorghe (2110, 15, 20, 26, 70, 78, 88, 90, 94, 99, 209). Clasa X. Grigore C. Costică (2111—14, 18—22. 24—27, 29—31, 36, 61, 63, 64, 66, 67, 73, 75,77 79, 83 85, 93, 99, 221, 30, P), Ionescu Dan (2042, 45, 48, 78, 79, 83, 86, 88, 89, 92, 100, 02, 04). Absolvenţi: Ieremia I. Mircea (2109, 11, 12, 14, 16, 17, 20, 23, 25, 29, 36, 28, 63, 65, 70—72, 75, 77, 80, 84, 86, 93, 211, 12, 24, 30, 35, 37, 63), *Saganai Nusfel* (2109, 28, 29, 31, 32, 35, 38, 42—44, 55, 56, 62—75, 77, 78, 80, 81, 83, 84, 86—88, 90, 93, 94, 99, 100, 04, 07, 09, 11, P).

Şcoala medie de fete nr. 15. Clasa VII. Popa Doina (2118, 73, E: 776—81, 88, 90, 93, 94, 97—99, 801, 02, 05, 04, 08, 11, 18). Clasa X. David Gabriela (2118, 19, 57, 62—75, 77, 80), Enescu Cornelia (2120, 21, 28, 30, 32, 33, 62, 64—66, 69—75, 77, 78, 80, 82—84, 86, 90, 92, 2000, 03).

Şcoala medie nr. 17. Clasa VIII. *Oprică. Mihai* (2109—11, 18—22, 24—27, 29—32, 34, 36, 46, 48, 63, 71. 73, 75, 79, 82, 85, 87, 93, 203, 09, E: 798, 99, 801, 05—08, 11—13, 16—18). *Paşa Florin* (2118—20, 24—26, 30, 32, 73—76, 78, 79, 82, 88, E: 791, 94, 97—99, 801, 02, 04 07, 08, 11, 13, 15, 18, 19, 22, 24, 26, 27, 32, 36, P), Petreanu Dan (2042, 49, E: 776—78, 80—82, 85, 87, 90). Clasa IX. Coconea Mihai (2092, 110, 12—14, 18, 20, 25,

29, 63—65, 73, 93, P), Ionescu V. Corneliu (2034, 97, 113, 25, 32, 64, 75, 77, 84, 93). Clasa X. Enache Corneliu (2162. 64, 65, 71, 73, 75, 80, 82, 84, 85, 93), *Păunescu I Lucian* (2040, 41. 47, 49, 51, 52, 62, 64, 65, 74, 79, 81—83, 88—90, 92, 94, 97, 100. 02, 04. 05, 07, 09—27, 29, 33—38, 42, 51, 56, 57, 61—67, 70—73, 75, 77—86, 88, 90, 93, 97, 200, 03, 07, 10, 11), *Popa Adrian* (2081—83, 86, 88, 92, 94, 97, 100, 03, 05, 113, 34, 35, 37, 42—44, 61, 70—74, 76, 78, 80 82, 84—86, 93, 97, 204, 10, 11, P).

Şcoala medie nr. 18. Clasa V. Stan Ştefan (E;798, 900, 04, 06, 13, 14, 19. 25, 28, 32). Clasa VII. Enişteanu N. Nicolae (773, 77, 78, 90, 92, 95, 96, 802, 06—16, 18,—22, 24—35). Clasa VIII. Popescu C. Serban (2173, 79, 82, 93, 230, E: 806—08, 10, 11, 14, 15, 18, 19,22, 24, 25, 27—29, 31—34). Clasa IX. Angelescu Valeriu (2042, 81—84, 102, 11, 12, 18, 20, 24, 25, 29). Enache Corneliu (2043, 50, 51, 53—55, 79, 81—83, 90, 100, 02, 04, 05).

Şcoala medie nr. 20. Clasa VIII. Berceanu T. (2173, 75, 82, 85, 201, E: 806, 08, 11, 11, 13-15, 18), *Enulescu C. Alexandru* (2111, 18, 19, 23 24, 27, 29, 33, 34, 56, 74, 75, 77, 79, 92, 87, 92, 95, E: 794, 97—99, 801, 02, 04—08, 11, 12, 14, 18—20, 22, 24, 26, 28—32, 34—36, 38—49). Clasa IX. Alexe Dan (2042, 102, 11. 12, 18, 21, 24, 25, 29, 34, 62, 73. 74, 76—80, 82—85, 88, 93, P), Borsaru Mihai (2042, 53, 54, 56, 58, 79, 81, 82, 94, 102, 04, 09—14, 18—22, 14, 27, 29, 31, 33, 34, 36, 37, 39, 61—67, 71, 73—80, 82, 83), Iordănescu R. Sorin (1938, 59, 2085 116, 32, 43, 49, 63, 66, 80, 82, 204). Clasa X. *Iorgulescu Alex.* (2041-45, 47—51, 53, 54, 56, 59, 65, 85, 86. 92, 100, 02, 04, 09, 18—20, 25, 73), Iorgulescu Romeo (2109, 10, 12—14. 18—22, 24—26), Niculescu Şerban (2041, 43, 45, 48, 50, 51, 53, 78, 79, 79, 100, 04), Stoica I. Dan (2109, 11—14, 16, 19. 20, 23—25, 27, 29, 31, 38).

Şcoala medie de fete nr. 21 Clasa X. Demayo Adriana (2042, 48,54, 63—65, 100, 04, 09—14, 18, 20, 24—17, 29, 31, 34, 64, 66, 73, 75, 77, 84, 93, 98, 209).

Şcoala medie de fete nr. 22. Clasa VII. Niţă Georgeta (2118, 24, 27, 30, 73, 79, E: 798, 801, 03—05, 11, 12, 14, 18). Clasa VIII. *Ciorănescu Ioana* (2190, 95, 225, 33, 36, 39, 40, 42, 45, E: 806, 09, 12, 15-19, 22—24, 26—30, 32—34, 42, 7, 50, P). Clasa IX. Butoi Mihaela (2111—13, 23, 28, 31, 64—67, 75, 77, 84, 88, 92, 221, 24, 28, 45), Gheorghiţă Mariana (2110, 11, 16, 63, 65, 71, 75, 77, 79, 80, 83, 84, 99, 200, 09, 35, 46, 47, 53, 54 84), Ionescu A. Monica (2109, 11—14, 18, 20, 24—26, 32, 64-67, 99), Pislaru M. Alexandra (2109, 11—14, 25—26, 32, 64—67, 99), Raicea Liana (E: o800, 08, 11, 13—15, 18, 19, 24, 32, 36, 40, 45), Stoica O. Dan (2162, 63, 73—79, 84, 88, 93).

Şcoala de 7 ani nr. 37. Clasa VII. Enescu M. Anca (E: 779, 91, 92, 94, 95, 800, 08, 11, 14, 15, 18).

Şcoala de 7 ani nr. 119. Clasa VI. Mira Eugen (2086, 102, 03, 06, 08, 11, 12, 18—20, 24, 26, 27, 29, 30, 33, 73, 79, E: 824 26, 30, (34).

Şcoala de 7 ani nr. 145. Ghencea. Clasa VII. Cherteş Petruş (E: 810, 12 19, 20, 22, 24, 27, 32, 36, 48).

Şcoala de 7 ani de fete nr. 120. Clasa V. Mira Constanţa (2118, 24, 30, E: 777, 78, 87, 92, 801, 04, 05, 11, 13, 19, 23, 25, 28, 32).

Şcoala de 7 ani de fete nr. 124. Clasa V. Niculescu Cristina (E: 791, 98, 800, 04, 06, 14, 19, 23, 25, 32).

Şcoala de 7 ani nr. 152. Clasa VII. Răşcanu Radu (E: 806—10, 12—15, 18, 19, 24, 31, 47.

Comuna Mihai Bravu (Vidra). *Absolvent* Sima P. Luca (1996, 2210, 42, 54, 56, 82, 83, 86, 89, 102, 17—19, 23, 25, 27—29).

BUHUŞ. Clasa VIII. Duma Ion (2082, 86, 104, 05, 78, 79, 109—11, 26, 33, 36, 46, 51, 56, E:784, 86, 89, 94, 95, 97).

BUZĂU. Clasa VIII. *Gheorghe A. Cezar* (2109, 11, 18—22, 24, 25, 30, 31, 33, 62, 73, 75, 77, 79, 81, 82, 85-88, 91, 93, 95, 221, E: 791, 93—99, 801—08, 10, 13, 15—19, 22—26, 30, 36, 39—45, 47—50), Paraschiv Elena (E: 794, 804, 08, 13, 22, 24, 26—28 93, 31—33). Clasa IX. Boacă Ilinca (2059, 81, 100, 02, 04, 11, 18, 23, 24, 28, 29, 64, 73, 84), Popescu Valentina (2059, 109, 11, 18, 24, 25, 64, 70, 73, 75, 84). Clasa X. Cucu Paul (2048, 54, 58, 109, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 31, 32, 35, 51, 52, 64—67, 69, 70, 72—75, 84, 86), Petreanu Atistide (1885—90, 901, 03, 04, 08).

CALAFAT. Clasa VIII. Mititelu M. Stefan (2112, 18, 20, 27, 28, 30, 32, 65, 80, 88, 93, E: 797, 806, 16), Popa Georgeta (2111, 18, 26, 29, 73, E: 794, 97, 98, 812, 13, 15, 18), Stoenescu A. Ion (2109—11, 18, 20, 26, E: 792, 97—99, 801, 05, 18). Clasa IX. Ghinea I. Petru (2111, 12, 18—25, 32, 56, 64, 73, 79).

CĂLĂRAŞI. Clasa VII. Agache Atena (2122, 88, E: 797, 802—06, 08, 10—12, 14, 16, 18). Clasa IX. Strătescu Ion (2117, 22, 23, 33, 34, 36, 37, 42, 43, 61, 63—67, 72—75, 77, 79, 80, 82, 84, 86—88, 90. 99, 200,03, 04, 09, P). Absolvent *Dudă Nicuşor* (2109, 11—14, 16—27, 29—31, 34—36, 62—67, 71—73, 75, 77, 79, 83, 84, 86).

CARACAL. Clasa VII. Mihăilescu I. Stelian (E: 801, 04—06, 11, 13, 24, 25, 28, 32). 32, 36, 45, 84), *Mihăilescu I. Viorel* (2109 18—20 25, 26, 29, 36, 71, 73, 79, 82, 88, E: 794, 96, 97, 804, 06, 08, 11—13, 18—20, 22, 24—35), Straton Gheorghe (2173, 75, 82, 88, 93, E: 808, 12, 18, 19, 24, 32). Clasa X. Rădulescu Victor (2045, 86, 94, 102, 04, 09, 11—14, 24, 25). Clasa VIII. Dincă I. Gheorghe (2173, 75, 79, 88, 221, 30, 55, 58, E: 80 8, 19, 22, 24, 29,

CARANSEBEŞ, Clasa VI. Morawetz Dorothea (E: 808, 11, 13, 19, 24, 25, 32, 39, 43, 44).

CÎMPIA TURZII. Clasa IX. Pick Gheorghe (2111—14, 18, 27, 29, 32, 64, 65, 67, 73—75, 77, 82, 84, 93).

CÎMPINA. Absolvent *Angheluş M. Ion* (1997, 98, 2002, 15, 23, 42, 43, 48, 50—52, 83, 88, 89, 92, 94, 104, 09, 11—14, 16—18, 20, 21, 23, 25, 26, 30—33, 35, 38, 44, 51, 63, 70, 72, 75, 77, 80, 86, 93, 99).

CÎMPULUNG — Muscel. Clasa VII. Simionică I. Traian (E: 796, 802, 07—09, 11, 12, 14, 15, 18).

CLUJ. Clasa VII. Lungu Serban (E: 794, 97, 801, 04, 06, 08, 11, 12, 19, 24, 33). Clasa VIII. Dragoş Eugen (2163. 75, 93, E: 808, 11—13, 18, 22, 24), Mănăştureanu Florica (2109, 11, 18, 19, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 75, E: 794, 97—99). Clasa IX. Bîrzan Romanel (2123, 35, 41, 62, 68, 69, 72, 80, 81, 83, 88, 90, 95, 99, 209, 16, 31, 25, 33, 35, 42, 46, 47, 52, 54—57, 59, 60, 67, 73, 84, P), Mohi Sofia (2125, 86, 235, E:, 794, 98, 810, 11, 13, 19, 24, 26, 21), Văsariu Gheorghe (A: Detectori de particule nucleare).

CONSTANŢA. — Clasa VII. Omer Kadar (E: 806—08, 10, 13, 14, 16, 18), Rădulescu Mircea (2173, 75, 91, E: 813, 14, 16. 18, 21—23). Clasa IX. Abduraim Aiten (2163—65, 67, 70, 72, 75, 84, 86, 93), Ianuş I. Stere (2047, 117, 23, 39, 50. 52, 62, 63, 65—67, 70, 73, 75, 77—80, 82, 84—86, 90, 93, 96, 99, 204, 17, 25, 33). Clasa X. Anghel Const. (2111—14, 16, 18—21, 25, 26, 28, 29, 31, 35,—37, 46, 51, 65, 67, 72—75, 77, 82, 84, 86, 93), Encica Traian (2042, 43, 45, 48, 50, 86, 102, 109, 10—12, 20, 25), Ionescu Ion (2053, 109, 11—13, 15—21, 23—27, 29, 31, 33—35, 70, 72—75, 77, 83—86), absolvent Stepan Ionel (2109, 12, 14—18, 21, 25, 27, 28, 31, 53, 72—77, 216, 35, P).

CORABIA. — Clasa VIII. Voiculescu Emilia (E: 798, 99, 801, 04, 07, 08, 11—13, 18). Clasa IX. Popa M. Constantin (2121, 28, 32—35, 62, 63, 65, 73, 75, 77, 86, 93).

CRAIOVA. *Şcoala medie de băieţi nr.* 1. Clasa VIII. Cernăianu Gh. (2110, 11, E: 791, 97—801, 04, 05), Duţu Corneliu (2210, 17, 24, 30, E:, 819, 22, 27, 31, 32, 34), anonim (2109, 11, 18—20, 24, 25, 27, 29, 32, 36, 73, 75, 82, 88, 224, 30, 31, E: 797—802, 04—08, 11, 18, 19, 22, 24—28, 30—35). Clasa X. Chiuţu Mihai (2041—43, 45, 47, 48, 50, 51, 62, 63, 65, 72), Negreţu R. (2111—13, 17, 20, 23—26, 29, 32, P), Voinea I. Alex. (2109, 11—21, 23, 25, 26, 29, 31, 33—35, 42—44, 57, 62, 64—75, 77, 78, 83, 84, 86, 93, 96). *Şcoala medie de băieţi nr.* 2. *«Fraţii Buzeşti»*. Clasa VIII. Dinuţ Teodor (1993, 2065, 113, 18, 23, 24, 70, 75, 86, 93, 272, E:, 805, P), Vasile Florin (2109—12, 18, 20, 23—26, 28—30, 34, E: 794, 97—99, 801, 04). Clasa IX. Bărboiu D. Mircea (2165, 73—75, 82, 84, 94, 258, 60, P). Absolvenţi: Cumpănaşu C. Vasile (201, 109, 11, 518, 23, 26, 27, 29, 30), Dinu Gh. Gheorghe (2041, 109—16, 28—21, 23, 25—35, 38, 42, 43, 93, 209, 11, 12), Rosenberg Aureliu (2041—43, 48—54, 59, 60, 86, 88, 90—93, 104).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VII. Ioana V. Marin (E: 747, 49, 65, 67, 76, 80, 81, 98, 801, 08, 13), Plătineanu Gabriel (E: 752, 72, 74, 76, 86, 88, 98, 801, 07, 11). Clasa VIII. Băcăuanu Mihai (E: 797—99, 801, 04, 05, 08, 11, 13, 18). Clasa IX. Bădoiu Gh. (2109, 11, 12, 14, 19, 22, 24, 27, 34, 35), Ciolac Vasilica (2081, 86, 102, 04, 11, 12, 24, 29, 64, 93), Manda Gabriela (2081, 86, 102, 04, 11, 12, 24, 29, 64, 93), Murăreci Fănică (2024, 41-43, 59, 64, 70, 81, 92, 100, 02, 09—14, 18—22, 24—27, 29—31, 33), Murăreci Florica (2164—66, 70, 73, 74, 76, 79, 81—85, 87, 88, 93, 201).

DEJ. Clasa X. Itu Stelian (2005. 07, 13, 17, 23, 25 27, 28, 36, 38, 72, 77, 80, 86. 93, 207, 11).

DRĂGĂŞANI. Clasa X. Neaga C. Const. (2111—14, 18—21, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 37 61); absolvent Botoran I. Petre (2113, 14, 16, 18—30, 32—38, 42, 44, 56, 57, 62—68).

FOCŞANI. Clasa VI. Tudorancea Agripina (E: 778—81, 85, 87, 88, 95). Clasa VII. Pantelimon M. Ana (E: 2173—77, 79, 88, 91, 95, 218, 25, E: 791, 93—95, 97—99, 801,04, 05, 13, 18, 22, 45), Rădescu Gabriela (2173, E: 801, 04—06, 13, 18, 19, 22, 32). Clasa VIII. Dinulescu Horia (1960, 2021, 48, 129, 56, 63, 73—75, 77—82, 85, 83, E: 769, 806—08, 11—13, 16, 18), Grigore Mariana (2014, 24, 86, 111, 26, 28, 29, 47, 49, E: 789), Munteanu Valeriu (2109 73, E: 730, 55, 97—99, 8011, 08, 09, 11, 12, 19, 25, 27), *Rădescu Eugen* (1998, 2023, 134, 35, 51, 60, 71, 73, 81—84, 216, 25, 30, 39, 42, E: 792, 94, 95, 97—99, 801, 02, 04—06, 11—13, 9, 21—24, 27, 29—35, P). Clasa IX. Matache Elena (2112—14, 18, 20, 24—27, 29, 34), Temcea Gh. Viorica (2112—14, 25, 28, 29, 75, 77, 84, 88, 93, 98, 216, E: 802, 05—07, 13,

44, 29, 30, 32, 34, P). Clasa X. *Cristea P. Aurel* (1853, 908, 24, 25—27, 30, 31, 35, 38, 40, 42—44, 46—51, 54—60, 64, 71—75, 77, 81, 90, 92, 2012, 15, 17, 18, 21, 23, P). Absolvent Arghir B. George (2109—30, 32—39, 43, 44, 46, 48, 50—53, 56, 57, 59—63, 65—80, 82—88, 91, 92, 92, 95, 99, 204, 09, 11, 12), Munteanu Valeriu (2175, 77, 88, 93, 216, E: 802, 05—07, 13, 24, 29, 30, 32, 34, P).

GĂEŞTI. Clasa VIII. Ixaru Gr. Liviu (2042, 67, 82, 94, 100, 02, 04, 05, 09—11, 18—21, 24—29, 31, 32, 36, P). Clasa IX. Tudorache Ştefan (2059, 111, 12, 18, 24, 34, 64, 73—75, 82,84).

GALAŢI. Şcoala medie de marină. Clasa VIII. Căpran D. Petre (2127, 51, 73, 75, 77, 79, 80, 84, 85, 87, 88, 93, 98, E: 808, 11—14). Clasa IX. Tudorache Mihai (2049, 86, 104, 09, 11, 25, 27, 31, 73—75, 80, 82, 84, 88, 91, 99). Şcoala medie nr. 2. Clasa IX. Chirilă Costică (2111, 24—26, 28, 62, 63—67, 73, 74, 84, 200, 30, 35, 40, 46, 47, 52, 55, 58 ,60, 61, 63, 64). Clasa X Brînduşescu Elisabeta (2109, 11, 18, 24—26, 73, 75, 224, 30), Butoi Elena (1946, 48, 55, 56, 60, 61, 63, 92, 98, 2006), Chirilă Marin (2163, 71, 80, 90, 93, 200, 09, 36, 42, P), absolvent Ariton Vasile (1820, 22, 23, 25, 27, 29—36, 38).

GIURGIU. Clasa VII. Drăgan I. Petre (E: 819, 20, 22, 24—28, 30—36, 45), Stănescu Olga (E: 806, 28,11, 13, 14, 18, 25, 27, 32, 36, 44, 45), Stănescu Virgil (2118, 24, 25,28, 29, 31, 73—75, 77, 93, E: 793, 98, 806—08, 11—13, 15, 16, 18). Clasa VIII. *Brişcă Virgil* (2109, 10—13, 16—21, 23—26, 29, 31, 32, 36, 51, 62—65, 67, 70—73, 75, 77, 80, 84, 86, 88, E: 797, 99, 802, 08, 12, 13, 18), Căpitan Florea (2109, 11, 18—20, 29, 73, 75, E:, 794, 97, 808, 11—13, 18), Crăciunică George (E: 798, 99, 808, 11, 13, 2111, 18—23, 56, 73, 85, 91), Grama M. Marin (2109, 11, 18 , 22, 27—29, 36, 73, 75, 79, 88, 98, 231, E: 794, 97, 98, 801, 04—08, 11, 13, 14, 19, 22—24, 27, 28, 31, 53), Marinescu Sergiu (2086, 102, 10, 73, 78, E: 782, 88, 89, 806, 08, 11—13, 15, 18), *Profirescu D. Marcel* (1997, 2082, 86, 100, 02, 04, 05, 09, 11, 12, 18, 20, 24—26, 36, E: 747, 50, 54, 56, 76, 78—80, 83—86, 88—90, 92, 98, 99, 801, 02, 05, 18), *Vişinescu M. Mihai* (2122, 23, 32—35, 62, 63, 65, 71, 73—79, 81, 82, 84—88, 91, 211, 24, 25, 29—31, 39, 46, 47, 55, 57, 59, 60, E: 795, 96, 99, 804 06—08, 10—13), 15—45, 47—50). Clasa IX. Dorobanţu Traian (2112—14, 18, 20, 22—24, 64, 73, 74, 86, 88), Petre Gheorghe (2015, 43, 63, 81, 82, 88, 94, 97, 100, 02, 11—14, 18, 19, 21—27, 28, 50, 64, 72—75, 77, 82, 84—86, 88, 211). Clasa X. Alembrener Dumitru (2015, 45, 63, 64, 81, 94, 97, 100, 02, 04, 11, 13, 14, 18, 22—27, 29, 64, 72—75, 77, 82, 84—86, 211), *Stăncescu N. Emil* (2139, 42—44, 61, 64,—68, 70—80, 83, 86, 88, 90, 91, 93, 96, 200, 02, 04, 07, 09—11, 24, 30, 33—35, 42, P), Şerbănescu C. Florin (2111—13, 16, 18—21, 25, 26. 30, 35, 65, 73, 74, 77, 79, 84, 85, 93), Tincu Valeria (2112—14, 18—23, 25—27, 29, 34, 35, 37, 48, 61—66, 70, 72—77, 79, 82, 86, 88, 99, 224, 30, 31). Absolvenţii: *Bătineţu M. Dumitru* (2021, 32, 41—43, 45, 47, 51, 54, 79, 81—83 86 88 89, 93, 94, 100, 02, 04, 08—18, 20—22, 24—29, 31. 33—35, 44, 46, 63, 64, 66, 68, 71—75, 77, 79, 82, 85, 86, 88, 90—93, 203, 10, 11, P), Bilcu C. Petre (2105, 11—13, 17, 18, 20, 23, 25, 29, 36, 38, 64, 66), Ciobanu N. Marin (2109, 11—13, 16, 18, 20, 22, 23, 27—32, 35—38, 61, 64, 72, 75, 77, 84, 86, 93, P).

HOREZU (Piteşti). Clasa IX. Rădescu N. Nicolae (1977, 2059, 70, 111—14, 18, 25, 27, 29, 37, 64, 65, 75, 84, 93).

HUNEDOARA. Oberlander Horst (2156, 62, 63, 73—75, 79, 95, 209, 24, 30, E: 794, 807—09, 12, 18, 30, 31, 34).

IANCA (Galaţi). Clasa IX. *Bănică Radu* (2114, 16, 22, 27, 35, 55, 63, 65—67, 70—72, 79, 80, 85, 86, 91, 99, 200, 16, 33, 35, 40, 42, 46, 52, 57—59, 61, 64, 84), Caracoti Stere (2164, 65, 70, 73—75, 77, 79, 82, 84, 88, 95, 203), Iancu D. Ovidiu (2162—65, 67, 73—75, 77, 79, 82, 84, 85, 90, 200, 09).

IAŞI. *Şcoala medie de fete nr.* 1. Clasa IX. *Costinescu Anca* (2081, 111—14, 18, 20, 22, 24—27, 29, 31, 33, 34, 36, 37, 61, 64, 66, 74, 75, 78, 79, 82, 84, 85, 93, 200, 24, 31, 36). *Şcoala medie de băieţi nr.* 1. « *M. Sadoveanu* ». Clasa IX. Cuşmaru Ilie (2071, 75, 82, 94, 109, 10, 28, 36, 64—67, 70, 73, 75, 70, 84, 88, 93, 99, 216, 52, 54, 58, 67, 84), Feldman Milu (2111, 25, 26, 29, 31, 37, 64—67, 73, 75, 80, 84, 88, 93, 99, 200, 04), Grişaru Iancu (2054, 26, 27, 37, 61, 66, 73—75, 77, 200), *Şor Liber* (2041—43, 47, 48, 50, 53, 54, 57, 109—14, 18, 20, 22, 25—27, 29, 37, 43, 64—67, 70, 73, 75, 77, 80, 84, 88, 93, 99, 200, 16, 52, 58), *Ţibuleac Florin* (2042, 56, 82, 102, 04, 09, 11—13, 16—25, 27, 29, 30, 32—37, 42, 51, 56, 61. 62, 64—66, 70, 72—74, 82, 85, 86). *Şcoala medie de băieţi nr.* 2. Clasa VIII. Solomon Sender (211, 18, 20, E: 794, 95, 97—801, 03—08, 10, 11, 13, 18). Clasa IX. Mihalache Adrian (2163—67, 70—75, 77, 82,—84, 86, 88, 90, 93, 99), *Popescu Claudiu* (2109, 11—14, 16, 18—21, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 36, 51, 62—64, 67, 71, 74, 75, 77, 78, 83—85, 88, 93, 98, 99, 212). Clasa X. Cărăuşu I. (2020, 41, 45, 59, 65, 100, 12, 16—18, 23, 25, 26, 29, 31, 35, 43, 44, 69, 72—75, 84, 86, 91, 204, 11), Homutescu Adrian (2109, 11—14, 16—23, 26—29, 31, 35, 62—64, 67, 69, 71—75, 77—79, 82—86, 88, 93). *Şcoala militară « Ştefan cel Mare »*. Clasa X. Panţuru T. Dumitru (1968, 2040—43, 45—48, 50—52, 54, 56, 63—65, 67, 79, 81, 83, 85, 86, 88—90, 92, 94, 96, 97, 100, 02, 05), student *Donea Sorin* (2111—13, 15, 17,

18, 20, 21, 23, 25, 27—29, 31, 33, 35, 36, 38, 51, 53 , 57, 62, 66, 69—72, 75, 84, 86, 90, 93, 98, 99, 201, 07, 09, 11, P).

LUGOJ. Clasa VI. Florea Doina (2118, E: 794, 97—99, 801, 04, 11, 13, 18, 24, 30), Seleacu Vasile (2179, 84—87, E: 776, 80, 81, 87, 89, 90, 94, 98, 99, 801, 05, 12, 14, 17). Clasa IX. Boroancă Ion (2117, 21, 27, 29, 34, 35, 62, 65, 72, 73, 82, 86, 90, 93), Daba Dumitru (2111—14, 16—27, 29, 34, 35, 51, 63, 64, 72, 75, 77, 82, 84—86, 90, 93), *Florea Dorel* (2109, 16, 21, 22, 25, 26, 34—37, 51, 55, 62,—67, 72—74, 77, 78, 82, 84, 86, 90, 93, 99, 200, 01, 24, 33, 35, 36), Păpușoiu Gh. (2081, 82, 105, 34, 43, 63—67, 72, 73, 75, 78—80, 82, 84, 86, 90, 93, 98, 99, 204, 21, 24, 30).

MEDGIDIA. Clasa IX. Adbulamit Ghiulber (2111—14, 18, 22, 29, 64, 65, 73—75, 77, 84).

MEDIAȘ. Clasa VIII. Brînzoi Adam (E: 791, 94, 95, 97—99, 801—14, 16—25m 27—35), absolvenți: Jilăveanu Gh. (2109—16, 18—23, 25—29, 31—38, 43, 74, 75, 77, 84, 86, 211, 24, 30, 72), Stăncescu Dumitru (2109, 11, 13 15, 16, 18—21. 23, 29, 31, 33, 35, 36, 51).

MORENI (Ploești). Clasa VII. Moflic Em. (E: 793, 94, 96—98, 801, 06, 07, 10, 11, 13), absolvent *Colonati Cristian* (2063, 109—39, 43, 44, 47, 41, 53, 56—59, 61, 64, 65, 67, 68, 70, 73—77, 79).

NĂSĂUD (Cluj). Absolvent Roman Fabian (2041, 42, 64, 109, 15—17, 18, 23, 25, 27, 29, 31, 73—75, 78, 86).

NEGREȘTI. Clasa X. Berinde Gheorghe (2122, 23, 26, 30, 35—37, 64).

OCNA MUREȘ. Clasa IX. Rusu Mihai (2164—67, 71—75, 77—86, 88, 93, 99, 200).

ORADEA. Clasa X. Cristina Gh. (2216, 24, 25, 31, 45, 46, 55—57, 84).

ORĂȘTIE. Absolvent Necșa Vasile (2109, 11—13, 18—20, 23, 25, 29, 31, 35, 72, 84).

ORAȘUL STALIN. Student *Ioniță Teodor* (2162—75, 77—80, 82—95, 97—201, 03, 04, 06, 07, 10—12, 16, 17, 25, 27, 31, 35, 36, 39, 42, 47, 49, 52, 57, 59, 60, 62, 67, 71, 77, 78, 84). Clasa IX. Budin Ileana (2109, 11, 16, 18—22, 24, 29, 30, 36), Jinga Gheorghe (2008, 14, 110, 11, 13, 14, 18, 20—37, 61, 63, 65, 67, 73, 75, 82, 84), Rădulescu D. Constantin (2111, 12, 21, 24—26, 29, 34—37, 61, 64, 67, 74, 75, 79, 82, 84, 96, 200, 61, 84). Clasa X. Corbu Lucia (211—14, 18, 21, 22, 25, 33, 225, 36), Dragomir Adrian (2163—67 90, 93, 99, 200, 03, 09, 28, 35, 36, 42), absolvent Budin Pavel (1998, 2109, 11—14; 16—24, 26, 27, 33, 36—38, 56, 61, 216, 35).

ORȘOVA. Clasa IX. Petroi Const. (2042, 48, 51, 59, 77, 80, 82, 85, 109, 12—14, 18). Clasa X. Răchitan N.C. (2111—14, 17, 21, 23, 29, 64, 74, 75, 84, 86).

PIATRA NEAMȚ. Clasa VIII. *Gervescu M. Ioan* (2042, 53, 61, 81, 82, 86, 102, 09—11, 18—30, 32—36, 39, 52, 53, 59, 62, 73—75, 78—80, 82, 83, 85, E: 776—91, 94, 808, 11—14). Clasa X. Gavril V. Vasile (2041, 45, 48, 50, 65, 70, 79, 100, 02, 20, 29, 31).

PETROȘANI (Zimnicea). Clasa VI. Albu Toma (E: 765, 67, 71, 80, 81, 87, 90, 801, 08, 10, 13, 14, 16), absolvent Sin C. Alexandru (2162—68, 70, 71, 73, 75, 77, 84, 88, 94, 204, 07, 11, 16, 24, 35, 47, 51, 52, 55, 57, 60—62, 84, 329).

PITEȘTI. Clasa VIII. Bică I. Const. (E: 794, 809, 12, 18, 21, 24, 26, 29—31, 33, 34). Clasa IX. Rădulescu Maria (2094, 100, 63—65, 67, 71, 74, 75, 77, 80, 83, 84, 91, 93), Șofron Gavril (2016, 41—43, 48, 50, 54, 59, 63, 65, 74, 75, 79, 81 84, 86, 92, 94, 99, 102, 04, 05, 08—10, 12, 13, 20, 23, 26, 29, 31). Clasa X. Nica Emilian (2109, 11—13, 16, 18, 20, 23—25, 28, 29, 31, 38, 61, 70, 73—75, 77, 79, 84—86, 93, 211, 24, 30).

PLOEȘTI. *Școala medie nr.* 1 « *I.L. Caragiale* » Clasa VIII. Ciobanu Romeo (2163, 73, 75, 82, 93, E: 806, 08, 11, 13, 18), Leonte Dinu (2085, 108, 65, 73, 75, 77, 78, 84, 208, E: 806, 11, 13, 18), Tănăsescu A. (2189, 98, 233, E: 811, 13, 18, 32, 36, 37, 45), *Tagă S. Mihail* (2162, 63, 71, 73—75, 77—80, 82, 85, 87, 93, 95, 98, 216, 25, 36, 46, 47, 55, 57—59, 61, E: 813, 15, 18, 19, 22—24, 26, 27, 30, 32—37, 40—42, 44, 45, 47, 48, 50). Clasa IX. *Baltag Vasile* (1959, 68, 80, 2070, 108, 41, 43, 46—48, 53, 55, 62—68, 70—75, 77, 79—83, 86—88, 90, 91, 93, 95, 99, 200, 04, 07, 11, 16, 18, 24, 25, 33—35, 40, 42, 47, 49, 51—56, 59, 61, 65, 67, 68, 73, 78, 84), Boiangiu Nicolae (2054, 100, 04, 09, 11, 13, 19—21, 23—25, 29, 32—36, 62, 64, 65, 73—75, 78, 84, 86, 92, 93), Căsăndroiu C. (2162, 66, 69, 78, 80, 84, 90, 93, 95, 99, 209, 16, 18, 19, 24, 30, 35, 39, 42, 46, 47, 52, 54—58, 61, 71, 83, P). Constantinopol Alex. (2109, 11, 12, 18—22, 24, 25, 27, 29—34, 56, 62—63, 65, 71, 73—75, 77—79, 82, 83, 85), Leca Aurel (2162—66, 72—75, 77, 79, 80, 82, 84, 86, 93, 209, 42, 52), Lungi N. Liviu (2162—65, 67, 70, 75, 77, 84, 90, 93, 200, 01, 03, 06, 09, 16, 18, 35, 36, 39, 42, 45).

Școala medie nr. 2. Clasa VII. Georgescu Eugenia (2118, 19, 21, 24, 27, E: 794, 97—99, 801, 02, 04).

Școala medie de fete nr. 3. Clasa VIII. Vișină Elenă (1955, 60, 62, 2006, 111, 26, 29, E: 752, 53, 56, 65, 72, 94). Clasa IX. *Marin Maria* (1915, 40, 44, 48, 50—52, 54—56, 62, 76, 77, 92, 2005, 06, 21, 23, 24, 42, 59, 102, 04, 09—11, 13, 18, 20, 24—26, 28. 29, 31, 36, 38, 63, 64, 66, 67, 74, 75, 77), Mitulescu Oprica (2059, 111—14, 20, 29, 64, 74, 83).

Şcoala de 7 ani mixtă nr. 24. Clasa VI. Gheorghiu A. Nicolae (E: 752, 53, 61, 63, 65—68, 70—72, 78, 80, 81, 87, 98, 801, 04, 08, 11, 13).

Absolvenţi: Bănică Emilian (2040—43, 45, 47—54, 59, 62, 78, 79, 83, 86, 90, 92, 100, 90, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25—27, 29, 31, 33, 35, 38), Dima Ştefan (2042, 43, 45, 80, 94, 104, 11—13, 16, 19—20, 25, 26, 29, 32, 35, 93), Mihai Reveica (2225, 46, 52, 54, 56, 57, 60, 64, 84, 85), Văgăunescu George (32109, 11—20, 23—26, 29, 29, 31, 35, 36, 38, 64, 566, 67, 69—75, 77, 82—84, 87, 88, 90, 91, 93).

PUCIOASA. Clasa VIII. Alexandru Horia (2163—66, 71, 73—75, 80, 82—85, 90). Absolvenţi: *Bucur Gheorghe* (2059, 63—65, 67, 69, 72—74, 76—78, 81, 82, 84—90, 92, 94, 97, 98, 100, 02, 03,—05, 07—30, 32—39, 42—44, 46, 48, 50—52, 55—57, 60), Frăţiloiu Gh. (2170, 71, 73—75, 77, 79, 80, 83, 84, 86, 91, 210, 11, 35, 46, 52, 58, 72, 84).

RĂDĂUŢI. Clasa X. *Iftimie Viorel* (2109—35, 40, 42—44, 46, 48, 51, 52, 55, 63—67, 69—91, 93, 99, 200, 03, 04, 06, 09, P).

REŞIŢA. Clasa VIII. Beretz Eugen (2111, 18, 20, 25, E: 794, 805, 13, 19, 22, 24, 34). Clasa X. Farcaş D. Dan (2109—11, 14, 18—23, 31).

RÎMNICU-SĂRAT. Clasa VII. Asănache Horia (2118, 79, E: 798, 811—13, 19, 24, 28, 33). Clasa IX. Ciobănaş Filaret (2109—14, 16, 18—27, 29, 31—34, 48), Jercan Mircea (2109, 11—14, 18—35, 38, 56, 61, 62, 65, 67, 71—88).

RÎMNICU-VÎLCEA. Clasa VI. Bulucea D. Dumitru (E: 776, 80, 84, 94, 98, 801, 04, 05, 08, 10, 18). Clasa IX. Ancuţoiu I. Gheorghe (2064, 109—14m 18, 20, 22, 24—27, 30—34, 36, 37, 46, 56, 61, 63—65, 67, 73, 75, 79, 82, 93, P), Bulucea D. Const. 1808, 965, 77, 2049, 63, 64, 80, 99, 201, 03, P), Smărăndescu Petre (2119, 21, 22, 27, 33, 34, 61, 78, 91). Clasa X. Enescu Nicolae (2132, 36, 37, 61—63 67, 68—75, 78, 79, 82, 84, 86, 88, 93, 200, 03, 04 11, 14, 24, 30, 33, 35, 40), Lazăr Gheorghe (2111, 12, 16, 17, 23, 25, 31, 50, 72, 74, 75, 77, 98, P), Paulescu N. Dan (2122, 27, 32, 37, 61—63, 69—75, 77—80, 82, 88, 99, 200, 11, 14, 16, 24, 30, 33, 35, 40, P), absolvent Băiaşu D. Nicolae (2164, 75, 77, 78, 80, 97, 88, 216, 30, 35, 40, 49, 56, 61, P).

ROMAN. Clasa VI. Segal Achiba (E: 798, 801, 04—06, 11, 13, 19, 25, 28, 32). Clasa VIII. Enache V. Gheorghe (2165, 72, 74, 75, 78, 82—86, 95, 203, E: 806, 08, 11, 13, 15, 18—20, 24—28, 31, 32, 34), *Hioi C. Constantin* (2109, 11, 18, 20, 24—31, 36, 51, 63, 71, 73 75, 77, 79, 82, 83, 91, 93, 216, 24, 30, E: 794, 97—99, 801, 02, 04—06, 08, 10, 11, 13—16, 18, 19, 22, 24—27, 30, 31, 34), Ricinski Cezar (2118, 20, 31, 36, 73, 75, 211, E: 798, 99, 801, 04, 06, 08, 11, 13—15, 18). Clasa IX. Cămilă C Gheorghe (E: 819, 22, 24, 27, 39—34). Clasa X. Murărescu Gh. (2025, 40—43, 47, 63, 72, 76, 108—31, 33—37, P).

ROŞIORII DE VEDE. Absolvent *Mitroi Valeriu* (1998, 2023, 25, 38, 47, 63, 109—18, 20, 23—29, 31, 33, 35, 38, 53, 57, 64, 69—71, 73—75, 77, 79, 86, 91, 211, 72, P).

SATU MARE. Şcoala tehnică c.f.r. anul III. Pop Ioan (2109—14, 17—21, 23, 25, 26, 30, 32, 34, 35).

SIBIU. Clasa VIII. Buţu Gheorghe (2109, 11, 18, 31, 73, 75, 93, E: 801, 04, 08, 12, 18). Clasa X. Bîrsan Ion (2041, 109, 11—14, 16, 18, 23, 29, 31, 34, 35, 62—64, 66, 71—75, 86, 90, 93), abs. Tulai Gh. (1992, 2008, 10, 15, 21, 23, 32, 34, 36, 39, 42, 45, 50, 82, 83, 88—90, 102, 04, 09, 11—13, 16, 18—21, 23). Şcoala de artilerie. Pupăzan V. Nicolae (2137 38, 61, 90, 92, 93, 96 97, 99, 200, 03, 07, 09—12, 14—21, 23, 25, 32—36, 38—40, 42, 45, P).

SIGHET. Clasa VII. *Tomoiagă Doru* (2081, 111, 21, 22, 24, 30, 33, 34, 73, 88, 95, E: 777, 79, 82, 83, 85, 800, 02, 03, 05—08, 11, 13, 16, 18, 22, 24, 28, 29, 32, 34, 36, 45, 47, 50, P). Clasa IX. Moldovan G. (2110—14, 16, 18—21, 24, 25, 29, 31, 32, 35, 42, P).

SIMERIA (Hunedoara). Abs. Ardeleanu Dumitru (2023, 45, 50, 52, 88, 89, 90, 100, 10, 11, 13, 16—18, 23, 25, 29, 36, 38, P).

SLATINA. Student f.r. Cochinţoiu Ion (2054, 79, 83, 88, 89, 94, 100, 04, 12, 16., 17, 19—21, 24, 29, 33, 37, P).

SNAGOV (Bucureşti). Şcoala medie din Fierbinţi-Tîrg. Clasa IX. Preda Vasilica (2111, 18, 20, 23, 24, 26, 64, 65, 73, 75, 84, 93, P).

SOMEŞ (Cluj). Abs. Barbur Ion (2113, 16, 18, 20, 23, 25—29).

STREHAIA (Craiova). Abs. *Bardan I. Ion* (2041—43, 47, 48, 50, 54, 63, 65, 79, 88—90, 94, 100, 02, 05, 09, 11—16, 18—21, 23—25, 29—32, 38, 57, 61, 64, 66, 70—72, 75, 86, 88, P),

TECUCI. Clasa VII. Doca Maricel (E: 805, 11, 13, 18, 22, 24, 31—34). Clasa VIII. Druţă Ioan (2126, 75, 79, E: 794, 802, 04, 06, 08, 10, 11, 13, 15, 19, 24, 32), Sulugiuc Silvia (2069, 74, 75, 77, 80, 126, 32, 53, 75, 88. E: 792, 94—97, 802, 05, 12), *Vidraşcu Traian* (2042, 79, 100, 09—12, 25—27, 29, 30, 36, 42, 53, 62, 63, 80, 88, 242, 46, 54, 61, E: 785, 90, 92, 94, 98, 99, 801, 06, 11, 13, 15, 16, 22, 26, 30, 31, 33, 35, 36, 42, 45, 50), abs. *Sevasie I. Gheorghe* (2043, 45, 50, 53, 56, 62, 109, 11—14, 17—27, 29, 30, 32—34, 51, 64, 66, 69, 72, 73, 77, 79, 80, 82, 84, 86, 87, 92, 94, 95, 204).

TIMIŞOARA. Clasa VII. Nerodea Rodica (E: 793, 98, 801, 04—06, 08, 11, 13, 19, 28, 32). Clasa VIII. Mihăileanu Alexandru (2118, E: 801, 08, 13—16, 18, 22, 24, 31, 32, 37, 47), Toma Corneliu (2164, 71, 75, 77, 79, 81, E: 808, 11, 13, 16—19, 22, 24, 27—32, 34, 35). Clasa X. Bretan Dan (1931, 40, 76, 77, 2111, 13, 18, 20, 24, 27, 31, 32, 42, 43, 64), Cismariu Ionica (2109—12, 14, 23, 29, 64, 72, 74), Mihăileanu Constantin 2115, 18—20, 27, 33, 51, 63—66, 71, 73, 75, 77, 79, 84, 93 228, 36, 38, 52), *Nerodea Tiberiu* (2041—43, 50, 51, 59, 62, 83, 89, 90, 104, 15—19, 21, 23, 27, 29, 30, 33—38, 54, 61, 64 71—75, Popa Laurenţiu (2062, 109, 13, 18—21, 23, 25—27, 32, 64, 66). Anul IV. *Şcoala pedagogică*. Kneipp Petru (2118—25, 30, 32—35), abs. Vasilievici Alex. (2168, 71, 73, 75, 77—79, 82, 84, 86, 88, 93, 200, 11, 16, 24, 30, 35, 46, 52, 57, 61, 64, 65, 72, 78, 84).

TÎRGOVIŞTE. Clasa VI. Seealcu Vasile (2118, 19, 27, 88, 98, E: 792, 96, 802, 04, 08, 10, 11, 13, 18). Clasa VIII. Dumitru I. Gheorghe (E: 819, 22, 24, 25, 27, 30, 31, 33—35, P), Popescu S. Dan (2111, 18, 20, 25, 29, 36, E: 797, 803, 05), Vlădescu Mihai (E: 798, 99, 801, 04—06, 19, 25, 28—30, 32—34). Clasa X. Stănciulescu M. Mihai (2098, 116, P), absolvenţi: *Cărbunaru. M. Constantin* (1946, 73—74, 76, 77, 2004, 06—08, 20, 23, 43, 45, 50, 54, 89, 100, 11—13, 16—19, 21, 23, 26—36, 63, 64, 85, 235), *Tudor M. Constantin* (1983, 97, 2015, 25, 47, 49, 59, 62, 63, 70, 81, 83, 105, 37, 39, 42, 44, 52, 55, 62—79, 81—88, 90, 91, 93, 95, 97, 204, 07, 10, 11, 14).

TÎRGU—JIU. Clasa VII. *Velicescu T. Mircea* (1997, 98, 2004, 06, 09, 221, 78, 109, 11, 12, 18—22, 24, 25, 27—31, 33, 34, 71, 73—78, 81, 82, 84, 85, 88, 91, 93, 212, E:764—68 71, 72, 91, 92, 94—99, 801—18, P). Clasa VIII. *Aniţescu N. Nicolae* (2040 43, 47—54, 78, 79, 92, 100, 02, 03, 09—14, 18—21, 23—25, 27—33, 35, E: 777, 78, 81, 83, 84, 86, 91, 93—99 801, 02, 04, 05). Clasa X. Mărgineanu Constantin (2170—73, 75, 77, 79, 82, 84, 86, 235, 36), Popescu A Iulian (2049, 55, 59, 62, 78, 81, 86, 110, 15, 21, 27, 28, 34—36, 42, 43, 47, 53, 56, 57, 61, 71, 75, 77, 80, 84, 86, 98), absolvenţi: Popeangă V. Ion (1977, 93, 2041, 108, 10—13, 20, 23, 25, 29, 32, 36, 38, 65, 70, 72, 73, 75, 80, 86, 88, 91, 93, 97, 99, 200, 11, 14), Popescu T. Mihai (2109, 11, 13, 16—18, 25, 26, 29, 31).

TÎRGU MUREŞ. Clasa VIII. Burlacu Galina (2109—11, 18, 20, 24—26, 29, 31, 73 75, 77, 78, 82, E: 794, 95, 98, 801, 02, 04—06, 08, 11, 13, 14, 19, 33, 24, 27, 32), Curtifan Petru (2174, 75, 77, 79, 82, 91, 93, E:, 808, 10, 11, 13), Fleşeriu Călin (2109, 11, 18—28, 30—34, 46, 47, 51, 72, 73, 75—79, 81, 82, 84—87, 91, 98, 93, 203), Ghetmăneţ Octavian (2109 — 11, 18—20, 22—27, 29, 32, 36, 46, 47, 51, 73—75, 77—82, 84, 87, 91, 93, E: 794, 97, 99, 801, 02, 04—08, 10—15, 18), *Moironea N. Valer* (2109—11, 18—20, 22—26, 28—30, 32, 36, 73—76, 78, 79, 81, 82, 84, 87, 91, 93 E: 794, 98, 99, 801, 04—80, 10,11, 13—15, 18), Neagoe Olimpia (2042, 104, 11, 18—20, 24, E: 776, 78, 80, 81, 87, 90, 94, 97—99, 801, 04, 05, 11, 13, 18), Stefanelli Ileana (2078, 102, 04, 09, 11, E: 776—78, 80, 86—88, 90). Clasa IX. Peterfy Attila (2054, 59, 65, 79, 81, 82, 86, 97, 104, 11—14, 18—29, 33, 34, 37, 51, 60), Pop Ioan (2112—14, 18, 19, 26, 27, 29, 33, 36, 37, 61, 64, 73—75, 78, 79). *Tudor Sp. Tiberiu* (2109—14, 18—31, 33, 34, 36, 37, 61, 63, 65, 71—75, 77—79, 82, 83, 85—88, 91, 93, 99).

TÎRGU NEAMŢ. Clasa X. *Focşăneanu Ion* (2056, 58, 109—38, 42, 43, 51, 53, 55—57, 61—79, 82—88, 93, 97, 211), Stingu Nicolae (2023, 111—14, 118—20, 23—27, 29), abs. Răileanu Mihai (2020, 83, 105, 10, 13, 19—22, 24, 26, 30, 32—35, 42, 43, 52, 62—54, 66, 69—71, 73—75, 77, 78, 86, 88, 93, 204, 35).

TURDA. Clasa VIII. Babeş Victor (2109—11, 18, 20, 25, 73, 75, E: 798. 811 13). Clasa X. Racoviţan Dorin (2045, 52, 78, 89, 100, 02, 11—14, 16—20, 25, 29, 31, 38, 61, 65, 67, 69—75, 77—79, 84, 88, 211).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII. Scorte V. Alexandru (2162, 63, 65, 67, 73, 79, 82, 88, 91, 95, 203, 09, E: 807—09, 12, 13, 16—18). Clasa IX. Damalan Maria (2042 48 54 81, 82, 86, 100, 02, 10—14, 16, 18—24, 25, 27, 29, 30, 32—37, 46). Clasa X. *Drăguşin Mircea* (1998, 2013, 15, 23, 37, 38, 47, 2109—11, 19, 31, 36, 42, 56, 61—68, 70—75, 77—88, 91, 200, 11—13, 68), Niculescu Iulian (2162, 63, 69, 88, 80, 97, 200, 01, 09, 10), abs. Ţăranu Florea (2109, 11—13, 16, 18—21, 23, 25, 27, 29—33, 35).

TURNU SEVERIN. Clasa VIII. Iuici Gh. (E: 819, 22, 24, 27, 29—33, 34, 45), Vabs. Ionescu Radu (2163, 64, 70, 71, 73, 75, 77, 78, 84, 86, 90, 93, 211).

ŢĂNDĂREI (Constanţa). Abs. Pană Gheorghe (2162—64, 67—70, 72, 90, 93, 99, 200, 09, 12).

URLAŢI. Clasa VII. Lucaş Viorica (2104. 09, 11, 18, 20, 24—26, 73, 75, E: 797, 801, 12, 16—18). Clasa IX. Ianu Vasile (2042, 54, 100, 04, 09, 18, 24, 25, 28, 29).

VALEA CĂLUGĂREASCĂ. Absol. *Iorgulescu Alexandru* (2112, 13, 16, 22, 26, 29, 31, 33, 68—80, 82—84, 86, 88, 90, 93, 95, 200, 07, 11, 22, 33—35, 40).

ZALĂU. Clasa IX. Mastan I. Ion (2042, 82, 86, 111, 12, 18—20, 24, 45).

ZLATNA (Hunedora). Clasa VIII. Cojanu Horia (2111, 18, 25, 31, E: 794, 89, 804 05, 22, 24, 27, 32, 34).

Se mai primesc soluţii pînă la apariţia numărului 1 ianuarie 1957, de la elevii claselor a VIII—X—a şi studenţi, la problemele 2289, 2305, 2315, 2319, 2324, 2332, 2360, şi următoarele. La problemele E: 858, 862, 867, 870 şi următoarele se primesc soluţii numai de la elevii claselor elementare şi clasa VIII (inclusiv).

ERATĂ. — La problema 2397 în loc de $\sin C\,(B-c)$ se scrie $\sin C \sin (B-C)$.

Notă. — Problema 2240 semnată de Lupuţiu Ion se mai găseşte în «Cours d'arithmétique de A. Tartinville», pag. 138, şi în culegerea de probleme de artimetică, volum litografiat de Facultatea din Iaşi.

— Problemele 2067 şi 2069 se mai găsesc şi în «Questions de Géometrie» de M. Desboves cu numere 147 pag. 134 şi nr. 207 pag. 216.

TABLA DE MATERII

a «Gazetei Matematice şi fizice» seria B, anul VII (1956)

I. Articole

		Pag.
1.	BĂDESCU RADU, prof. univ. Fac. Industriei uşoare Bucureşti, Observări asupra unor probleme de natație	470
2.	BITAY LADISLAU, asistent, Despre construcţii geometrice	115
3.	BOIANGIU D. D., lector Inst. Politehnic Bucureşti, Dispozitiv pentru desenarea conicelor	128
4.	BUICLIU GH., general în rezervă, Un exemplu de generare a teoremelor de geometrie	180
5.	CIORĂNESCU N., prof. univ. Institutul Politehnic Bucureşti, Sisteme de numeraţie	57
6.	CIUCU G., asistent fac. matematici Bucureşti, Ce este calculul probabilităţilor?	294
7.	CONSTANTINESCU BENONE şi LUCREŢIA, asistenţi Iaşi, Introducere în studiul inelelor şi corpurilor numerice abstracte	454
8.	CRISTEA I. ION, student fac. matematici Bucureşti, Cîteva teoreme de maxime şi minime	100
9.	DEMILANO P, inginer, Bucureşti, Microfonul	200
10.	DRÎMBĂ D., prof. univ. dr. ing., Gazul de lemn în slujba economiei naţionale	350
11.	GHEORGHIU TRAIAN, acad. prof. univ. Bucureşti, Despre semiconductori şi aplicaţiile lor	288
12.	GNEDENKO B. V., acad. prof. univ. Universitatea din Kiew, Maşinile electronice de calculat	338
13.	IONESCU-BUJOR C., prof. univ. Inst. Politehnic Bucureşti, Tineretul trebuie să-şi însuşească temeinic cunoştinţele de matematică	449
14.	LASZLO HEINRICH, Fizica şi sportul	521
15.	MAURER IULIU, lector Univ. «J. Bolyai» Cluj, 100 de ani de la moartea lui Farkas Bolyai	563
16.	MIHALAŞCU D. prof. Piteşti, Rădăcini comune la două ecuaţii	395
17.	MUŞAT ION, prof. Chitila, Cu privire la activitatea cercurilor de matematică din şcoli	305
18.	MUŞAT ION, Cu privire la activitatea cercurilor de elevi	636
19.	NEGULESCU ANGELA, prof. Bucureşti, Electretul şi aplicaţiile lui tehnice	13
20.	OPRAN ION, prof. s.m. mixtă 2 Bucureşti, Curent trifazat	463
21.	POPOVICI CĂLIN, prof. univ. Bucureşti, Planeta Marte	575
22.	RIŞAVI I., conf. univ., Sistemul periodic al elementelor	227
23.	ROGAI E., inginer, Radiolocaţia	622
24.	ROMAN TIBERIU, conf. univ. Bucureşti, Grupurile de rotaţie ale poliedrelor regulate	3
25.	ROMAN TIBERIU, secretar general al S.S.M.F., Rezultate ale olimpiadelor de matematică şi fizică din anul 1956	281
26.	SIMIONESCU Gh. D., conf. univ. Inst. Politehnic Bucureşti, Omografia (I)	505
	Omografia (II)	566
27.	STĂNESCU N., conf. univ. Inst Politehnic Bucureşti, Polarizarea luminii şi aplicaţiile ei	64

Pag.

28. TÓTH A., conf. univ. Universitatea « J. Bolyai » Cluj, Despre conice 409
29. TÓTH E., conf. univ. Bucureşti, Numărul « e » în natură 571
30. TÓTH A., conf. univ., Teorema lui Farkas Bolyai despre egalitatea figurilor plane 617

II. Editoriale

1. La începutul unui nou an 1
2. Rolul fizicii în dezvoltarea tehnicii noi 113
3. 1 Mai 225
4. « 23 August » — ziua eliberării patriei noastre 393
5. Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie — deschizătoare de drumuri pentru avîntul ştiinţelor matematice şi fizice 561

III. Pentru cercurile de matematică şi fizică

1. O problemă practică de maxime şi minime rezolvată pe cale geometrică, de Eugen Ţimpoc, prof. Iaşi 182
2. Demonstrarea geometrică a unor formule trigometrice, de Silviu Guiaşu, student Facult. Matematică Bucureşti 345
3. Cu privire la activitatea cercurilor de elevi din şcoli, de I. Muşat 636
4. Premiile G.M.F. Seria B pe anul 1956 631

IV. Note matematice

1. Asupra problemei 1301, de Ion I. Cristea, student Facult. Matematică Bucureşti 19
2. O demonstraţie a unei teoreme, de Mihail I. Popescu, student Inst. construcţii civile Bucureşti 22
3. Generalizarea problemei 1148, de Oprea M. Berechet, student Facult. Matematică Bucureşti 79
4. Asupra unei teoreme a lui Carnot, de Gh. I. Bercea, student Inst. Politehnic Timişoara 80
5. O problemă elementară de mecanică, de Alexandru Stoenescu, prof. univ. Inst. Politehnic Bucureşti 81
6. Generalizarea problemei 1424, de D. C. Panu 84
7. Generalizarea problemei 1712, de Dan C. Panu, Galaţi 187
8. Generalizarea problemei 1768, de Dan C. Panu, Galaţi 188
9. Asupra dreptelor şi planelor izogonale, de Mihail I. Popescu, student Inst. Construcţii civile Bucureşti 250
10. Generalizarea problemei 1183, de Gh. I. Stoian, student Facult. Matematică Bucureşti 312
11. Demonstrarea geometrică a unor formule trigonometrice, de Silviu Guiaşu, student Facult. Matematică Bucureşti 345
12. Asupra problemei 1424, de Teodor Gh. Cocea, Bucureşti 415
13. Un caz particular al triunghiurilor ortologice, de D. C. Panu 417
14. Teorema lui Ptolomeu, de Marius I. Stoka, Bucureşti 422
15. Generalizarea problemei 693, de Mihai M. Stănciulescu, elev Tîrgovişte 422
16. Asupra problemei nr. 5 din Gazeta Matematică, de Mircea Adam, Bucureşti .. 532
17. Asupra problemei 1509, de Theodor Gh. Cocea 581
18. Asupra problemei 1805, de Theodor Gh. Cocea 582
19. Generalizarea problemei 1548, de Gh. Mocanu 633
20. Asupra unei teoreme a lui Euler 633

V. Să construim cu mijloace proprii modele şi aparate de fizică

1. Un model de generator de curent alternativ, după V. G. Macruşin (Fizica v şcole, 4/1954) 136
2. Montaj pentru determinarea distanţei focale la o lentilă divergentă, de N. Rădulescu, prof. s.m.b.l. Bucureşti 185
3. Montaj pentru demonstrarea rezonanţei pendulelor, după I. P. Jerebţov 311
4. Construcţia şi gradarea unui ampermetru-voltmetru pentru curent continuu şi alternativ cu sensibilitatea variabilă, de Virgil Pavlu, conf. Bucureşti 345
5. Două experienţe de electrostatică, de G. I. Jerehov 634

Pag.

VI. Pentru cunoașterea energiei atomice

1. Energia de legătură a nucleului și defectul de masă, de Virgil Atanasiu, lector București 22
2. Forțele nucleare, de Iosif Rișavi, conf. univ. 124
3. Despre spin, de Anatole Hristev, ing. București 361
4. Energia atomică în tehnică (după M. S. Fomicev, « Priroda », 3/1956) 401

VII. Caleidoscop matematic și fizic

1. Caleidoscop matematic 133, 308, 475, 586
2. Caleidoscop fizic 25, 255, 364, 530

VII. Diverse

1. Din viața cercurilor de elevi 49
2. Poșta redacției 51, 215, 275
3. Premiile « G.M.F. »-B pe 1955 78
4. Noutăți din știință și tehnică 190, 589
5. Lista celor distinși la olimpiadele de matematică-fizică, etapa finală (pe țară) .. 285
6. Rezultatul Olimpiadei Tinerilor Matematicieni și Fizicieni, 1956 337
7. Lista elevilor premiați și menționați la O.T.M.F. 382
8. Al IV-lea Congres al matematicienilor romîni 533
9. Rezultatul întrecerii pe țară între cercurile de matematică și fizică ale școlilor medii pe 1956 585
10. Olimpiada de matematică și fizică 1956—57 590
11. Olimpiada tinerilor matematicieni și fizicieni 1957 604
12. Premiile « Gazetei Matematice și fizice » seria B pe anul 1956 631

IX. Chestiuni de examen

1. Probleme date la admiterea în facultatea de matematică și fizică a Universității « J. Bolyai » din Cluj în 1955 28
2. Probleme date la admiterea în facultatea de chimie a Universității « J. Bolyai », Cluj, 1955 28
3. Probleme date la admiterea în facultatea de geologie și geografie din București 1954 29
4. Probleme date la diferite examene de admitere în Institutul de transporturi și căi ferate București, 1955 29
5. Probleme date la admiterea în Institutul de Petrol și Gaze din București 1955 85
6. Probleme date la admiterea în Institutul de mecanică din Orașul Stalin, 1955 86
7. Probleme date la admiterea în facultatea de matematică și fizică, Iași, examenul II, 1955 139
8. Probleme date la admiterea în Inst. Politehnic Iași 1955 139
9. Probleme date la admiterea în facultatea de industrie ușoară, Iași, 1955 140
10. Probleme date la admiterea în Institutul pedagogic Timișoara 1955 ..... 140, 654
11. Din problemele date la olimpiadele de matematică în Uniunea Sovietică, 1955 141
12. Probleme date la Olimpiada matematică, etapa II, martie 1955 (etapa locală) 207
13. Chestiuni date la Olimpiada de fizică, etapa II, martie 1956 (etapa locală) .. 210
14. Olimpiada de matematică 1956, etapa III regională 267
15. Din problemele date la cercul de matematică și cel de fizică din Capitală, 1956 326
16. Olimpiada de matematică, etapa finală București, 29 aprilie 1956. Subiecte lucrărilor scrise date pe clase 374
17. Subiecte date la admiterea în facultăți, august 1956 548
18. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic, Orașul Stalin 1956 600
19. Probleme date la admitere în Fac. Matematică și Fizică, Cluj, ... 652
20. Idem, la Facultatea de Chimie, Cluj, 1956 652
21. Idem, la Fac. de matematică și fizică, Timișoara, 1956 653

X. Probleme propuse și rezolvate

1. *Probleme propuse.* Nr. 1965—1991 (p. 44), 1992—2004 (p. 50), 2005—2011 (p. 85), 2012—2034 (p. 99), 2035—2039 (p. 102), 2040—2080 (p. 139), 2081—2108 (p. 154), 2109—2138 (p. 207), 2139—2161 (p. 211). 2162—2188 (p. 267), 2189—2214 (p. 270),

215—2222 (p. 326), 2223—2245 (p. 327), 2246—2262 (p. 374), 2263—2287 (p. 376), 2288—315 (p. 435), 2316—2341 (p. 494), 2342—2369 (p. 545), 2370—2380 (p. 548), 2381—2403 (p. 597), 2404—2417 (p. 600), 2418—2464 (p. 649).

2. *Exerciții și probleme pentru școala de 7 ani.* Nr. E: 747—760 (p. 48), 761—775 (p. 103), 776—790 (p. 158), 791—805 (p. 214), 806—818 (p. 273), 819—835 (p. 330), 836—850 (p. 379), 851—862 (p. 438), 863—873 (p. 497) 874—884 (p. 505), 885—898. (p. 602), 899—909 (p. 654).

3. *Rubrica rezolvitorilor de probleme.* Pag. 52, 105, 160, 217, 276, 331, 383, 440, 498, 551, 607, 656.

4. *Redactarea soluțiilor.* Nr. 1, nr. 2, nr. 3. nr. 4, nr. 5, nr. 7, nr. 8, pag. 504, nr. 11, nr. 12.

5. *Premierea rezolvitorilor*

— Premiile «Gazetei matematice și fizice» seria B pe anul 1955 78
— Lista celor distinși la olimpiadele de matematică și fizică (etapa finală, pe țară) 285
— Rezultatul Olimpiadei Tinerilor Matematicieni și Fizicieni 1956 337
— Lista elevilor premiați și menționați la Olimpiada Tinerilor Matematicieni și Fizicieni 1956 382
— Premiile Gazetei Matematice și Fizice pe anul 1956 631
— Subiectele Olimpiadei tinerilor matematicieni și fizicieni 1957 612

6. *Probleme propuse repartizate pe autori.* — *Abagiu Dorel* (1976), *Adler Iulius* (2208), *Albăstroiu I. Petre* (2238, 2301), *Andricioaiei I. Gh.* (2420), *Andronescu Victor* (2335), *Atanasiu Virgil* (2030, 2031, 2159, 2160, 2285, 2365, 2366), *Ballag V.* (2396, 2400), *Bărbuică N.* (2192), *Bazacov G.* (2295, 2832), *Belcin Gh.* (2282), *Bercea I. Gh.* (2336, 2391, 2449), *Berdan Const.* (2278, 2304), *Bernstein R.* (2343), *Bichir Ilie* (2277), *Both Lucia* (2292), *Brezeanu I. I.* (3118), *Bucur Gh.* (2298), *Buicliu Gh.* (1989, 1990, 2084, 2091, 2140, 2199, 2239, 2276, 2305, 2348, 2389, 2403, 2435, *Bulucea C.* (2394), *Călugărița Gh.* (2190, 2303), *Cerepnin M.* (2320, 2344), *Ciomu C. N.* (2087, 2237, 2266, 2390), *Ciorănescu N.* (2314), *Clapon Virgil* (2302), *Cocea Gh. Theodor* (2287, 2385, 2399), *Cocoș Emanuel* (2014, 2106), *Constantinescu Fl.* (2267), *Constantinescu N. Ilie* (2018), *Cornățeanu Radu* (2102), *Costăchescu C. V.* (1991, 2095, 2155, 2225, 2283, 2334), *Cristea I. Ion* (2141, 2228), *Dăscălescu H.* (2241, 2309), *Dinu Gheorghe* (2092, 2242), *Dobrescu Gh.* (2333), *Dobrotescu Gh.* (2027, 2096, 2288), *Domide L.* (2212), *Donea Sorin* (2357), *Donescu St. Dragomir* (2019, 2271, 2361), *Draica C.* (2146, 2364), *Duduica Radu* (2206), *Emanoil Alexandru* (2200), *Florescu Mircea* (2293), *Frisch I.* (2191), *Găină Stelian* (2026), *Galațky George* (2235), *Geavit Musa* (2326), *Georgescu Corneliu* (1965, 2143, 2204, 2234, 2331), *Gheorghiu N.* (2244, 2267, 2430), *Goga I. Florian* (2099), *Grabcev Boris* (2108), *Grosu D.* (2158, 2201, 2202), *Hodîrcă Iacob* (2275, 2393,) *Hollinger A.* (1966), *Hulubei T. Valeriu* (2144, 2196, 2273, 2325, 2423), *Ionescu Ion* (2104), *Ionescu Radu* (2086, 2383), *Ionescu-Bujor C.* (2314), *Ionescu-Țiu C.* (1969,1977, 1978, 2015, 2023, 2085, 2093, 2142, 2145, 2189, 2226, 2227, 2236, 2265, 2274, 2289, 2324, 2345, 2386, 2387, 2388, 2425, 2426, 2427), *Iorgulescu A.* (2360), *Istodor Valentin* (2347), *Jaica I. Florea* (2032), *Kiss Elemer* (2349, 2397), *Levin A. S.* (2316), *Lupuțiu Ion* (2240, 2291), *Mănescu Lucian* (2017, 2195), *Mărculescu Gh. Stelian* (2152, 2332), *Marinescu Achim* (2161), *Mateescu Th.* (2296), *Mecea P.* (2445), *Mihăileanu Const.* (2284), *Mihăileanu N.* (1981, 2098, 2193), *Mihu C.* (2279), *Mircea Adam* (2094, 2097, 2290), *Mitrofan Gh. I.* (1968, 2150), *Munteanu C.* (2439), *Necșoiu Const.* (2139, 2205, 2381), *Nicoară Gh.* (2299), *Nicolae Alexandru* (2245), *Nicolaescu M.* (2337), *Orheianu A.* (2016), *Orșivski Claudiu* (2156, 2157), *Panaitopol L. V.* (2308), *Panu D. C.* (2012, 2286), *Paraschiv Ion* (1986, 2281), *Paraschiv V.* (2033), *Păun C.* (2148), *Păun N.* (2297, 2437), *Petrică Zamfira* (2319), *Petrov S.* (2321), *Popescu Alex. Dan* (2338), *Popescu I. Mihail* (2233, 2280), *Predoiescu I. M.* (2362), *Prisadă D.* (2359), *Pupăzan N. V.* (2330), *Racoveanu C. Em.* (2107), *Roșianu C. Dragomir* (2243), *Rusnac I. Leonid* (2105, 2203), *Savin I. Dan* (2101), *Schileru I. Dinu* (2340), *Schip Z. Harry* (2021), *Simon St. Petre* (2194, 2346, 2384, 2401, 2421) *Sorescu V. I.* (2213), *Stănășilă Octavian* (2153), *Stăncescu Emil* (2300), *Stănciulescu Mihai* (2270, 2350), *Stăncescu N. E.* (2398), *Stegărescu Sorin* (2351), *Stoenescu Alexandru* (2013, 2327, 2342), *Stoian I. Gheorghe* (2272, 2352, 2392, 2157), *Stroe Radu* (1979, 1984, 2354), *Șaichin A.* (2198, 2263, 2329, 2402), *Șerb Gabriel Adrian* (1988), *Ștefan Vasile* (2034, 2090), *Tănase D.* (1987), *Teodorescu St.* (2358), *Țigănoiu Al.* (2440), *Udrescu Valeriu* (2232), *Ulea Dan* (2353), *Văgăunescu G.* (2438), *Vasilescu F.* (2395), *Voicu I. Tr.* (2341), *Voinea I. Alex.* (2209, 2214, 2269), *Zigulescu D. Marian* (2154, 2306).

7. *Exerciții și probleme pentru școala de 7 ani, repartizate pe autori.* — *Ancuțoiu Gh.* (895), *Andricioaiei Gheorghe* (794), *Baieră I. B.* (774, 787, 788, 803, 811, 847, 848, 853, 880, 887, 900), *Bogdan M. P.* (864), *Bulucea C* (903), *Călugărița Gh.* (797), *Ciomu C. N.* (769), *Cocea Gh. Theodor* (885), *Cojocaru Ion* (864), *Cristea Aurel* (784), *Dăscălescu H.* (824, 826), *Demajo*

Adriana (766), *Dinu Gh.* (818), *Dobronăuțeanu S.* (878), *Dobrotescu Gh.* (756, 821, 825, 883, 904), *Domide Leontin* (845, 855), *Donescu St. Dragomir* (755, 831), *Drăgoiescu I.* (820), *Grigore Viorel* (889), *Grigorescu Ion* (813), *Groșoreanu Gelu* (854, 882), *Guiașu Silviu* (772), *Ionescu Gelu* (771), *Ionescu Mircea* (773, 785), *Ionescu-Țiu C.* (799, 802, 810, 834, 835, 849, 852, 869, 888, 898), *Istodor Valentin* (795), *Kiss Elemer* (905), *Man Octavian* (764, 770), *Mărculescu G. Stelian* (817), *Marin I.* (894), *Mateescu Ion* (896), *Mazilu Gh.* (819, 828), *Mecea Petru* (749, 893), *Mihalache T.* (786), *Munteanu N. I.* (782, 814, 851, 862, 892, 902), *Mușat St. Ion* (806, 843, 844, 861), *Necșoiu C.* (807, 808), *Oprea Miron* (775), *Petcu Diamanta* (891), *Petrovici R.* (816), *Popescu I. Șerban* (747, 751, 856), *Predoiescu Marieta* (908), *Rădulescu I.* (809), *Rotaru Const.* (768), *Rus A. Ioan* (758, 822, 833), *Sămărescu Dan* (759), *Săndulescu M.* (762), *Schip Harry* (748), *Stănășilă Octavian* (760), *Stoian I. Gheorghe* (753, 765, 783, 815, 856, 866), *Stroe Radu* (789), *Teodorescu Nicolae* (793), *Torjescu Florin* (752, 850), *Trifu Mircea* (899), *Zamfirescu Tudor* (875), *Zilbermann Mircea* (812, 907).

8. *Probleme rezolvate* la pagina indicată între paranteze: 1272 (366) 1364 (424), 1401 (424), 1403 (88), 1404 (88), 1420) (88), 1424 (90), 1428 (90), 1434 (91), 1436 (92), 1439 (92), 1443 (93, 1449 (143), 1453 (93), 1454 (94), 1501 367), 1502 (30), 1503 (193), 1508 (30), 1509 (30; 94), 1510 (31), 1511 (32), 1513 (95), 1515 (144), 1518 (33), 1520 (95), 1522 (96), 1532 (33), 1535 (144), (34), 1544 (34), 1546 (36), 1547, (36), 1548 (313), 1550 (194), 1551 (96), 1552 (97), 1553 (97), 1554 (145), 1556 (425), 1558 (37), 1559 (37), 1561 (38), 1566 (38), 1569 (38), 1575 (39), 1579 (98), 1580 (39), 1583 (195), 1585 (39, 1587 (40), 1590 (145), 1593 (195), 1594 (40), 1595 (146), 1596 (148), 1600 (149), 1601 (150), 1602 (196), 1606 (197), 1607 (98), 1624 (197), 1628 (198 426), 1630 (314), 1633 (151), 1647 (41)), 1639 (151), 1654 (199), 1657 (152), 1658 (200), 1672 (202), 1700 (202), 1703 (314), 1705 (203), 1709 (203), 1711 (204), 1712 (536), 1713 (205), 1716 (483), 1724 (206), 1731 (257), 1740 (259), 1745 (260), 1756 (261), 1757 (261), 1758 (263), 1762 (206), 1764 (263), 1765 (264), 1766 (368), 1767 (316), 1768 (369), 1769 (370 536), 1779 (370), 1780 (371), 1785 (316), 1791 (317), 1802 (427), 1805 (318), 1806 (318), 1809 (319), 1810 (320), 1811 (320), 1812 (321), 1825 (483), 1841 (428; 484), 1842 (429), 1843 (430), 1850 (321), 1854 (594), 1856 (430), 1861 (431), 1863 (431), 1866 (432), 1872 (433), 1888 (434), 1898 (434), 1899 (536), 1901 (485), 1902 (537), 1907 (321), 1909 (322), 1914 (323), 1922 (537), 1925 (538), 1931 (539), 1932 (485), 1933 (324), 1936 (487), 1939 (539), 1942 (487), 1943 (488), 1952 (592), 1958 (596), 1938 (539), 1889 (488) 1984 (640), 1990 (489), 1991 (489), 1997 (490), 2012 (540), 2017 (490), 2027 (540), 2038 (91), 2086 (541), 2092 (542), 2094 (542), 2096 (641), 2097 (642), 2139 (543), 2239 (543), 2248 (643), 2264 (647), 755 (647), 756 (648), 760 (648).

9. *Exerciții și probleme pentru școala de 7 ani*, rezolvate la pagina indicată între, paranteze: E. 553 (99), 561 (42), 566 (153), 569 (99), 575 (42), 592 (42), 608 (153), 613 (43), 647 (325, 668 (372), 681 (325), 682 (492), 689 (325), 690 (372), 711 (373), 719 (492), 747 (492), 749 (493), 754 (493), 755 (647), 756 (648), 760 (648).

EVIDENȚIAȚI [1])

1. *Alexa I. Dumitru* (student Iași) (105, 217, 332, 498), 2. *Alexa Ioan* (absolvent Sibiu (105, 440, 610), 3. *Ancuțoiu I. Gh.* (cl. 9. R. Vîlcea) (105, 440, 555), 4. *Andricioaiei Gheorghe* (cl. 9 Botoșani) (217, 550), 5. *Angheluș M. Ioan* (absolvent Cîmpina) (660), 6. *Anițescu N. Niculae* (cl. 8 Tg. Jiu) (160), 7. *Apetrei Nicolae* (cl. 7 Botoșani) (384), 8. *Aposlu Ioana* (cl. 7 Păunești, Bacău) (217), 9. *Arion Adriana* (cl. 9 Botoșani) (276), 10. *Arsenovici Tiberiu* (cl. 10 Timișoara) (105, 160, 217), 11. *Auzic Dorel* (cl. 9 Arad) (610), 12. *Avram N. Const.* (cl. 10 Adjud) (610), 13. *Baciu Valeriu* (cl. 10 s.m. 4 București) (610), 14. *Ballag Vasile* (cl. 9 Ploești) (440, 498, 610, 656), 15. *Bardan I. Ion* (absolvent, Strehaia, Craiova) (656), 16. *Bărăitan Florin* (cl. 10 s.m. 13 București) (498), 17. *Bărglăzan Mircea* (cl. 10 Timișoara), (217), 18. *Basarab Șerban* (cl. 10 s.m. 1 București) (217, 383), 19. *Bărbuică Nicolae* (cl. 10 Craiova) (160, 217, 276, 555), 20. *Bălinețu M. Dumitru* (absolvent Zimnicea) (52, 555, 656), 21. *Bercovici Izu* (cl. 10 Focșani) (105, 384), 22. *Bergthal Cristian* (cl. 8 Petroșani) (440), 23. *Beu G. Ion* (cl. 10 R. Sărat) (440), 24. *Bigan Stan* (cl. 10 Giurgiu) (52, 217, 276, 555, 610), 25. *Birsan Ion* (cl 9 Sibiu) (440), 26. *Birzan Romanel* (cl. 9 Cluj) (555, 610), 27. *Bogheanu Dragoș* (cl. 10 Suceava) (52), 28. *Bogaciu Valeriu* (absolvent Pitești) (105), 29. *Boloca Ion* (cl. 10 Cîmpulung Mold.) (105, 106), 30. *Bostan Emil* (absolvent Iași) (52), 31. *Botoran Petre* (cl. 10 Giurgiu) (160, 217, 384, 555), 32. *Bogdan P. Mircea* (cl. 10 Ploești) (217, 498, 555, 610), 33. *Brînduș Lucian* (absolvent Orașul Stalin) (52, 440), 34. *Brebenie Cornelia*

[1]) Între paranteze este trecut numărul paginii unde a fost evidențiat rezolvitorul respectiv.

(cl. 10 Tîrgovişte)(52), 35. *Bucur D. Gheorghe* (cl. 10 Pucioasa) (160, 217, 498, 610, 656), 36. *Bucică Mircea* (cl. 10 s.m. 17 Bucureşti) (610), 37. *Bulucea D. Const.* (cl. 9 R.Vîlcea) (498, 555), 38. *Bucică Mihai* (cl. 10 s. m. 17 Bucureşti) (383), 39. *Buriman Adrian* (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (384), 40. *Buşe Constantin* (cl. 9 Focşani) (217), 41. *Căluianu Nicolae* (absolvent Roman) (105, 610), 42. *Căluţoiu Ion* (cl. 10 s.m.1 Bucureşti) (384), 43. *Căsăndroiu Tudor* (cl. 8 Ploeşti) (160, 498), 44. *Ceangă Emil* (cl. 10 Galaţi) (384), 45. *Celăţeanu Cecilia* (studentă Craiova) (160), 46. *Chirică Andrei* (cl. 10 Ploeşti) (332), 47. *Chitucea Eugen* (cl. 10 Craiova) (105), 48. *Ciobonu I. Ion* (cl. 10 Oraşul Stalin) (440), 49. *Cimpoeşu Tudora* (cl. 10 P. Neamţ) (332), 50. *Ciobotaru C. C.* (cl. 10 Truşeşti) (440, 555), 51. *Ciortan Vasile* (cl. 8 Ploeşti) (440), 52. *Cîrnu Mircea* (cl. 8 Tîrgovişte) (610), 53. *Cojocaru Ion* (absolvent Craiova) (384, 555), 54. *Cojocaru I. Mihai* (cl. 8 Focşani) (384), 55. *Colonati Cristian* (absolvent Moreni) (384, 555, 610), 56. *Colibaba Tiberiu* (student Bucureşti) (105), 57. *Corduneanu Adrian* (cl. 10 Iaşi) (498), 58. *Cornea Gheorghe* (cl. 10 Constanţa) (610), 59. *Cotulea Ion* (student Cluj) (555), 60. *Corbu Ion* (cl. 10 s.m. 11 Bucureşti) (105, 656), 61. *Costinescu Anca* (cl. 9 Iaşi) (331, 383), 62. *Cristea Rodica* (cl. 7 Bordeşti, R. Sărat) (52), 63. *Cristea I. Ion* (student Bucureşti) (105), 64. *Cristea Miron* (absolvent Topliţa) (105), 65. *Cristea Aurel* (cl. 10 Focşani) (105, 217, 656), 66. *Cristache Aurel* (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (160, 276), 67. *Crăciun Gheorghe* (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (384), 68. *Cucu Paul* (cl. 10 Buzău) (276, 384), 69. *Cuşmaru I. Ilie* (cl. 9 Iaşi) (217, 331), 70 *Damian Şerban* (cl. 10 Ploeşti) (332), 71. *Dănilă Marcel* (c. 10 Iaşi) (555), 72. *David Gabriela* (cl. 10 s.m. 15 Bucureşti) (610), 73. *Delu Ştefan* (cl. 10 Corabia) (160, 217, 498, 610), 74. *Dinu Gheorghe* (cl. 10 Craiova) (217, 384), 75. *Dincă Nicolae* (cl. 9 Ploeşti) (332), 76. *Dinulescu Horia* (cl. 8 Focşani) (384, 498), 77. *Diţu Ionică* (cl. 10 Petroşani) (498), 78. *Dobre Ion* (cl. 10 s.m. 13 Bucureşti) (498), 79. *Dobre Cornel* (cl. 8 s.m. 4 Bucureşti), (384), 80. *Donea Sorin* (absolvent Bacău) (555), 81. *Donescu Şt. Dragomir* (student Bucureşti) (105, 217), 82. *Drăgan Şt. Marin* (student Bucureşti) (52, 105), 83. *Drăghicescu Inocenţiu* (student Bucureşti) 84. *Drăguşin Mircea* (cl. 10 Tg. Mureş) (660), 85. *Draica Const.* (cl. 9 s.m. 4 Bucureşti) (160, 217, 383, 555), 86. *Dudaş Nicolae* (cl. 10 Oraşul Stalin) (440), 87. *Dudă Nicolae* (absolvent Călăraşi) (276, 555), 88. *Dumitrescu I. Aurel* (cl. 10 Curtea de Argeş). (52, 105), 89. *Dumitrescu Ilie* (cl. 10 R. Vîlcea) (217), 90. *Ellenberg Manfred* (student Bucureşti) (105), 91. *Emanoil Alexandru* (cl. 10 s.m. 1 Bucureşti) (217, 384, 498, 610, 656), 92. *Ene Aurel* (cl. 10 Curtea de Argeş) (52, 93), *Ene A. Ion* (cl. 10 s.m. 20 Bucureşti) (555, 610), 94. *Ene I. Ion* (student Bucureşti) (105, 160, 383, 498), 95. *Enescu I. Nicolae* (cl. 10 R. Vîlcea (217, 555), 96. *Encica Traian* (cl. 10 Constanţa) (276), 97. *Enulescu C. Alexandru* (cl. 8 s.m. 20 Bucureşti) (656), 98. *Fedorski Dumitru* (cl. 10 Truşeşti) (555), 99. *Feldman Mihai* (cl. 9 Iaşi) (217), 100. *Fejes Iuliu* (cl. 10 Baia Mare) (384), 101. *Filcescu Viorel* (cl. 10. s.m. 4 Bucureşti) (276), 102. *Florea Dorel* (cl. 9 Lugoj) (610), 103. *Florescu Gh. Mircea* (student Bucureşti) (105, 384, 555), 104. *Flueraşu Cezar* (cl. 10 s.m. 13 Bucureşti) (160, 498), 105. *Focşeneanu I. Ioan* (cl. 9 P. Neamţ) (105, 160, 217, 498, 656), 106. *Frăţiloiu Gh.* (cl. 10 Pucioasa) (610), 107. *Gervescu M. Ion* (cl. 8 P. Neamţ) (52, 217, 331, 555, 656), 108. *Gheorghe A. Cezar* (cl. 8 Buzău) (656), 109. *Gherman Corneliu* (cl. 8 Botoşani) (105, 555), 110. *Glasberg Vladimir* (cl. 8 s.m. 12 Bucureşti) (660), 111. *Goldstein Alexandru* (cl. 10 Tecuci) (160), 112. *Gorbănescu Gheorghe* (cl. 10 Truşeşti) (498), 113. *Grecu Anton* (cl. 8 Roşiorii de Vede) (610), 114. *Grigoriu Corneliu* (cl. 9 Tîrnăveni) (555), 115. *Grigoraş Vasile* (cl. 7 Orbeni) (52, 656), 116. *Grosu Gh. Florin* (cl. 10 Galaţi) (105, 160, 217, 276, 383), 117. *Grigorescu D. I.* (cl. 10. R. Vîlcea) (217, 331, 440 , 555), 118. *Groşoreanu Tudor* (cl. 7 s.m. 7 Bucureşti) (160, 276, 656), 119. *Guiaşu Silviu* (student Bucureşti) (52, 105); 120. *Hărăboi Mihai* (cl. 10 Bacău) (217); 121. *Hegedüs Attila* (cl. 9 Tg. Mureş) (105, 217, 440); 122. *Hioi C. Const.* (cl. 8 Roman) (660); 123. *Hodiş Gheorghe* (absolvent Zalău) (105); 124. *Hogaş C. Constantin* (absolvent Iaşi) (52); 125. *Hodor Const.* (cl. 7 Roznov) (105, 217, 440. 610); 126. *Hoţa Marcel* (cl. 10 Tg. Mureş) (217, 498, 610); 127. *Hulubei Valeriu* (cl. 10 Craiova) (160, 217, 276, 384, 555, 610); 128. *Ianuş Stere* (cl. 9 Constanţa) (160, 384, 555); 129. *Iftimie Viorel* (cl. 10 Rădăuţi) (440, 610, 660); 130. *Ignat Maria* (cl. 7 Păuneşti, Bacău) (276, 660); 131. *Ionescu Mircea* (cl. 9. s. m. 4 Bucureşti) (383); 132. *Ioniţă Tudor* (student Oraşul Stalin) (440, 610, 660); 133. *Iorgulescu Alex.* (cl. 9 Urlaţi, Bucureşti) (105, 160, 384, 659); 134. *Iordache G. Vasile* (cl. 10 Brăila) (276, 610); 135. *Ionescu Radu* (cl. 10 Turnu Severin) (555); 136. *Iordănescu R. Sorin* (cl. 9 s.m. 20 Bucureşti) (555); 137. *Isbăşescu Mihai* (cl. 8 s.m. 1 Bucureşti) (659); 138. Ivanică Alex. (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (555); 139. *Jianu Ion* (cl. 9 s.m. 2 Bucureşti) (498); 140. *Jilăveanu S. Gheorghe* (absolvent Mediaş) (391); 141. *Jurcă Valeriu* (cl. 10 Ploeşti) (276. 332, 555); 142. *Lambă Stelian* (student Bucureşti) (52); 143. *Landman Alex.* (student Bucureşti) (160); 144. Lazăr Edith (studentă Bucureşti) (52); 145. *Lazăr Gheorghe* (cl. 10 R. Vîlcea 332); 146. *Lăzărescu Emil* (cl. 9 Moreni) (440); 147. *Leiss Gerhardt* (cl. 10 Cîmpina) (610); 148. *Lucan Mihai* (cl. 9 Botoşani) (498); 149. *Lungu N. Liviu* (cl. 9 Ploeşti) (331); 150.

Lungu Ovidiu (student Bucureşti) (160); 151. *Lupuţiu Ioan* (student Bucureşti) (52, 160, 383, 555); 152. *Mandl Robert* (cl. 9 Alba Iulia) (656); 153. *Marin Maria* (cl. 9 Ploeşti) (656); 154. *Mateescu V. Ion* (absolvent R. Vîlcea) (52); 155. *Mateescu N. Tudor* (absolvent Caransebeş) (105, 383); 156. *Manolache V. Dumitru* (absolvent Focşani) (160); 158. *Maşek Corneliu* (cl. 7 Gurabarza) (217); 159. *Maftei Nicolae* (cl. 10 s.m. 7 Bucureşti) (276); 160. *Marchiş Ion* (cl. 10 Reşiţa) (440); 161. *Matei Aurel* (cl. 9 Tg. Mureş) (105, 160); 162. *Matei Paul* (cl. 10 Tg. Mureş) (555); 163. *Mihăileann N. Const.* (cl. 9 Timişoara) (105, 217); 164. *Mihalache Traian* (student Bucureşti) (105); 165. *Mitu Ion* (cl. 10 P. Neamţ) (498, 555); 166. *Mitrofan I. Gh.* (student Bucureşti) (52, 105); 167. *Mişcol Mircea* (absolvent Giurgiu) (105); 168. *Mitroi Valeriu* (absolvent Roşiorii de Vede (660); 169. *Melica Axente George* (student Bucureşti) (105, 160); 170. *Moisin L. Tudor* (cl. 10 Cîmpina) (493, 610); 171. *Moraru Florentin* (cl. 10 s.m. 1 Bucureşti) (384); 172. *Mocanu Gheorghe* (student Bucureşti) (105); 173. *Motoc I. Ion* (cl. 10 s.m. 20 Bucureşti) (52, 105); 174. *Motronea N. Valer* (cl. 9 Tg. Mureş) (660); 175. *Murărescu Gheorghe* (cl. 10 Roman) (105, 331, 498, 610); 176. *Negoiţescu Stelian* (absolvent Timişoara) (52); 177. *Neguţ Nicolae* (student Bucureşti) (160); 178. *Nedelcu Mihai* (absolvent Ploeşti) (498); 179. *Nerodea Tiberiu* (cl. 10 Timişoara) (332, 440); 180. *Nicolau Gh. Cornel* (cl. 9 s.m. 4 Bucureşti) (160, 276); 181. *Nicolau Ileana*(cl. 10 s.m. 19 Bucureşti) (384); 182. *Nicolaescu Dan* (cl. 9 Călăraşi) (160); 183. *Niculescu M. Iulian* (cl. 10 Turnu Măgurele) (105, 332); 184. *Nistreanu Valeriu* (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (52, 276, 498, 610, 656); 185. *Niţă Gheorghe* (absolvent Brăila) (105); 186. *Olteanu D. Const.* (cl. 9 Piteşti) (555); 187. *Onuţă N. Ion* (cl. 9 Călăraşi) (610); 188. *Oprică I. Mihai* (cl. 8 s.m. 17 Bucureşti) (383, 656); 189. *Oprea G. Const.* (Vidra) (105); 190. *Opriş Ioan* (absolvent Zalău) (217, 498); 191. *Osman S. Saim* (cl. 10 Constanţa) (610); 192. *Panaitopol Laurenţiu* (cl. 9 Giurgiu) (52, 105, 160, 217, 276, 383, 610), 193. *Păpuşoiu Gh.* (cl. 9 Lugoj) (332); 194. *Pătraşcu Sorin* (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (498); 195. *Paulescu N. Dan* (cl. 10 R. Vîlcea) (331, 440, 551, 610); 196. *Păunescu Lucian* (cl. 10 s.m. 17 Bucureşti) (217, 276, 498, 555, 656); 197. *Petrescu Aristide* (cl. 10 Buzău) (217); 198. *Piso Pompiliu* (cl. 10 Tîrnăveni) (52, 498); 199. *Pîrvănescu Iulius* (cl. 10 Tecuci) (160); 200. *Petrescu M. Răsvan* (cl. 10 Ploeşti) (331); 201. *Podeanu Corneliu* (cl. 10 O. Stalin) (440); 202. *Pleniceanu A. Ion* (student Petroşani) (105, 160, 440, 555, 610); 203. *Popescu Mircea* (cl. 8 Tîrgovişte) (610). 204. *Popa Adrian* (cl. 10 s.m. 17 Bucureşti) (610); 205. *Popescu A Iulian* (cl. 10 Tg. Jiu) (610); 206. *Pop Florica* (cl. 8 Zalău) (440); 207. *Popescu Paul Roger* (cl. 10 s.m. 11 Bucureşti); 208. *Popa Laurenţiu* (cl. 10 Timişoara) (160); 209. *Popa Doina* (cl. 7 s.m. 15 Bucureşti) (276); 210. *Popescu Călin* (cl. 10 Ploeşti) (331); 211. *Popa Gheorghe* (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (384); 212. *Popescu I. Ovidiu* (cl. 7 s.m. 13 Bucureşti) (384); 213. *Popovici I. Radu* (student Bucureşti) (384); 214. *Predoiescu Marieta* (cl. 8 s.m. 10 Bucureşti) (276, 498); 215. *Preda Adrian* (cl. 10 Curtea de Argeş) (52, 217); 216. *Puiu Tiberius* (cl. 10 s.m. 20 Bucureşti) (276); 217. *Pupăzan V. Nicolae* (absolvent Sibiu) (105, 160, 331, 440, 555, 610); 218. *Rădescu Eugen* (cl. 8 Focşani) (656); 219. *Rădulescu D. Const.* (cl. 9 s.m. 4 Bucureşti) (555, 656); 220. *Receanu Viorica* (cl. 9 Sibiu) (498); 221. *Roman Barbu* (cl. 10 Ploeşti) (555); 222. *Rotaru N. Const.* (absolvent Suceava) (52, 105, 555); 223. *Rotaru Nicolae* (cl. 7 Suceava) (217); 223. *Roşca Valeriu* (cl. 10 Craiova) (555); 224. *Roşca Valentin* (cl. 10 Craiova) (555); 225. *Roşianu C. Dragomir* (student Bucureşti) (52, 105, 276, 384, 498); 226. *Radu C. Const.* (absolvent R. Sărat) (52); 227. *Rotemberg Martin* (cl. 9 Botoşani) (555); 228. *Rus A. Ioan* (absolvent Oradea) (52, 105); 229. *Rusu Dan* (cl. 9 Ploeşti) (555); 230. *Sarion Virgil* (cl. 10 R. Vîlcea) (440); 231. *Savin I. Dan* (student Petroşani) (105, 160); 232. *Schileru I. Dinu* (cl. 10 Bucureşti) (52, 105, 384); 233. *Serdeşnic Aurel* (an I Lugoj) (440); 234. *Segal Zigu* (absolvent Iaşi) (160); 235. *Sin C. Alexandru* (cl. 10 Giurgiu) (384, 590); 236. *Simionică I. Traian* (cl. 7 Cîmpulung Muscel) (610); 237. *Schweinert St. Ioan* (cl. 10 Reşiţa) (217); 238. *Stngeorzan Emil* (cl. 10 Năsăud) (217); 239. *Sorescu I. Victor* (absolvent Piteşti) (105); 240. *Şor Liber* (cl. 9 Iaşi) (217, 660); 241. *Săvîrdea Dumitru* (absolvent Caransebeş) (383, 555); 242. *Stoica N. Constantin* (cl. 10 Focşani) (384); 243. *Stan N. Dumitru* (cl. 10 Pucioasa) (440, 610); 244. *Stănescu Gh. Ion* (cl. 10 s.m. 17 Bucureşti) (498); 245. *Stoian Mircea* (cl. 8 O. Stalin) (331); 246. *Stroe Radu* (student Bucureşti) (52, 105. 660); 247. *Stoian I. Gh.* (student Bucureşti) (105, 276, 383, 498), 248. *Stănăşilă Octavian* (student Bucureşti) (105); 249. *Stănescu St. Nelu* (cl. 10 Giurgiu) (105); 250. *Stănciulescu Mihai* (cl. 9 Tîrgovişte) (160, 217, 331, 440, 498); 251. *Stănescu N. Emil* (cl. 10 Giurgiu) (160, 276, 383, 610, 660); 252. *Stegărescu Sorin* (cl. 10 Iaşi) (217); 253. *Stănculescu Adrian* (cl. 10 Craiova) (217, 384, 555, 610); 254. *Suciu A. Tiţa* (cl. 9 Buzău) (276); 255. *Şuganai A. Nusfet* (cl. 10 s.m. 13 Bucureşti) (384, 610, 656); 256. *Ştefan Zaharia* (cl. 8 s.m. 4 Bucureşti) (384); 257. *Ştefănoiu Viorel* (cl. 8 s.m. 4 Bucureşti) (384); 258. *Şteinberg Mauriciu* (cl. 10 Roman) (440); 259. *Şerban Ligia* (cl. 7 Păunești Bacău) (656); 260. *Şchiopulescu Dan* (cl. 8 s.m. 11 Bucureşti) (656); 261. *Şeitan G. Radu* (cl. 9 s.m. 2 Bucureşti) (383); 262. *Şerbănescu N. Tiberiu* (cl. 10 Slatina) (331); 263. *Şerb Gh. Adrian* (student A.T.M.)

(52); 264. *Ştefan Ionel* (şc. hidro Constanţa) (105, 217, 555); 265. *Ştefănescu Dan* (cl. 10 Ploeşti) (217); 266. *Şafran Gavril* (cl. 9 Piteşti) (217, 332); 267. *Şarpe I. Dumitru* (cl. 10 Corabia) (276, 383, 555, 610); 268. *Tagă S. Mihai* (cl. 9 Ploeşti) (656); 269. *Tănăsescu I. Ştefan* (cl. 10 s.m. 4 Bucureşti) (498); 270. *Teodorescu N.* (cl. 9 s.m. 2 Bucureşti) (610); 271. *Torsan Ilie* (absolvent Alba Iulia) (52, 276); 272. *Tofan V. Vasile* (absolvent Bacău) (52); 273. *Torjescu Florin* (student mecanică Bucureşti) (160, 498); 274. *Tudor S. Tiberiu* (cl. 10 Tg. Mureş (105); 275. *Tudor M. Gheorghe* (cl. 10 s.m. 13 Bucureşti) (276, 555, 610); 276. *Tudor M. Const.* (cl. 10 Tîrgovişte) (331, 440, 555, 656); 277. *Turiga M. Const.* (absolvent Urziceni) (332, 498, 555); 278. *Trifu Mircea* (cl. 8 Alba Iulia) (384. 555, 656); 279. *Ţîru Emil* (student Iaşi) (105, 498); 280. *Ţibuleac Florin* (cl. 9 Iaşi) (160, 383, 656); 281. *Ţigănuş Mircea* (cl. 10 Focşani) (384); 282. *Ţugulea Eugen* (cl. 10 R. Vîlcea) (331); 283. *Udrea Dumitru* (cl. 8 s.m. 4 Bucureşti) (384); 284. *Urmă D. Radu* (cl. 10 s.m. 1 Bucureşti) (160, 498); 285. *Ursoiu Vasile* (absolvent Roman) (160); 286. *Văgăunescu George* (cl. 10 Ploeşti) (331, 610); 287. *Vasiliu Monica* (cl. 10 Bacău) (555); 288. *Vasiliev Lucia* (sc. hidro Constanţa) (217, 555); 289. *Velicescu T. Mircea* (cl. 7 Tg. Jiu) (660); 290. *Vidraşcu Traian* (cl. 8 Tecuci) (660); 291. *Voinea I. Alex.* (cl. 10 Craiova) (217, 276, 555); 292. *Viorel Grigore* (absolvent Darabani) (217); 293. *Voinea C. Dorin* (cl. 10 s.m. 2 Craiova) (105, 160, 217); 294. *Voinea I. Const.* (cl. 9 Craiova) (105); 295. *Voicu I. Traian* (cl. 10 Slatina) (160) (331); 296. *Vişinescu Mihai* (cl. 8 Giurgiu) (610, 656); 297. *Weiss Adolf* (cl. 10 Reşiţa) (105); 298. *Zamfirescu Tudor* (cl. 6 s.m. 1 Bucureşti) (498); 299. *Zgăvîrdea Dumitru* (absolvent Caransebeş) (105); 300. *Zilberman Mircea* (cl. 10 Bacău) (160, 217, 384, 555, 610); 301. *Zorapapel Tiberiu* (cl. 9 s.m. 17 Bucureşti) (498, 555).

OLIMPIADA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ 1956 — 1957

În atenţia tineretului din şcoli

— Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. organizează « Olimpiadele de matematică şi de fizică 1956—1957» la care pot participa elevii şcolilor medii de zi şi serale, ai şcolilor pedagogice şi de învăţători, profesionale şi tehnice.

— Olimpiadele se desfăşoară în patru etape:

— etapa I organizată pe şcoli, a avut loc pentru matematică şi pentru fizică, între 20 noiembrie şi 15 decembrie 1956;

— etapa II locală, va avea loc pentru matematică la 17 februarie şi pentru fizică la 24 februarie 1957;

— etapa III regională, va avea loc pentru matematică şi pentru fizică la 31 martie—1 aprilie 1957;

— etapa IV finală de ţară, va avea loc în Bucureşti, elevii admişi se pot prezenta fie numai la matematică, fie numai la fizică, la probele scrise (eliminatorii) şi orale care au loc între 29 aprilie şi 2 mai 1957,

— Elevii evidenţiaţi la ultimele două etape vor primi diplome, premii în cărţi etc.

ELEVI ŞI ELEVE PARTICIPAŢI CU TOT ENTUZIASMUL VOSTRU LA ACESTE OLIMPIADE DE MATEMATICĂ ŞI DE FIZICĂ!

Országos Mező... Könyvtár

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— Rezolvarea fiecărei probleme trebuie făcută *separat*, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme *pe aceiași foaie*. — Fiecare soluție să fie precedată de numărul de *ordine* al problemei, enunțul *complet* și numele propunătorului. — După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț *numele*, *clasa* și *școala* unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică, iar pe adresă să menționați: *Redacției GMF — seria B.*

— Se primesc soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele *trei numere apărute*.

— Rezolvitorii pot trimite într-un plic, *francat* după greutate, toate rezolvările făcute timp de una sau două luni și redactate cu îngrijire așa cum recomandă « Redactarea soluțiilor ».

— Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1957 se vor socoti la *premierea colaboratorilor pe anul 1957*.

— Pentru anul 1957 G.M.F. (B) publică numele evidențiaților premiați și lista cărților ce se dau ca premii și mențiuni.

— Nu se iau în seamă soluțiile exercițiilor și problemelor propuse pentru școala de 7 ani, trimise de elevii claselor a IX-a și a X-a sau de către studenți și nici soluțiile trimise în număr mai mic de *zece* sau necorect redactate.

— Problemele ce se propun de colaboratorii revistei să fie *clar* compuse, însoțite de *soluții*, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste iar trimiterea lor se poate face odată cu trimiterea soluțiilor problemelor. Elevii sînt sfătuiți să înceapă să propună probleme numai după ce au soluționat un număr *destul de mare* de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse mai există publicate în cărți sau reviste este rugat să ne arate precis, *volumul* și *pagina* unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— În redactarea unei soluții trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. *Figurile* trebuie făcute corect, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori aceste reguli împlinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși *chestiuni interesante*. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— La rezolvarea problemelor vom da numele rezolvitorilor ale căror soluții distinse au fost scrise îngrijit și bine redactate, sau dacă au prezentat mai multe *soluții diferite* pentru aceiași problemă sau au dat generalizări și observații interesante sub *formă de note*.

— Tovarășii colaboratori elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și la fizică, asupra cercurilor de matematică și de fizică la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « *Olimpiadelor de matematică și de fizică* » pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes, un schimb de experiență.

— Redacția *nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile și sugestiile în legătură cu tirajul sau *întîrzierea apariției* revistei se vor face C e n t r u l u i d e d i f u z a r e a p r e s e i. București, str. Piața Scînteii nr. 1, telefon 3.40.06.

— Fiecare cititor al G.M.F. - seria B mai este rugat să facă cunoscută revista și altora; să ne trimită propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— Exemplare mai vechi sau din anul precedent din G.M.F-seria B sînt epuizate.

Costul abonamentului la G.M.F.-B pe anul 1957 este de 10 lei anual, sau 1 leu exemplarul. Abonamentul se poate face *individual* prin factorii poștali sau la oficiile poștale.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	**Bazele teoriei numerelor.**
2. A. I. MARCUŞEVICI	**Şiruri recurente.**
3. N. N. VOROBIEV	**Numerile lui Fibonacci.**
4. P. S. ALEXANDROV	**Introducere în teoria grupurilor.**
5. I. S. SOMINSKI	**Metoda inducţiei matematice.**
6. GH. MIHOC	**Elemente de calculul probabilităţilor.**
7. H. IONESCU	**Calcule numerice.**
8. A. I. MARCUŞEVICI	**Arii şi logaritmi.**
9. A. I. GHELFOND	**Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi.**
10. O. SACTER	**Despre conice şi alte curbe.**
11. ION IONESCU	**Maxime şi minime geometrice.**
12. F. I. ZIGHEL	**Cometele.**
13. S. SKLOVSKI	**Radioastronomia.**
14. V. ATANASIU	**Structura materiei.**
15. V. V. SARONOV	**Soarele şi observarea lui.**
16. O. KREINDLER	**Elemente de calculul vectorial.**
17. B. B. KUDRIAVŢEV	**Experienţe simple cu ultrasunete.**
18. M. V. PENTKOVSKI	**Nomograme.**
19. A. KAHANE	**Elemente de teoria congruenţelor de drepte.**
20. GH. ŢIŢEICA	**Culegere de probleme de geometrie, (revăzută şi completată de G. D. SIMIONESCU).**
21. A. HALANAY	**Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.**
23. V. SERGIESCU	**Introducere în fizica solidului.**
25. C. BORŞ	**Noţiuni de geometrie proiectivă.**

ABONAMENTUL PE ANUL 1957 ESTE DE LEI 10 (12 NUMERE)

C. 1355—INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 **Preţul Lei 1 exemplarul**